线性系統的能控区域及其在最优控制中的某些应用

陈云烽　赵　怡

（数学力学系）

考虑线性系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=A(t)\mathbf{x}(t)+B(t)\mathbf{u}(t), \tag{1}$$

这里，$t\in[t_0,T]$，$\mathbf{x}(t)$是n维状态矢量，$\mathbf{u}(t)$是r维控制矢量，$A(t)$、$B(t)$分别是$n\times n$和$n\times r$阶实矩阵。

记$\Phi(t,s)$是方程(1)的标准基解阵：

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,s)=A(t)\Phi(t,s) \tag{2}$$

$$\Phi(t,s)\Phi(s,\tau)=\Phi(t,\tau),\ \Phi(t,t)=I. \tag{3}$$

其中，I表示单位矩阵。

那么，方程(1)满足初值$\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$的解$\mathbf{x}(\cdot)$在$t_a\geqslant t_0$时刻的值为

$$\mathbf{x}(t_a)=\Phi(t_a,t_0)\mathbf{x}_0+\int_{t_0}^{t_a}\Phi(t_a,s)B(s)\mathbf{u}(s)ds. \tag{4}$$

一般说来，控制$\mathbf{u}(\cdot)$总是受到这样或那样的约束的，例如常见的约束是$\mathbf{u}(\cdot)\in L_p^r[t_0,t_a]$空间的各种类型的约束。

函数空间$L_p^r[t_0,t_a]$，$p=\infty$，1，2 中的元$\mathbf{u}(\cdot)$的模定义如下：

$$\|\mathbf{u}\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant r}\ \operatorname*{ess.sup}_{t_0\leqslant t\leqslant t_a}|u_i(t)|, \tag{5}$$

$$\|\mathbf{u}\|_1=\int_{t_0}^{t_a}\sum_{i=1}^{r}|u_i(t)|dt, \tag{6}$$

$$\|\mathbf{u}\|_2=\left(\int_{t_0}^{t_a}\sum_{i=1}^{r}|u_i(t)|^2dt\right)^{1/2}, \tag{7}$$

这里，(5)，(6)，(7)分别表示控制$\mathbf{u}(\cdot)$的最大振幅，所消耗的全部燃料和能量[1]。

本文将讨论控制$\mathbf{u}(\cdot)$分别在约束

$$\|\mathbf{u}(\cdot)\|_p\leqslant L,\quad p=1,2,\infty. \tag{8}$$

条件下的能控域的问题。这里，L是给定的正实数。

定义 设D_p是n维状态空间R^n中的一个区域，对给定的时刻$t_a \geqslant t_0$，若对任意$\mathbf{x}_0 \epsilon D_p$，均存在控制$\mathbf{u}(\cdot) \epsilon L_p^r[t_0, t_a]$，满足约束条件(8)，将系统的状态由初态$\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$转移至$\mathbf{x}(t_a)=0$，则称$D_p$是系统(1)关于时间区间$[t_0, t_a]$在控制受约束$\|\mathbf{u}\|_p \leqslant L$条件下的能控域；如果，还有：当$\mathbf{x} \bar{\epsilon} D_p$时，任意满足约束(8)的控制$\mathbf{u}(\cdot)$均不能将系统(1)的状态由初态$\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$转移至零终态$\mathbf{x}(t_a)=0$，则称$D_p$是最大能控域。且用$D_{pm}$表示最大能控域。定义中，$p$可以分别取为1，2，∞。

下面应用L－矩量法[2,3]来确定约束(8)条件下的各种最大能控域。

根据(4)式，控制$\mathbf{u}(\cdot)$将初态$\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$.转移到终态$\mathbf{x}(t_a)=0$的充要条件为：$\mathbf{u}(\cdot)$，$\mathbf{x}_0$满足关系式

$$\Phi(t_a, t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_a} \Phi(t_a, s)B(s)\mathbf{u}(s)ds = 0. \tag{9}$$

由基解阵Φ的性质（见(3)式），有

$$\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_a} \Phi(t_0, s)B(s)\mathbf{u}(s)ds = 0. \tag{10}$$

于是，如果记

$$\mathbf{c} = -\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} c_1, \\ c_2, \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$H(t_0, t) = \Phi(t_0, t)B(t) = \begin{pmatrix} h_{11}(t_0, t), \cdots, h_{1r}(t_0, t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ h_{n1}(t_0, t), \cdots, h_{nr}(t_0, t), \end{pmatrix}. \tag{12}$$

则(10)式可改写为

$$\mathbf{c} = \int_{t_0}^{t_a} H(t_0, s)\mathbf{u}(s)ds, \tag{13}$$

即

$$c_i = \int_{t_0}^{t_a} \sum_{j=1}^{r} h_{ij}(t_0, s)u_j(s)ds, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{14}$$

式中，$u_j(\cdot)$是$u(\cdot)$的第j个分量$(j=1, \cdots, r)$.

这么一来，对初态$\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$，系统(1)在区间$[t_0, t_a]$上是否存在满足约束$\|\mathbf{u}\|_p \leqslant L$的控制$\mathbf{u}(\cdot) \epsilon L_p^r[t_0, t_a]$将状态从初态$\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$转移至终态$\mathbf{x}(t_a)=0$，就等价于：对(11)式所给定的矢量$\mathbf{c}$，是否存在满足约束$\|\mathbf{u}\|_p \leqslant L$的$\mathbf{u}(\cdot)$使(14)式成立。

记$\mathbf{H}_p(p=1,2,\infty)$为$[t_0, t_a]$区间上的矢量函数

$$\mathbf{h}(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ \vdots \\ h_r(t) \end{pmatrix}$$

分别按如下方法定义模的函数空间：

$$\|\mathbf{h}\|_1 = \max_{1 < j < r} \ \operatorname{ess.sup}_{t_0 < t < t_a} |h_j(t)|, \tag{15}$$

$$\|\|\mathbf{h}\|\|_2=\left(\int_{t_0}^{t_\alpha}\sum_{j=1}^{r}|h_j(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}},\tag{16}$$

$$\|\|\mathbf{h}\|\|_\infty=\int_{t_0}^{t_\alpha}\sum_{j=1}^{r}|h_j(t)|dt.\tag{17}$$

可见有：$\|\|\mathbf{h}\|\|_1=\|\mathbf{h}\|_\infty$，　$\|\|\mathbf{h}\|\|_2=\|\mathbf{h}\|_2$，　$\|\|\mathbf{h}\|\|_\infty=\|\mathbf{h}\|_1$。

这时，对任意给定的一个$\mathbf{u}(\cdot)\epsilon L_p^r[t_0,t_\alpha]$，可定义$\mathbf{H}_p$上的一个泛函$J_{\mathbf{u}}$：

$$J_u\mathbf{h}((\cdot))=\int_{t_0}^{t_\alpha}\sum_{j=1}^{r}h_i(t)u_i(t)dt.\tag{18}$$

根据泛函模的定义[5]，$J_{\mathbf{u}}(\cdot)$的模应为：

$$\|J_{\mathbf{u}}\|_p=\underset{\|\|\mathbf{h}\|\|_p=1}{SuP}\quad J_{\mathbf{u}}(\mathbf{h}(\cdot)),\tag{19}$$

可以直接检验，此时有：

$$\|J_{\mathbf{u}}\|_p=\|\mathbf{u}\|_p.\tag{20}$$

从而，根据L—矩量问题的基本结果[2,3]，应有：给定$\mathbf{H}_p(p=1,2,\infty)$中的$n$个线性无关的元$\mathbf{h}^{(i)}(\cdot)$，$i=1,\cdots,n$和$n+1$个实数$c_1,\cdots,c_n,L$满足$\sum_{i=1}^{n}|c_i|>0,L>0$，且记

$$\frac{1}{\lambda_p}=\min_{\sum_{i=1}^{n}c_i\xi_i=1}\|\|\sum_{j=1}^{n}\xi_i\mathbf{h}^{(i)}(\cdot)\|\|_p;$$

则有：当且仅当$L\geqslant\lambda_p$时，才存在$\mathbf{u}(\cdot)\epsilon L_p^r[t_0,t_\alpha]$满足$\|\mathbf{u}\|_p\leqslant L$，使得以(18)式所定义的泛函$J_u$满足条件

$$J_{\mathbf{u}}(\mathbf{h}^{(i)}(\cdot))=c_i,\ i=1,\cdots,n.$$

根据线性系统的能控性理论[6]，系统(1)在时刻t_0完全能控的充要条件是：用(12)式所定义的矩阵$H(t_0,t),t\epsilon[t_0,t_\alpha]$行线性无关；即是说，记

$$\mathbf{h}^{(i)}(\cdot)=\begin{pmatrix}h_{i1}(t_0,\cdot)\\\vdots\\h_{ir}(t_0,\cdot)\end{pmatrix},\tag{21}$$

则由系统(1)在t_0完全能控的假设可得到矢量函数$\mathbf{h}^{(1)}(\cdot)$，$\mathbf{h}^{(2)}(\cdot)$，$\cdots$，$\mathbf{h}^{(n)}(\cdot)$是函数空间$\mathbf{H}_p$中的n个线性无关元。

综合上面所述，下述定理得以成立：

定理 1　假设系统(1)在时刻t_0完全能控，则有：$\mathrm{X}_0\epsilon D_{pm}$的充要条件是

$$\frac{1}{L}\leqslant\min_{\sum_{i=1}^{n}c_i\xi_i=1}\|\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\mathbf{h}^{(i)}(\cdot)\|\|_p.\tag{22}$$

这里，D_{pm}是系统(1)关于时间区间$[t_0,t_\alpha]$在控制约束$\|\mathbf{u}\|_p\leqslant L$条件下的最大能控域；

$c_i, i=1,\cdots,n$和$h^{(i)}(\cdot)$分别由式(11)和式(21)所定义。

若记ξ是以$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$为分量的列矢量，并用上角标“′”表示转置，则条件(22)可写成

$$\frac{1}{L}\leqslant \min_{\xi'\mathbf{c}=1}\|H'(t_0,\cdot)\xi\|_p. \tag{23}$$

为了利用定理1求出能控域的一种参数表达式，先证明下面引理：

引理　条件(22)(也即(23))等价于不等式

$$\|H'(t_0,\cdot)\xi\|_p\geqslant\frac{1}{L}\xi'\mathbf{c} \tag{24}$$

对所有满足$\xi'\xi=1$的ξ均成立。

证明　当条件(24)对所有满足$\xi'\xi=1$的ξ成立时，则(24)式对所有满足$\xi'\mathbf{c}=1$的ξ也成立。事实上，对满足$\xi'\mathbf{c}=1$的ξ，只要令

$$\tilde{\xi}=(\xi'\xi)^{-\frac{1}{2}}\xi,$$

便有$\tilde{\xi}'\tilde{\xi}=1$，从而有

$$\|H'(t_0,\cdot)\tilde{\xi}\|_p\geqslant\frac{1}{L}\tilde{\xi}'\mathbf{c}.$$

用正数$(\xi'\xi)^{1/2}$乘不等式两端，不等号的方向不变，于是得

$$\|H'(t_0,\cdot)\xi\|_p\geqslant\frac{1}{L}\xi'\mathbf{c}.$$

从而，

$$\min_{\xi'\mathbf{c}=1}\|H'(t_0,\cdot)\xi\|_p\geqslant\frac{1}{L}$$

即条件(23)成立。

反之，若条件(23)成立，而ξ为满足条件$\xi'\xi=1$的任一矢量，当$\xi'\mathbf{c}\leqslant 0$时，则不等式(24)自然成立；当$\xi'\mathbf{c}=a>0$时，可令

$$\tilde{\xi}=\frac{\xi}{a},$$

则有$\tilde{\xi}'\mathbf{c}=1$，从而由条件(23)便有

$$\|H'(t_0,\cdot)\tilde{\xi}\|_p\geqslant\frac{1}{L}\tilde{\xi}'\mathbf{c}.$$

用a乘不等式两端得：不等式

$$\|H'(t_0,\cdot)\xi\|_p\geqslant\frac{1}{L}\xi'\mathbf{c}$$

对所有满足$\xi'\xi=1$的ξ成立。

至此，引理得证。

现在，可用状态空间R^n中的单位球面Ω_0上的元作参量给出最大能控域D_{pm}的参量表达式。在Ω_0上定义函数

$$K_p(\zeta)=\inf_{\substack{\xi'\xi=1\\ \xi'\zeta>0}}\frac{L}{\xi'\zeta}\|H'(t_0,\cdot)\xi\|_p,\qquad \zeta\in\Omega_0 \tag{25}$$

式中p分别可取1，2，∞。

定理 2 假设系统(1)在t_0时刻完全能控，则系统(1)关于时间区间$[t_0, t_a]$在控制约束$\|u\|_p \leqslant L$条件下的最大能控域D_{pm}为：

$$D_{pm}=\left\{ x_0 \,\middle|\, \|x_0\|_{R^n} \leqslant K_p\left(-\frac{x_0}{\|x_0\|_{R^n}}\right)\right\}. \tag{26}$$

式中，$\|\cdot\|_{R^n}$表示空间R^n中元的欧几里得模。而p分别可取1，2，∞。

证明 根据定理 1 和引理，并注意到$c=-x_0$，可知：$x_0 \in D_{pm}$的充分必要条件是不等式

$$-\frac{1}{L}\xi' x_0 \leqslant \|| H'(t_0,\cdot)\xi \||_p \tag{27}$$

对所有满足$\xi'\xi=1$的ξ成立。

令

$$\zeta=-\frac{x_0}{\|x_0\|_{R^n}}, \tag{28}$$

则有$\zeta \in \Omega_0$，且不等式(27)化为

$$\frac{1}{L}\|x_0\|_{R^n}\xi'\zeta \leqslant \|| H'(t_0,\cdot)\xi \||_p, \tag{29}$$

不等式(29)对所有满足$\xi'\xi=1$的ξ成立的等价条件是：不等式

$$\|x_0\|_{R^n} \leqslant \frac{L}{\xi'\zeta} \|| H'(t_0,\cdot)\xi \||_p$$

对所有满足$\xi'\xi=1$，且$\xi'\zeta>0$的所有ξ成立。从而，$x_0 \in D_{pm}$的充要条件可表示为：

$$\|x_0\|_{R^n} \leqslant \inf_{\substack{\xi'\xi=1 \\ \xi'\xi>0}} \frac{1}{\xi'\zeta} \|| H'(t_0,\cdot)\xi \||_p. \tag{30}$$

于是，根据式(25)，(28)和(30)便得到定理 2 的结论。

此外，还可证明如下论断:

定理 3 假设系统(1)在t_0时刻完全能控，则D_{pm}是R^n中的一个凸闭集，而且D_{pm}关于参数t_a来说，随着t_a的增加，将是单调扩张的。

证明 先证明D_{pm}是一个凸集：设x_{01}和x_{02}均属于D_{pm}，则有：对任意满足$\xi'\xi=1$的ξ成立如下不等式

$$-\frac{1}{L}\zeta' x_{01} \leqslant \|| H'(t_0,\cdot)\xi \||_p, \tag{31}$$

$$-\frac{1}{L}\xi' x_{02} \leqslant \|| H'(t_0,\cdot)\xi \||_p. \tag{32}$$

设a, b为满足$a+b=1$的正数，用a, b分别乘(31)式和(32)式的两端，并将所得结果相加，得:

$$-\frac{1}{L}\xi'(a x_{01}+b x_{02}) \leqslant \|| H'(t_0,\cdot)\xi \||_p$$

对所有满足$\xi'\xi=1$的ξ成立，即有

$$a x_{01}+b x_{02} \in D_{pm},$$

故D_{pm}是凸集。

为了证明D_{pm}是闭集，只须证明D_{pm}的任一个附着点$\tilde{x}_0$，均有$\tilde{x}_0 \in D_{pm}$；用反证法，若$\tilde{x}_0 \bar{\in} D_{pm}$，则由定理2可知

$$\|\tilde{x}_0\|_{R^n} > K_p(\tilde{\zeta}),$$

式中，

$$\tilde{\zeta} = -\frac{\tilde{x}_0}{\|\tilde{x}_0\|_{R^n}}.$$

记$\varepsilon_p = \|\tilde{x}_0\|_{R^n} - K_p(\zeta)$，则有$\varepsilon_p > 0$，于是，若令

$$x_0 = [K_p(\tilde{\zeta}) + \frac{\varepsilon_p}{2}]\tilde{\zeta},$$

则有

$$\|x_0\|_{R^n} = K_p(\tilde{\zeta}) + \frac{\varepsilon_p}{2} > K_p(\tilde{\zeta}),$$

即$x_0 \bar{\in} D_{pm}$；过x_0作凸集D_{pm}的支撑超平面Γ，则由凸集的性质可知[3]：D_{pm}和$\tilde{x}_0$应位于Γ面的两侧。于是，以$\tilde{x}_0$为中心，可作一个半径足够小的开球S，其中不含D_{pm}的点；这与$\tilde{x}_0$是D_{pm}的附着点矛盾。

至于D_{pm}单调扩张的论断可以证明如下：

设$x_0 \in D_{pm}(t_{\alpha 1})$，则存在满足约束条件$\|u\| \leqslant L$的控制$u^*(\cdot) \in L^r_p[t_0, t_{\alpha 1}]$将状态由初态$x(t_0) = x_0$转移至终态$x(t_{\alpha 1}) = 0$；这时，对任意$t_{\alpha 2} > t_{\alpha 1}$，可取

$$u(t) = \begin{cases} u^*(t) & \text{当} \quad t \in [t_0, t_{\alpha 1}], \\ 0 & \text{当} \quad t \in (t_{\alpha 1}, t_{\alpha 2}]; \end{cases}$$

则有$u(\cdot) \in L^r_p[t_0, t_\alpha]$，且$\|u\| \leqslant L$，它将状态由初态$x(t_0) = x_0$转移至$x(t_{\alpha 2}) = 0$，故有$x_0 \in D_{pm}(t_{\alpha 2})$这就证明了$D_{pm}(t_{\alpha 1}) \subset D_{pm}(t_{\alpha 2})$。至此，定里3得证。

定理4 假设系统(1)在t_0时刻完全能控，则D_{2m}是一个以R^n的零点为中心的闭椭球：

$$D_{2m} = \{x_0 \mid x_0' Q x_0 \leqslant 1\}. \tag{33}$$

式中，矩阵Q为：

$$Q = \frac{1}{L^2}\left(\int_{t_0}^{t_\alpha} H(t_0, s) H'(t_0, s) ds\right)^{-1}. \tag{34}$$

证明　根据模$\|\cdot\|_2$的定义，可得

$$\|H'(t_0, \cdot)\xi\|_2 = [\langle H'(t_0, \cdot)\xi, H'(t_0, \cdot)\xi \rangle_{L2}]^{1/2}, \tag{35}$$

式中，$\langle \cdot, \cdot \rangle_{L2}$表示$L^r_2[t_0, t_\alpha]$空间中的内积。

定义算子T如下：

$$T_u = \int_{t_0}^{t_\alpha} H(t_0, s) u(s) ds, \tag{36}$$

易见T是$L^r_2[t_0, t_\alpha] \longrightarrow R^n$的一个连续有界线性算子，且其共轭算子$T^*$为[5]：

$$T^*\xi = H'(t_0,t)\xi,\quad t\in[t_0,t_a],\ \xi\in R^n. \tag{37}$$

从而，式(35)可改写为[4]：

$$\begin{aligned}\|H'(t_0,\cdot)\xi\|_2 &= [<T^*\xi,\ T^*\xi>_{L2}]^{1/2}\\ &= [<\xi,\ TT^*\xi>_{R^n}]^{1/2}\\ &= (\xi' TT^*\xi)^{1/2}.\end{aligned} \tag{38}$$

式中，$<\cdot,\ \cdot>_{R^n}$ 是欧氏空间R^n的内积。

根据式(36)，(37)可导出[5]

$$TT^* = \int_{t_0}^{t_a} H(t_0,s)H'(t_0,s)\,ds. \tag{39}$$

从而，根据定理1和(38)式，可得到：$\mathbf{x}_0\in D_{2m}$的充要条件为不等式

$$(\xi' TT^*\xi)^{1/2} \geqslant \frac{1}{L} \tag{40}$$

对所有满足条件

$$-\xi'\mathbf{x}_0 = 1 \tag{41}$$

的ξ均成立。

由式(34)，(39)可知：

$$Q^{-1} = L^2 TT^*$$

于是，不等式(40)可改写为

$$\xi' Q^{-1}\xi \geqslant 1. \tag{42}$$

根据系统(1)的完全能控性可以证明：[5]

TT^*是正定对称阵，即Q^{-1}是正定对称阵，这时，作为Schwarz不等式的一个推广，可证明

$$(\xi' Q^{-1}\xi)(\xi' Q\xi) \geqslant \xi'\xi. \tag{43}$$

（注：当$Q=E$时，(43)式就是通常所说的Schwarz不等式。）因而，有

$$\begin{aligned}&(\xi' Q^{-1}\xi)(\mathbf{x}_0' Q\mathbf{x}_0)\\ &= (\xi' Q^{-1}\xi)[(-\mathbf{x}_0)' Q(-\mathbf{x}_0)]\\ &\geqslant -\xi'\mathbf{x}_0.\end{aligned} \tag{44}$$

据此，为了使不等式(42)(也即不等式(40))对一切满足$-\xi'\mathbf{x}_0=1$的ξ均成立的充要条件为：不等式

$$\mathbf{x}_0' Q\mathbf{x}_0 \leqslant 1 \tag{45}$$

成立。所以，根据定理1，式(45)是$\mathbf{x}_0\in D_{2m}$的充分且必要的条件。定理4得证。

下面举两个例子，说明上文结果在最优控制理论中的某些应用。

例1．讨论系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u, \tag{46}$$

$t\in[0,\infty]$，控制u受到约束$|u|\leqslant 1$时的最小燃料问题[6]，这时，最优性能指标可表示为：

$$J=\int_0^{\tau}|u(t)|dt. \tag{47}$$

对于终端时刻τ固定的情形来说，正如〔7〕中所作的那样，对于给定的初态

$$x_0=\begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix},$$

首先，必须研究系统(46)将初态x_0转移至零终态所需的最短时间τ_0，然后，再比较指标(47)中的τ与τ_0的大小，只有当$\tau\geqslant\tau_0$时，最小燃料问题才可能有解。

利用本文定理2，可以不必求出最快速的时间τ_0的数值，只须取$t_0=0$，$t_a=\tau$和$L=1$，求出系统(49)的最大能控域$D_{\infty m}$，则当$x_0\in D_{\infty m}$时，上述最小燃料问题可能有解，若$x_0\overline{\in}D_{\infty m}$时，上述最小燃料问题便没有解。

具体可依次算得：

$$\Phi(t,s)=\begin{pmatrix} 1 & t-s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H(0,t)=\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

记参量$\zeta\in\Omega_0$（单位园）为

$$\zeta(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},\quad -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

则可算得

$$K_\infty(\zeta(\theta))=\begin{cases} \dfrac{\tau^2}{2|\cos\theta|}, & |\theta|\leqslant\theta_0,\ |\theta|\geqslant\pi-\theta_0, \\ \dfrac{\tau}{|\sin\theta|}, & \theta_0<|\theta|<\pi-\theta_0; \end{cases}$$

式中，

$$\theta_0=arctg\frac{2}{\tau}.$$

从而，由定理2有

$$D_{\infty m}=\left\{x_0 \,\middle|\, x_0=k\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},\ -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant-k\leqslant K_\infty(\zeta(\theta))\right\} \tag{48}$$

比如，当$x_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$时，可写成$k=-1$，$\theta=\pi$的形式：

$$x_0=-\begin{pmatrix} \cos\pi \\ \sin\pi \end{pmatrix},$$

而不论$\tau>0$为何值，均有

$$K_\infty(\zeta(\pi))=\frac{\tau^2}{2|\cos\pi|}=\frac{\tau^2}{2}$$

于是由(48)式可知，当$\tau<\sqrt{2}$时，关于$\mathbf{x}_0$为初始状态的最小燃料问题无解，只有当$\tau\geqslant\sqrt{2}$时，最小燃料问题才可能有解存在。

例2。讨论系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u\,, \tag{49}$$

$t\in[0,\infty]$，控制u受到约束

$$\int_0^{t_\alpha}|u(t)|^2dt\leqslant 1 \tag{50}$$

时的快速最优控制问题。

这时，可推得系统(49)(50)的最大能控域

$$D_{2m}=\left\{\mathbf{x}_0\,\middle|\,\mathbf{x}_0=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},12x_1^2+12t_\alpha x_1x_2+4t_\alpha^2x_2^2\leqslant t_\alpha^3\right\},$$

根据定理3，当t_α增大时，D_{2m}是单调扩张的，于是，对于任一给定的初度$\mathbf{x}_0=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$，我们可以借助方程

$$12x_1^2+12t_\alpha x_1x_2+4t_\alpha^2x_2^2=t_\alpha^3\,, \tag{51}$$

求出其最小实根$\widetilde{t_\alpha}$，则这个值就是状态由$\mathbf{x}_0$转移至零终态的最快速的时间。

比如，当$\mathbf{x}_0=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ 0\end{pmatrix}$时，方程(51)化为

$$12\times\frac{9}{4}=t_\alpha^3\,,$$

只有唯一的一个实根：

$$t_\alpha=\sqrt[3]{27}=3.$$

于是，系统控制在约束条件(50)之下，系统(49)的状态由初态$\mathbf{x}_0=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ 0\end{pmatrix}$转移至零终态的最快速时间为3个时间单位。

参 考 文 献

〔1〕 A. Fujimoto and y. Uno, Optimal control of linear continuous systems with multiple control constraints, *Intern. J Control*, 52(1977),2.

〔2〕 J. M. Swigeb, *Advancees in Cantrol Systems*, Vol. Ⅱ (Academic press), New York, 1966.

〔3〕 P. Φ. Гаьасов и Φ. M. Кирилова, Оптималзация линейных систем, Цзд—во БГУ, Минск, 1973.

〔4〕 关肇直，泛函分析讲义，高等教育出版社，1959.

〔5〕 关肇直、陈翰馥，綫性控制系统的能控性和能观测性，科学出版社，1975.

〔6〕 M. Athans and P. L. Falb, *Optimal Control*, New York, 1966.

The Controllable Domain of Linear Systems and Some Applications in Optimal Control Problems

Chen Yunfeng Zhao Yi

Abstracts

In this paper the problems of the controllable domain of linear continuous systems with control constraints are discussed. A parametric equation of the controllable domain is derived by using the method of moments, the closed-convexity of the controllable domain is proved and examples of some applications in optimal control problems are given.