关于构造李雅普诺夫函数的微分矩方法(I)

王寿松　　徐远通
（数学力学系）

摘　要

本文对P．J．Ponzo及T．Nagoraja、V．V．Chalam等用微分矩构造李雅普诺夫函数的方法作了改进和推广，具体给出运用微分矩方法的主要步骤，并通过实例说明应用这一方法的优点．

在李雅普诺夫（A．M．Ляпунов）运动稳定性的理论研究和应用中，一个重要的问题是如何构造出满足李雅普诺夫基本定理的V函数，即李雅普诺夫函数。一九六五年，P．J．Ponzo[1]首次提出用非线性高阶微分方程的微分矩（differential moment）构造李雅普诺夫函数。一九七四年，T．Nagoraja和V．V．Chalam[2]对这种方法作了概括和修改，指出微分矩方法是构造李雅普诺夫函数的一个新途径．在本文（Ⅰ）中，我们综合〔1，2〕提出的方法，作了改进，扩大其适用的范围，给出了构造李雅普诺夫函数的具体演算步骤，同时以实例给予示范．从实际计算表明（例2），利用微分矩方法作出的V函数，它所确定的渐近稳定域比J．P．LaSalle[3,4]的著名结果范围更为广泛．

§1　应用微分矩方法的主要步骤

考虑非驻定系统

$$\dot{x}_i = X_i(t, x_1, \cdots, x_n) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.1}$$

这里$\dot{x}_i \equiv \frac{dx_i}{dt}$，$X_i(t, x_1, \cdots, x_n)$对一切$t \geqslant 0$及$x_1, \cdots, x_n$连续，满足解的唯一性条件，且$X_i(t, 0, \cdots, 0) \equiv 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$．

按〔2〕作法（〔2〕及〔1〕都只考虑驻定系统的情形），定义微分矩集如下：

$$m_{ij} = \int_0^t \dot{x}_i (\dot{x}_j - X_j) dt \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.2}$$

对方程组$m_{ij} = 0 \ (i, j = 1, 2, \cdots, n)$作变量代换和分部积分，最后组合出一个关系式，形

如：

$$V(t,x_1,\cdots,x_n)=\int_0^t W(t,x_1,\cdots,x_n)dt \tag{1.3}$$

于是

$$\frac{dV}{dt}=W(t,x_1,\cdots,x_n) \tag{1.4}$$

函数V和W如适合李雅普诺夫基本定理的要求，我们便构造出李雅普诺夫函数$V(t,x_1,\cdots,x_n)$，并同时求得它通过方程组对时间t的全导数。

在应用过程中，我们发现对(1.2)式作变量代换及分部积分，可利用以下关系式

$$\int_0^t x_i(\dot{x}_j-X_j)dt=0 \quad (i,j=1,2,\cdots,n) \tag{1.5}$$

及其线性组合来实现；此外，要得出关系式(1.4)，对于方程组(1.2)或(1.5)只需直接考虑其中的被积函数，即研究以下各关系式及其线性组合：

$$\begin{cases}\dot{x}_i(\dot{x}_j-X_j)=0\\ x_i(\dot{x}_j-X_j)=0 \qquad (i,j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

基于上述分析，我们对微分矩方法作了如下改进：

1．建立"微分矩方程组"

对系统(1.1)一般地可建立n^2个关系式：

$$x_i\dot{x}_j=x_iX_j \quad (i,j=1,2,\cdots,n) \tag{1.6}$$

在很多情况下，也可直接考察如下$\frac{n(n+1)}{2}$个关系式：

$$\begin{cases}x_i\dot{x}_i=x_iX_i\\ x_i\dot{x}_j+x_j\dot{x}_i=x_iX_j+x_jX_i\end{cases} \quad (i,j=1,2,\cdots,n,\ i>j) \tag{1.7}$$

这些关系式在形式上与(1.2)和(1.5)不相同，但它们是改进后微分矩方法的基本关系式，因此称关系式(1.6)和(1.7)为"微分矩方程组"〔注〕。

2．确定组合系数（常数或某些变元的函数）

首先分析微分矩方程组(1.6)或(1.7)右端的每个函数项，划分出如下两类函数：第一类函数是常负的，或可以提出某些条件而成为常负的函数；第二类函数形式为$-F_{ij}^{(k)}(t,x_1,\cdots,x_m)\cdot X_l$，这里$F_{ij}^{(k)}$适合以下等式：

$$F_{ij}^{(k)}\cdot X_l=\frac{d}{dt}\left(\int_0^{x_l}F_{ij}^{(k)}dx_l\right)-L_l\left[F_{ij}^{(k)}\right] \tag{1.8}$$

其中　$$L_l\left[F_{ij}^{(k)}\right]\equiv\int_0^{x_l}\frac{\partial F_{ij}^{(k)}}{\partial t}dx_l+\sum_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^{m}\left(\int_0^{x_l}\frac{\partial F_{ij}^{(k)}}{\partial x_s}dx_l\right)X_s.$$

〔注〕在文(Ⅱ)中，将对"微分矩方程组"的概念作进一步推广。

i,j,m,l 是小于n的某个正整数，$k=1,2,\cdots,n_{ij}$。n_{ij}是相应的微分矩方程出现第二类函数的个数。

然后，利用下列公式

$$\begin{cases} x_i\dot{x}_i=\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}(x_i^2) \\ \dot{x}_i x_j+x_j\dot{x}_i=\dfrac{d}{dt}(x_i x_j) \end{cases} \quad (i,j=1,2,\cdots,n,\ i\neq j) \tag{1.9}$$

结合上述的分析，适当选择一些常数p_{ij}，对微分矩方程组(1.6)或(1.7)进行线性组合，整理得：

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left[\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}p_{ii}x_i^2+p_{ij}x_i x_j+\sum_{\substack{k=1\\1<l<n}}^{n_{ij}}p_{ij}\int_0^{x_l}F_{ij}^{(k)}dx_l\right)\right] \\ &=-W_1(t,x_1,\cdots,x_n)+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\1<l<n}}^{n_{ij}}L_l[F_{ij}^{(k)}] \\ &\equiv W(t,x_1,\cdots,x_n) \end{aligned} \tag{1.10}$$

其中$W_1(t,x_1,\cdots,x_n)$是常正函数。

选择组合系数p_{ij}的方法，可根据系统(1.1)右端的形式，结合观察法或待定系数法，进行组合运算，务求使等式(1.10)两端的函数满足稳定性理论基本定理的要求。例如，如果系统(1.1)的右端只是关于$x_1,x_2,\cdots,x_n$的多项式函数或分离变量型的函数，则可以从关系式(1.7)出发，令组合系数是待定常数$p_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，且$p_{ij}=p_{ji}$，得到

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j=1}^{n}p_{ij}x_i x_j\right)=\sum_{i,j=1}^{n}p_{ij}(x_i X_j+x_j X_i)$$

将上式右端写成具有变系数的二次型，便有

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j=1}^{n}p_{ij}x_i x_j\right)=\sum_{i,j=1}^{n}q_{ij}x_i x_j \tag{1.11}$$

其中q_{ij}一般是$t,x_1,\cdots,x_n$的函数，此时便可利用广义Sylvester条件，并根据稳定性定理的要求确定组合常数p_{ij}。这时，如果要使$V=\sum\limits_{i,j=1}^{n}p_{ij}x_i x_j$是定正的，而$\dot{V}=\sum\limits_{i,j=1}^{n}q_{ij}x_i x_j$是定负或常负，那么可取$p_{ij}=0$ $(i\neq j)$，$p_{ii}>0$，且$q_{ij}=0$ $(i\neq j)$，及$q_{ii}\leqslant -c\leqslant 0$ (c为常数)；或者p_{ij}满足Sylvester条件加上$q_{ij}=0$ $(i\neq j)$，$q_{ii}\leqslant -c\leqslant 0$；或是对$q_{ij}$要求满足广义Sylvester条件等等。从这些关系式中确定出组合常数的具体数值。

确定组合系数是关键性的一个步骤，我们将在本文(Ⅱ)中进行讨论。

3．求出李雅普诺夫函数V及其导数$\dot{V}$

假定通过步骤1和2得到了等式(1.10)，则便有：

$$V(t,x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}p_{ii}x_i^2+p_{ij}x_i x_j+\sum_{\substack{k=1\\1\leq l<n}}^{n_{ij}}p_{ij}\int_0^{x_l}F_{ij}^{(k)}dx_l\right) \tag{1.12}$$

$$\dot{V}(t,x_1,\cdots,x_n)\equiv\frac{dV}{dt}\bigg|_{(1\cdot1)}=W(t,x_1,\cdots,x_n) \tag{1.13}$$

此时，如果函数$V(t,x_1,\cdots,x_n)$满足李雅普诺夫稳定性基本定理，则所求的李雅普诺夫函数V及其通过系统(1.1)对时间t的全导数同时写出，形如(1.12)及(1.13)。如果能提出条件使(1.12)的函数V成为李雅普诺夫函数，比如要求V是定正，W是常负或定负，则我们便给出系统(1.1)的零解$x_1=0$，…，$x_n=0$为稳定的或渐近稳定的条件。

§2 实 例

例1 考虑三阶非驻定系统

$$\dddot{x}+f(t,x,\dot{x})\ddot{x}+g(t,x,\dot{x})\dot{x}+\varphi(t)h(x)=0 \tag{2.1}$$

其中$h(0)=0$，所有函数均属于C^1类。

写出其等价方程组

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_3=-f(t,x_1,x_2)x_3-g(t,x_1,x_2)x_2-\varphi(t)h(x_1)\end{cases} \tag{2.2}$$

(1) 建立微分矩方程组：

$$\begin{cases}x_1\dot{x}_1=x_1x_2\\ x_2\dot{x}_2=x_2x_3\\ x_3\dot{x}_3=-f(t,x_1,x_2)x_3^2-g(t,x_1,x_2)x_2x_3-\varphi(t)h(x_1)x_3\\ x_2\dot{x}_1+x_1\dot{x}_2=x_2^2+x_1x_3\\ x_3\dot{x}_1+x_1\dot{x}_3=x_3x_2-f(t,x_1,x_2)x_1x_3-g(t,x_1,x_2)x_1x_2-\varphi(t)h(x_1)x_1\\ x_3\dot{x}_2+x_2\dot{x}_3=x_3^2-f(t,x_1,x_2)x_2x_3-g(t,x_1,x_2)x_2^2-\varphi(t)h(x_1)x_2\end{cases} \tag{2.3}$$

(2) 确定组合常数：

分析微分矩方程组(2.3)，可以看出第3个和第6个方程右端各函数几乎都是第一、二类函数，因此，可选取$p_{11}=p_{22}=p_{21}=p_{31}=0$，$p_{33}=1$，$p_{32}=a$，其中$a$是某个正数，则得到组合关系式为：

$$x_3\dot{x}_3+a(x_3\dot{x}_2+x_2\dot{x}_3)=-[f(t,x_1,x_2)-a]x_3^2-ag(t,x_1,x_2)x_2^2$$
$$-af(t,x_1,x_2)x_2x_3-g(t,x_1,x_2)x_2x_3-a\varphi(t)h(x_1)x_2-\varphi(t)h(x_1)x_3 \tag{2.4}$$

对(2.4)中右端的第二类函数建立下列等式：

$$\begin{cases} f(t,x_1,x_2)x_2x_3=\dfrac{d}{dt}F(t,x_1,x_2)-\displaystyle\int_0^{x_2}\frac{\partial f}{\partial t}x_2dx_2-[\int_0^{x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}x_2dx_2]x_2, \\ g(t,x_1,x_2)x_2x_3=\dfrac{d}{dt}G(t,x_1,x_2)-\displaystyle\int_0^{x_2}\frac{\partial g}{\partial t}x_2dx_2-[\int_0^{x_2}\frac{\partial g}{\partial x_1}x_2dx_2]x_2, \\ \varphi(t)h(x_1)x_2=\dfrac{d}{dt}[\varphi(t)H(x_1)]-\varphi'(t)H(x_1), \\ \varphi(t)h(x_1)x_3=\dfrac{d}{dt}[\varphi(t)h(x_1)x_2]-\varphi(t)h'(x_1)x_2^2-\varphi'(t)h(x_1)x_2. \end{cases} \tag{2.5}$$

其中

$$F(t,x_1,x_2)=\int_0^{x_2}f(t,x_1,x_2)x_2dx_2,$$

$$G(t,x_1,x_2)=\int_0^{x_2}g(t,x_1,x_2)x_2dx_2.$$

$$H(x_1)=\int_0^{x_1}h(x_1)dx_1$$

将(2.5)代入(2.4)即得到

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}x_3^2+ax_2x_3+aF(t,x_1,x_2)+G(t,x_1,x_2)+\varphi(t)h(x_1)x_2+a\varphi(t)H(x_1)] \\ &=-[ag(t,x_1,x_2)-\varphi(t)h'(x_1)-\frac{a}{x_2}\int_0^{x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}x_2dx_2-\frac{1}{x_2}\int_0^{x_2}\frac{\partial g}{\partial x_1}x_2dx_2]x_2^2 \\ &+[a\varphi'(t)H(x_1)+\varphi'(t)h(x_1)x_2+a\int_0^{x_2}\frac{\partial f}{\partial t}x_2dx_2+\int_0^{x_2}\frac{\partial g}{\partial t}x_2dx_2] \\ &-[f(t,x_1,x_2)-a]x_3^2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

(3) 求出李雅普诺夫函数V及其导数$\dot{V}$：

如果我们给出如下假设条件：

1) $f(t,x_1,x_2)\geqslant a>0$；

2) $g(t,x_1,x_2)\geqslant b>0$；

3) $0<h'(x_1)\leqslant c$；

4) $0<\alpha\leqslant\varphi(t)\leqslant\beta$；

5) $ab\alpha-c\beta^2>\dfrac{a\alpha}{x_2}\displaystyle\int_0^{x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}x_2dx_2+\frac{\alpha}{x_2}\int_0^{x_2}\frac{\partial g}{\partial x_1}x_2dx_2\geqslant0$；

6) $a\varphi'(t)H(x_1)+\varphi'(t)h(x_1)x_2+a\displaystyle\int_0^{x_2}\frac{\partial f}{\partial t}x_2dx_2+\int_0^{x_2}\frac{\partial g}{\partial t}x_2dx_2\leqslant0$.

其中 a,b,c,α,β 是正数，那么从(2.6)便得出所求的李雅普诺夫函数V及其通过方程组(2.2)对t的全导数$\dot{V}$：

$$V(t,x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{2}x_3^2+ax_2x_3+aF(t,x_1,x_2)+G(t,x_1x_2)+\varphi(t)h(x_1)x_2+a\varphi(t)H(x_1)$$

$$\begin{aligned}\dot{V}=&-[f(t,x_1,x_2)-a]x_3^2-[ag(t,x_1,x_2)-\varphi(t)h'(x_1)-\frac{a}{x_2}\int_0^{x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}x_2dx_2 \\ &-\frac{1}{x_2}\int_0^{x_2}\frac{\partial g}{\partial x_1}x_2dx_2]x_2^2+[a\varphi'(t)H(x_1)+\varphi'(t)h(x_1)x_2\end{aligned}$$

$$+a\int_0^{x_2}\frac{\partial f}{\partial t}x_2dx_2+\int_0^{x_2}\frac{\partial g}{\partial t}x_2dx_2]。$$

事实上，由假设条件推出：

$$F(t,x_1,x_2)\geqslant\frac{a}{2}x_2^2,$$

$$G(t,x_1,x_2)\geqslant\frac{b}{2}x_2^2,$$

$$h^2(x_1)=2\int_0^{x_1}h(x_1)h'(x_1)dx_1\leqslant 2cH(x_1)。$$

因而

$$V(t,x_1,x_2,x_3)\geqslant\frac{1}{2}x_3^2+ax_2x_3+\frac{a^2}{2}x_2^2+\frac{b}{2}x_2^2-\beta\sqrt{2cH(x_1)}|x_1|+a\alpha H(x_1)。$$

或写为

$$V(t,x_1,x_2,x_3)\geqslant\frac{1}{2}(ax_2+x_3)^2+\frac{a\alpha c}{2}\left[\sqrt{\frac{2H(x_1)}{c}}-\frac{\beta}{a\alpha}|x_2|\right]^2+\frac{a\alpha b-c\beta^2}{2a\alpha}x_2^2$$

可见V是定正函数。

另外注意到

$$ab-\beta c\geqslant\frac{1}{\alpha}(ab\alpha-c\beta^2)>0$$

故可知$\dot{V}$为常负的。此时(2.2)零解是稳定的。

如果讨论驻定系统情形，则第6)条件自然成立，第4)条件不复存在，而第5)条件可改为：

$$ab-c>\frac{a}{x_2}\int_0^{x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}x_2dx_2+\frac{1}{x_2}\int_0^{x_2}\frac{\partial g}{\partial x_1}x_2dx_2\geqslant 0$$

这即是[1]中的结果，此时(2.2)零解是全局渐近稳定的。

例2 考虑二阶方程

$$\ddot{x}+a\dot{x}+bx+cx^2=0 \tag{2.7}$$

其中a、b、c均为正数，$c=3$的情形已由J.P.LaSalle[3,4]详细讨论，

现写出(2.7)的等价方程组：

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-ay-bx-cx^2\end{cases} \tag{2.8}$$

显然，在(x,y)平面上，(2.8)有两个临界点(0,0)和$(-\frac{b}{c},0)$且通过一次近似方程可以判断原点(0,0)是渐近稳定，而点$(-\frac{b}{c},0)$是不稳定的鞍点。

这里我们应用微分矩方法，对(2.8)作几个不同的李雅普诺夫函数，进而通过计算检验寻求一个比较理想的李雅普诺夫函数，以确定原点(0,0)尽可能大的吸引域。

首先写出(2.8)的微分矩方程组：

$$
\begin{cases}
x\dot{x} = xy \\
y\dot{y} = -ay^2 - bxy - cx^2y \\
x\dot{y} + y\dot{x} = -axy - bx^2 - cx^3 + y^2
\end{cases}
\tag{2.9}
$$

1）对(2.9)取组合常数$p_{11}=0$，$p_{21}=0$，$p_{22}=1$，得：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}y^2\right) = -ay^2 - bxy - cx^2y$$

其中右端的第二类函数为

$$
\begin{cases}
-bxy = -bx\dot{x} = -\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{b}{2}x^2\right), \\
-cx^2y = -cx^2\dot{x} = -\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{3}cx^3\right),
\end{cases}
\tag{2.10}
$$

因而得到

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}y^2 + \frac{b}{2}x^2 + \frac{c}{3}x^3\right] = -ay^2,$$

故可取

$$V_1 = \frac{1}{2}y^2 + \left(\frac{b}{2} + \frac{c}{3}x\right)x^2, \qquad \dot{V}_1 = -ay^2.$$

2）对(2.9)取组合常数$p_{11}=a^2$，$p_{21}=a$，$p_{22}=1$，得：

$$a^2x\dot{x} + a(x\dot{y} + y\dot{x}) + y\dot{y} = -a(b+cx)x^2 - bxy - cx^2y$$

再利用第二类函数的公式(2.10)即得

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(ax+y)^2 + \frac{b}{2}x^2 + \frac{c}{3}x^3\right] = -a(b+cx)x^2,$$

故又得到

$$V_2 = \frac{1}{2}(ax+y)^2 + \left(\frac{b}{2} + \frac{c}{3}x\right)x^2, \qquad \dot{V}_2 = -a(b+cx)x^2.$$

3）对(2.9)取组合常数$p_{11}=a^2$，$p_{21}=a$，$p_{22}=2$，得：

$$a^2x\dot{x} + a(x\dot{y} + y\dot{x}) + 2y\dot{y} = -a[y^2 + (b+cx)x^2] - 2(bx+cx^2)y$$

同样对函数$-2(bx+cx^2)y$利用公式(2.10)，得：

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{a}{2}x+y\right)^2 + \frac{a^2}{4}x^2 + \left(b + \frac{2c}{3}x\right)x^2\right] = -a[y^2 + (b+cx)x^2],$$

又可得到：

$$V_3 = \left(\frac{a}{2}x+y\right)^2 + \left(\frac{a^2}{4} + b + \frac{2c}{3}x\right)x^2, \qquad \dot{V}_3 = -a[y^2 + (b+cx)x^2],$$

显然，当$x > -\dfrac{b}{c} > -\dfrac{3b}{2c}$时$V_1$，$V_2$，$V_3$都是定正函数，而$\dot{V}_1$，$\dot{V}_2$常负，$\dot{V}_3$定负。同时，集合

$$\{(x,y)\,|\,\dot{V}_1 = 0\} = \{(x,y)\,|\,y = 0\}$$

$$\{(x,y)|\dot{V}_2=0\}=\{(x,y)|x=0\}$$

都不可能包含(2.8)除零解以外的任何正半轨，故由V_1，V_2，V_3均可以判定(2.8)零解渐近稳定。

根据J. P. LaSalle及S. Lefschetz专著[4]中的一个定理，如果对某个正数K_i，在由$V_i(x,y)<K_i$所确定的域Ω_i内，$V_i(x,y)$定正，$\dot{V}_i$定负或者常负而在集合$\{(x,y)|\dot{V}_i=0\}$内没有除原点以外的其它轨线，则Ω_i便是零解$x=y=0$的一个渐近稳定域。现利用上述三个函数V_i来确定零解的渐近稳定域，并比较其范围的大小。

由于(2.8)有一个不稳定的鞍点$P(-\frac{b}{c},0)$，因此必须使Ω_i不含有P点，即取边界线为

$$V_i(x,y)=K_i$$

使其含有点P，于是求得

$$K_i=V_i(x,y)\Big|_{(-\frac{b}{c},0)}$$

从而分别得出三个不同的渐近稳定域如下：

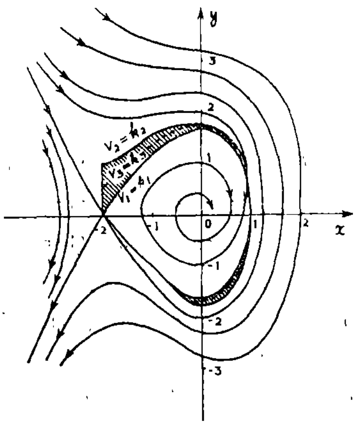
$$\Omega_1:\begin{cases}(b+\frac{2c}{3}x)x^2+y^2<\frac{b^3}{3c^2},\\ x>-\frac{b}{c};\end{cases}$$

$$\Omega_2:\begin{cases}(b+\frac{2c}{3}x)x^2+(ax+y)^2<\frac{b^2}{c^2}(a^2+\frac{b}{3})\\ x>-\frac{b}{c};\end{cases}$$

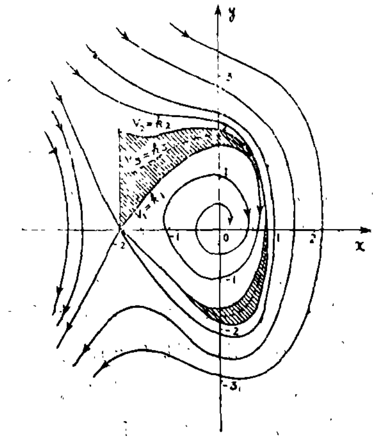
$$\Omega_3:\begin{cases}(\frac{a^2}{4}+b+\frac{2c}{3}x)x^2+(\frac{a}{2}x+y)^2<\frac{b^2}{c^2}(\frac{a^2}{2}+\frac{b}{3})\\ x>-\frac{b}{c}.\end{cases}$$

从$V_i(x,y)$ $(i=1,2,3)$的形式可以看出，V_1不依赖于a，它就是LaSalle[3,4]所采用的李雅普诺夫函数。而V_2和V_3都包含有a，显然V_2和V_3多一个参数a，因此比V_1更广泛些，而$a\to0$时，$V_2\to V_1$，$V_3\to V_1$。根据实际计算表明，当a比较小时，Ω_2，Ω_3与Ω_1之间差别不太明显（见图一、二），但当a比较大时，它们之间的差距就很突出了(见图四)。同时，从三个函数所确定的渐近稳定域来看，V_2是比较好的。

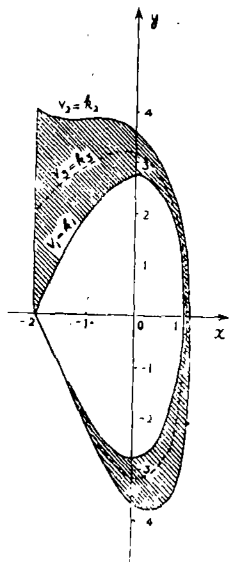
最后顺便指出，如果对方程(2.7)取不同于(2.8)的其它等价方程组，还可以用微分矩方法作出其它各种形式的李雅普诺夫函数。



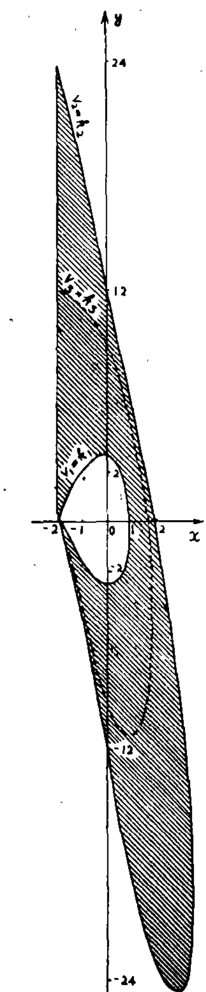
图一 $\ddot{x}+\frac{1}{4}\dot{x}+2x+x^2=0$



图二 $\ddot{x}+\frac{1}{2}\dot{x}+2x+x^2=0$



图三 $\ddot{x}+\dot{x}+6x+3x^2=0$



图四 $\ddot{x}+6\dot{x}+6x+3x^2=0$

〔注〕图中阴影部分表示Ω_2大于Ω_1的范围；
箭头表示轨线的走向；
阴影内虚线表示曲线$V_3(x,y)=k_3$

参考文献

〔1〕 Ponzo, P. J., On the stability of certain nonlinear differential equations, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC—10 (1965), 4, 470~472.

〔2〕 Nagoraja, T., Chalam, V. V., Generation of Lyapunov function-a new approach, *International Journal of Control*, 19 (1974), 4, 781~787.

〔3〕 LaSalle, J. P., Some extensions of Liapunov's second method, IRE Transactions on circuit theory, CT—7 (1960), 4, 520~527.

〔4〕 LaSalle, J. P., Lefschetz, S., *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications*, Academic Press, New York-London, (1961).

On the Method for Constructing Liapunov's Functions by Differential Moment (I)

Wang Shousong Xu Yuantong

Abstract

In this paper we summarize the methods of P. J. Ponzo, T. Nagoraja and V.V. Chalam for constructing Liapunov's functions by differential moment, and give some improvements and extensions.

For the nonautonomous system

$$\dot{x}_i = X_i(t, x_1, \cdots, x_n) \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

the main procedures of applying this method are:

(1) writing out the differential moment's equations,

(2) determining the combination coefficients,

(3) calculating the Liapunov's function and its derivative.

The examples of some applications are given.