关于构造李雅普诺夫函数的微分矩方法(II)

王寿松　徐远通

(数学力学系)

摘　要

本文对用微分矩方法构造李雅普诺夫函数提出各种充分性条件，具体解决了确定组合系数的问题，各定理为实际应用提供了明确的运算法则.

本文继续文[1]的工作，对几类不同的方程研究如何用微分矩方法构造李雅普诺夫函数，着重讨论如何选择组合微分矩方程的各种系数，并用实例说明它在应用上的方便之处.

§1. 构造二次型的李雅普諾夫函数

考虑非驻定系统

$$\dot{x}_i = X_i(t, x_1, \cdots, x_n), \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1.1}$$

这里$\dot{x}_i \equiv \frac{dx_i}{dt}$，$X_i(t,x_1,\cdots,x_n)$对一切$t\geqslant 0$ 及 $x_1,\cdots,x_n$连续，满足解的唯一性条件，$X_i(t,0,\cdots,0)\equiv 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

对于微分矩方程组

$$\begin{cases} x_i \dot{x}_i = x_i X_i, \\ x_i \dot{x}_j + x_j \dot{x}_i = x_i X_j + x_j X_i, \end{cases} \qquad (i,j=1,2,\cdots,n; i>j) \tag{1.2}$$

如果能选择适当的组合系数，使其右端组合成为文[1]所说的第一类函数，那么可构造出二次型的李雅普诺夫函数.

定理1.1　如果对于某个整数$l(1\leqslant l\leqslant n)$，存在$n$个正实数$p_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 和 $n-1$个实数 $p_{li}(i=1,2,\cdots,n,\ i\neq l)$，满足$p_{ll}>\sum\limits_{i=1,i\neq l}^{n}\frac{p_{li}^2}{p_{ii}}$，组合微分矩方程组(1.2)右端，得

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ii} x_i X_i + \sum_{i=1, i\neq l}^{n} p_{li}(x_i X_l + x_l X_i) = W(t, x_1, \cdots, x_n) \tag{1.3}$$

其中$W(t,x_1,\cdots,x_n)$是常负函数，那么，这些实数便是(1.2)的组合系数，可作出二次

型的李雅普诺夫函数为

$$V=\frac{1}{2}\sum_{i=1,i\neq l}^{n}p_{ii}(x_i+\frac{p_{li}}{p_{ii}}x_l)^2+\frac{1}{2}(p_{ll}-\sum_{i=1,i\neq l}^{n}\frac{p_{li}^2}{p_{ii}})x_l^2 \qquad (1.4)$$

它通过方程组(1.1)对t的全导数为

$$\dot{V}=W(t,x_1,\cdots,x_n).$$

〔证〕 由(1.3)得

$$W(t,x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}p_{ii}x_i\dot{x}_i+\sum_{i=1,i\neq l}^{n}p_{li}(x_i\dot{x}_l+x_l\dot{x}_i) \qquad (1.5)$$

利用关系式：$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}x_i^2=x_i\dot{x}_i$，$\frac{d}{dt}(x_ix_l)=x_i\dot{x}_l+x_l\dot{x}_i$，则(1.5)右端进一步化为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}p_{ii}x_i^2+\sum_{i=1,i\neq l}^{n}p_{li}x_ix_l\right)$$

$$=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1,i\neq l}^{n}p_{ii}(x_i+\frac{p_{li}}{p_{ii}}x_l)^2+\frac{1}{2}(p_{ll}-\sum_{i=1,i\neq l}^{n}\frac{p_{li}^2}{p_{ii}})x_l^2\right]$$

即得

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1,i\neq l}^{n}p_{ii}(x_i+\frac{p_{li}}{p_{ii}}x_l)^2+\frac{1}{2}(p_{ll}-\sum_{i=1,i\neq l}^{n}\frac{p_{li}^2}{p_{ii}})x_l^2\right]=W(t,x_1,\cdots,x_n) \qquad (1.6)$$

注意到 $p_{ll}>\sum_{i=1,i\neq l}^{n}\frac{p_{li}^2}{p_{ii}}$，故取(1.4)形式的$V$函数，则$V$是定正函数，而且由(1.6)知

$$\dot{V}=W(t,x_1,\cdots,x_n)$$

而$W(t,x_1,\cdots,x_n)$是常负函数，可见V是二次型的李雅普诺夫函数。定理得证。

定理1.2* 如果存在n组非零实数$p_{11}^{(1)}$和$p_{ij}^{(s)}$（$i\leqslant j\leqslant s$；$i,j=1,2,\cdots,n$；$s=2,3,\cdots,n$）满足等式

$$[p_{ij}^{(s)}]^2=p_{ii}^{(s)}\cdot p_{jj}^{(s)}$$

组合微分矩方程组(1.2)右端，得：

$$[p_{11}^{(1)}]^2x_1X_1+\sum_{s=2}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{s}[p_{ii}^{(s)}]^2x_iX_i+\sum_{i,j=1,i<j}^{s}[p_{ij}^{(s)}]^2(x_iX_j+x_jX_i)\right\}$$

$$=W(t,x_1,\cdots,x_n) \qquad (1.7)$$

其中$W(t,x_1,\cdots,x_n)$是常负函数，那么这些实数便是(1.2)的组合系数，有二次型李雅普诺夫函数为

---

* 为方便起见，定理1.2及其推论所给出的V函数是按变元顺序先后出现平方项的。在实际应用时，不一定按这种次序，可适当选取变元x_l代替x_1，以x_K代替x_2等等

$$V=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{s}p_{ii}^{(s)}x_i\right]^2 \tag{1.8}$$

它通过方程组(1.1)对 t 的全导数为

$$\dot{V}=W(t,x_1,\cdots,x_n)$$

〔证〕 实际上，由(1.7)有

$$\begin{aligned}W(t,x_1,\cdots,x_n)&=[p_{11}^{(1)}]^2x_1\dot{x}_1+\sum_{s=2}^{n}\Big\{\sum_{i=1}^{s}[p_{ii}^{(s)}]^2x_i\dot{x}_i\\&\quad+\sum_{i,j=1}^{s}[p_{ij}^{(s)}]^2(x_i\dot{x}_j+x_j\dot{x}_i)\Big\}\\&=\frac{d}{dt}\Big\{\frac{1}{2}[p_{11}^{(1)}x_1]^2+\frac{1}{2}\sum_{s=2}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{s}[p_{ii}^{(s)}x_i]^2\\&\quad+2\sum_{\substack{i,j=1\\i<j}}^{s}[p_{ii}^{(s)}x_i][p_{jj}^{(s)}x_j]\Big)\Big\}\\&=\frac{d}{dt}\Big\{\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{s}p_{ii}^{(s)}x_i\Big)^2\Big\}.\end{aligned}$$

因而易知(1.8)是定正的李雅普诺夫函数．定理得证．

推论 如果存在n组实数$p_{is}\neq0(i=1,2,\cdots,s;s=1,2,\cdots n)$使得组合微分矩方程 组右端得到

$$(\sum_{i=1}^{s}p_{is}x_i)(\sum_{i=1}^{s}p_{is}X_i)=W_s(t,x_1,\cdots,x_n)\quad(s=1,2,\cdots,n)$$

其中$W_s(t,x_1,\cdots,x_n)$是常负函数，那么可作出二次型李雅普诺夫函数

$$V=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}[\sum_{i=1}^{s}p_{is}x_i]^2$$

它通过方程组(1.1)对t的全导数为

$$\dot{V}=\sum_{s=1}^{n}W_s(t,x_1,\cdots,x_n)$$

下面用例子说明上述定理的应用．

例 考虑方程

$$\dddot{x}+a(t)(\dot{x}+\ddot{x})^3+\ddot{x}+2\dot{x}+x=0 \tag{1.9}$$

其中$a(t)$是$t\geq0$的连续正值函数

(1.9)的等价方程组及其微分矩方程组分别为：

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\\dot{y}=z\\\dot{z}=-a(t)(y+z)^3-x-2y-z\end{cases} \tag{1.10}$$

$$\begin{cases} x\dot{x}=xy \\ y\dot{y}=yz \\ z\dot{z}=-a(t)z(y+z)^3-xz-2yz-z^2 \\ x\dot{y}+y\dot{x}=xz+y^2 \\ y\dot{z}+z\dot{y}=-a(t)y(y+z)^3-xy-2y^2+z^2-yz \end{cases}$$

选取 $p_{11}=\frac{1}{3}$，$p_{22}=1$，$p_{33}=\frac{1}{3}$，$p_{21}=\frac{1}{3}$，$p_{23}=\frac{1}{3}$，得：

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{(x+y)^2+(y+z)^2+y^2}{6}\right]=\frac{1}{3}x\dot{x}+y\dot{y}+\frac{1}{3}z\dot{z}+\frac{1}{3}(x\dot{y}+y\dot{x})+\frac{1}{3}(y\dot{z}+z\dot{y})$$
$$=-\frac{1}{3}[a(t)(y+z)^4+y^2]$$

因此取 $V=\frac{1}{6}[(x+y)^2+(y+z)^2+y^2]$作为李雅普诺夫函数，可知方程组（1.10）零解稳定。而对于如下形式的方程

$$\dddot{x}+(mn+1)\ddot{x}+(m^2+1)\dot{x}+a(t)(x+\dot{x}+\ddot{x})^{2k-1}=0$$

$(m>n>0$，k是正整数，$a(t)$是正值连续函数$)$引进变换 $\dot{x}=y$，$\ddot{x}=z$，写出其等价方程组及相应微分矩方程组后组合其右端，有：

$$(x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z})+(x\dot{z}+z\dot{x})+(y\dot{z}+z\dot{y})+(x\dot{y}+y\dot{x})+m^2x\dot{x}+n^2y\dot{y}+mn(x\dot{y}+y\dot{x})$$
$$=-a(t)(x+y+z)^{2k}-m(m-n)y^2-mnz^2-(m^2-n^2+mn)yz$$

注意到：$(m^2-n^2+mn)\,y\dot{y}=(m^2-n^2+mn)yz$，于是有

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}[(x+y+z)^2+(mx+ny)^2+(m^2-n^2+mn)y^2]\right\}$$
$$=-a(t)(x+y+z)^{2k}-m(m-n)y^2-mnz^2$$

因此取 $V=\frac{1}{2}[(x+y+z)^2+(mx+ny)^2+(m^2-n^2+mn)y^2]$作为李雅普诺夫函数，同样可知上述方程零解稳定。

§2．构造二次型加积分项的李雅普諾夫函数

当微分矩方程组(1.2)的右端可以组合成文〔1〕提出的第一类和第二类函数时，那么，可以考虑构造二次型加积分项的李雅普诺夫函数。

定理2.1　如果对于整数$l(1\leqslant l\leqslant n)$存在$n$个正数$p_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$和$n-1$个实数$p_{li}(i=1,2,\cdots,n,i\neq l)$组合微分矩方程组(1.2)右端，得

$$\sum_{i=1}^{n}p_{ii}x_iX_i+\sum_{i=1,i\neq l}^{n}p_{li}(x_iX_l+x_lX_i)=W(t,x_1,\cdots,x_n)-F(x_l)X_l \tag{2.1}$$

其中$W(t,x_1,\cdots,x_n)$是常负函数，$F(x_l)$仅是含x_l的连续函数，且满足

$$\frac{F(x_l)}{x_l} > \sum_{i=1,i\neq l}^{n} \frac{p_{li}^2}{p_{ii}} - p_{ll}$$

那么可作出二次型加积分项的李雅普诺夫函数

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1,i\neq l}^{n} p_{ii}\left(x_i + \frac{p_{li}}{p_{ii}} x_l\right)^2 + \int_0^{x_l} \left[\left(p_{ll} - \sum_{i=1,i\neq l}^{n} \frac{p_{li}^2}{p_{ii}}\right) + \frac{F(\xi)}{\xi}\right] \xi d\xi \quad (2.2)$$

它通过方程组(1.1)对t的全导数为

$$\dot{V} = W(t, x_1, \cdots, x_n)$$

〔证〕 由(2.1),可得

$$W(t,x_1,\cdots,x_n) = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1,i\neq l}^{n} p_{ii}\left(x_i + \frac{p_{li}}{p_{ii}} x_l\right)^2 + \left(p_{ll} - \sum_{i=1,i\neq l}^{n}\frac{p_{li}^2}{p_{ii}}\right)x_l^2\right]\right\} + F(x_l)\dot{x}_l$$

注意到 $\frac{d}{dt}\left[\int_0^{x_l} F(\xi)d\xi\right] = F(x_l)\dot{x}_l$,因此

$$W(t,x_1,\cdots,x_n) = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1,i\neq l}^{n} p_{ii}\left(x_i + \frac{p_{li}}{p_{ii}} x_l\right)^2 + \int_0^{x_l}\left[\left(p_{ll} - \sum_{i=1,i\neq l}^{n}\frac{p_{li}^2}{p_{ii}}\right) + \frac{F(\xi)}{\xi}\right]\xi d\xi\right\}$$

可见(2.2)是定正的李雅普诺夫函数。定理得证。

定理2.2 如果存在$n-1$组非零实数$p_{ik}(i=1,2,\cdots,k+1, k=1,2,\cdots,n-1)$，组合微分矩方程组(1.2)右端得：

$$\sum_{i=1}^{k+1} p_{ik} x_k X_i = F_k(x_k)x_k \quad (k=1,2,\cdots,n-1) \quad (2.3)$$

其中$F_k(x_k)x_k$是定正函数，而且

$$\frac{1}{x_k}\left(\sum_{i=1}^{k+1} p_{ik}x_i + X_k\right) \leqslant 0 \quad (x_k \neq 0)$$

那么可作出二次型加积分项的李雅普诺夫函数

$$V = \sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{k+1} p_{ik}x_i\right)^2 + \int_0^{x_k} F_k(\xi)d\xi\right] \quad (2.4)$$

它通过方程组(1.1)对t的全导数为

$$\dot{V} = \sum_{k=1}^{n-1} F_k(x_k)\left(\sum_{i=1}^{k+1} p_{ik}x_i + X_k\right)$$

〔证〕 首先注意

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^{x_k} F_k(\xi)d\xi\right] = F_k(x_k)X_k \quad (k=1,2,\cdots,n-1) \quad (2.5)$$

计及 $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{k+1} p_{ik}x_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{k+1} p_{ik}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1} p_{ik}X_i\right)$,由(2.3)有

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{k+1} p_{ik}x_i\right)^2\right] = F_k(x_k)\left(\sum_{i=1}^{k+1} p_{ik}x_i\right) \quad (k=1,2,\cdots,n-1) \quad (2.6)$$

将(2.5)及(2.6)的$n-1$个关系式相加，便得到

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{k+1}p_{ik}x_i\right)^2+\int_0^{x_k}F_k(\xi)d\xi\right]\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}F_k(x_k)\cdot\left(\sum_{i=1}^{k+1}p_{ik}x_i+X_k\right)$$

由已知条件有

$$\sum_{k=1}^{n-1}F_k(x_k)\cdot\left(\sum_{i=1}^{k+1}p_{ik}x_i+X_k\right)\leqslant 0$$

可见(2.4)是定正的李雅普诺夫函数。定理得证。

例　考虑方程

$$x^{(IV)}+ax^{(III)}+bx^{(II)}+\varphi(\dot{x})+cx=0$$

其中$a>0,b>0,c>0,b^2-4c>0$且$\frac{1}{2}ab<\frac{\varphi(y)}{y}<\frac{1}{2}a\left(b+\sqrt{b^2-4c}\right)$。

其等价方程组为

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=z\\ \dot{z}=u\\ \dot{u}=-au-bz-\varphi(y)-cx\end{cases}$$

研究微分矩方程组

$$\begin{cases}x\dot{x}=xy\\ y\dot{y}=yz\\ z\dot{z}=zu\\ u\dot{u}=-au^2-bzu-\varphi(y)u-cxu\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\dot{y}+y\dot{x}=xz+y^2\\ x\dot{z}+z\dot{x}=xu+yz\\ y\dot{z}+z\dot{y}=yu+z^2\\ y\dot{u}+u\dot{y}=-auy-bzy-\varphi(y)y-cxy+uz\\ z\dot{u}+u\dot{z}=-auz-bz^2-\varphi(y)z-cxz+u^2\end{cases}$$

先取 $p_{44}^{(1)}=1$，$p_{33}^{(1)}=a^2$，$p_{22}^{(1)}=b^2$ 及 $p_{44}^{(2)}=1$，便有 $p_{43}^{(1)}=\sqrt{1\times a^2}=a$，$p_{42}^{(1)}=\sqrt{1\times b^2}=b$，$p_{32}^{(1)}=\sqrt{a^2\times b^2}=ab$。

其次取 $p_{33}^{(3)}=b$，$p_{31}^{(3)}=2c$，便有 $p_{11}^{(3)}=\frac{(2c)^2}{b}=\frac{4c^2}{b}$。于是，得出：

$$2u\dot{u}+(a^2+b)z\dot{z}+b^2y\dot{y}+a(u\dot{z}+\dot{u}z)+ab(y\dot{z}+\dot{y}z)+b(u\dot{z}+\dot{u}z)+2c(x\dot{z}+\dot{x}z)$$

$$+\frac{4c^2}{b}x\dot{x}=-(bc-\frac{4c^2}{b})xy-acxz+2cyz-2\varphi(y)u-a\varphi(y)z-b\varphi(y)y-au^2$$

最后，取 $p_{11}^{(4)}=(bc-\frac{4c^2}{b})$，$p_{12}^{(4)}=ac$，$p_{22}^{(4)}=-2c$，那么

$$(bc-\frac{4c^2}{b})x\dot{x}+ac(x\dot{y}+\dot{x}y)-2cy\dot{y}=(bc-\frac{4c^2}{b})xy+acxz+acy^2-2cyz$$

综合上述两式，最后可得：

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{bc}{2}x^2+\frac{b^2-2c}{2}y^2+\frac{a^2+b}{2}z^2+u^2+auz+buy+2cxz+abyz+acxy+a\int_0^y\varphi(y)dy\right]$$

$$=-\frac{1}{a}\left\{ab\frac{\varphi(y)}{y}-[\frac{\varphi(y)}{y}]^2-a^2c\right\}y^2-\frac{1}{a}[\varphi(y)+au]^2$$

因此，取二次型加积分项函数

$$V=\frac{bc}{2}x^2+\frac{b^2-2c}{2}y^2+\frac{a^2+b}{2}z^2+u^2+auz+buy+2cxz+abyz+acxy+a\int_0^y\varphi(y)dy$$

按所给条件即可推知V是李雅普诺夫函数。这正是Огурцов[2]中所采用过的函数。

要指出的是，为了构造李雅普诺夫函数，对方程的等价组应选取适当形式以利运算。如考察方程

$$\dddot{x}+a\ddot{x}+b\dot{x}+f(x)=0$$

($f(x)$为连续函数，$f(0)=0$，$a>0$，$0<\frac{f(x)}{x}<ab$)，作以下等价方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=y-ax\\ \dot{y}=z-bx\\ \dot{z}=-f(x)\end{cases}$$

记$\Delta_1=x$，$\Delta_2=\begin{vmatrix}x & -1\\ y & -a\end{vmatrix}$，$\Delta_3=\begin{vmatrix}x & -1 & 0\\ y & -a & -1\\ z & -b & -a\end{vmatrix}$，则有

$$\dot{\Delta}_1=\Delta_2,\quad \dot{\Delta}_2=\Delta_3,\quad \dot{\Delta}_3=-a\Delta_3-b\Delta_2-f(\Delta_1)$$

对上述关系式作"微分矩方程组"如下：

$$\begin{cases}\Delta_2\dot{\Delta}_2=\Delta_2\Delta_3\\ \Delta_3\dot{\Delta}_3=-a\Delta_3^2-b\Delta_2\Delta_3-f(\Delta_1)\Delta_3\end{cases}$$

于是有：

$$b\Delta_2\dot{\Delta}_2+\Delta_3\dot{\Delta}_3=-a[\Delta_3+\frac{f(\Delta_1)}{a}]^2-af(\Delta_1)\dot{\Delta}_1-bf(\Delta_1)\Delta_1+f(\Delta_1)z+\frac{f^2(\Delta_1)}{a}$$

利用 $f(\Delta_1)=-\dot{z}$，得出：

$$\frac{d}{dt}[\frac{b}{2}\Delta_2^2+\frac{1}{2}\Delta_3^2+\frac{1}{2}z^2+a\int_0^x f(x)dx]=-a[\Delta_3+\frac{f(x)}{a}]^2-\frac{f(x)}{a}[abx-f(x)]$$

因此，取李雅普诺夫函数为：

$$V=\frac{b}{2}(y-ax)^2+\frac{1}{2}[(a^2-b)x-ay+z]^2+\frac{1}{2}z^2+a\int_0^x f(x)dx$$

则
$$\dot{V}=-a[(a^2-b)x-ay+z+\frac{f(x)}{a}]^2-\frac{f(x)}{a}[abx-f(x)]$$

上述函数V便是J. O. C. Ezeilo〔3〕中所采用的函数。

§3．构造广义二次型加积分项的李雅普诺夫函数

本节考虑构造形式上更广泛的一类李雅普诺夫函数，其二次项是某些函数的平方形式。

定理3.1　如果存在具有连续一阶偏导数的函数$U(x_1,\cdots,x_n)$使$U(0,\cdots,0)=0$，而对某个整数l，当$x_l=0$时，只要有一个$x_i\neq0(i=1,2,\cdots,n,i\neq l)$，便有$U(x_1,\cdots,x_n)\neq0$；并满足

1）$[U(x_1,\cdots,x_n)+X_l(t,x_1,\cdots,x_n)]/x_l$是常负函数；

2）记$F(t,x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial x_i}X_i$，$F(t,x_1,\cdots x_n)/x_l$定正；

3）$\int_0^{x_l}\frac{\partial F}{\partial t}dx_l+\sum_{i=1,i\neq l}^{n}(\int_0^{x_l}\frac{\partial F}{\partial x_i}dx_l)X_i\leqslant0$；

那么，可构造出广义的二次型加积分项的李雅普诺夫函数

$$V=\frac{1}{2}[U(x_1,\cdots,x_n)]^2+\int_0^{x_l}F(t,x_1,\cdots,x_n)dx_l \tag{3.1}$$

它通过方程组(1.1)对t的全导数为

$$\dot{V}=\int_0^{x_l}\frac{\partial F}{\partial t}dx_l+\sum_{i=1,i\neq l}^{n}(\int_0^{x_l}\frac{\partial F}{\partial x_i}dx_l)X_i+(U+X_l)F$$

〔证〕　注意到

$$\frac{dU(x_1,\cdots,x_n)}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial x_i}X_i=F(t,x_1,\cdots,x_n)$$

因而

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[U(x_1,\cdots,x_n)]^2=U(x_1,\cdots,x_n)F(t,x_1,\cdots,x_n)$$

另一方面，有

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^{x_l}F(t,x_1,\cdots,x_n)dx_l\right]=\int_0^{x_l}\frac{\partial F}{\partial t}dx_l+\sum_{i=1,i\neq l}^{n}\left[\int_0^{x_l}\frac{\partial F}{\partial x_i}dx_l\right]X_i+F(t,x_1,\cdots,x_n)X_l$$

将两式相加，得到

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}[U(x_1,\cdots,x_n)]^2+\int_0^{x_l}F(t,x_1,\cdots,x_n)dx_l\right\}$$
$$=\int_0^{x_l}\frac{\partial F}{\partial t}dx_l+\sum_{i=1,i\neq l}^{n}\left[\int_0^{x_l}\frac{\partial F}{\partial x_i}dx_l\right]X_i+(U+X_l)F$$

故取(3.1)形式的函数，由条件1) 2) 3)容易验证V是定正的李雅普诺夫函数。定理得证。

类似地，还可以证明

定理3.2 如果存在仅依赖于部分变元$x_1,\cdots,x_m(1\leqslant m\leqslant n-1)$的函数$U(x_1,\cdots,x_m)$使$U(0,\cdots,0)=0$，而对某个整数$l$，当$x_l=0$(或$U$不含$x_l$时)，只要有一个$x_i\neq0(i=1,2,\cdots,m,i\neq l)$，便有$U(x_1,\cdots,x_m)\neq0$；并满足：

1) $\int_0^{x_l}\frac{\partial F}{\partial t}dx_l+\sum_{i=1,i\neq l}^{n}\left(\int_0^{x_l}\frac{\partial F}{\partial x_i}dx_l\right)X_i\leqslant0$；

2) 记 $F(t,x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial U}{\partial x_i}X_i-x_l$，$F(t,x_1,\cdots,x_n)/x_l$定正；

3) 有$2(n-m)$个正数p_i和实数$q_i(i=m+1,\cdots,n)$，使

$$\sum_{i=m+1,i\neq l}^{n}[q_i(x_iX_l+x_lX_i)-p_ix_iX_i]\geqslant K(U+X_l)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial x_i}X_i;$$

$$(\text{其中}\ K=\sum_{i=m+1}^{n}\frac{q_i^2}{p_i},\ K\neq0)$$

那么，可构造出广义的二次型加积分项的李雅普诺夫函数为

$$V=\frac{K}{2}[U(x_1,\cdots,x_m)]^2+\sum_{i=m+1,i\neq l}^{n}\frac{p_i}{2}\left(x_i-\frac{q_i}{p_i}x_l\right)^2+K\int_0^{x_l}F(t,x_1,\cdots,x_n)dx_l \quad (3.2)$$

通过方程组(1.1)对t的全导数为

$$\dot V=K\left[\int_0^{x_l}\frac{\partial F}{\partial t}dx_l+\sum_{i=1,i\neq l}^{n}\left(\int_0^{x_l}\frac{\partial F}{\partial x_i}dx_l\right)X_i\right]+K[U+X_l]\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial U}{\partial x_i}X_i\right)$$

$$-\sum_{i=1,i\neq l}^{n}[q_i(x_iX_l+x_lX_i)-p_ix_iX_i]$$

上述这两个定理均需要考虑取函数U。对于方程组右端是分离变量函数时，一般可以考虑取U，使$\frac{\partial U}{\partial x_i}=\int_0^{x_i}f_i(\xi)d\xi$。

例 考虑方程组

$$\begin{cases}\dot x=e^{2y}-e^{y}\\ \dot y=xz+x^2z\\ \dot z=-(1+x^2)\left[a\left(x+\frac{x^3}{3}\right)+b(e^{y}-1)+h(y)z\right]e^{y}\end{cases}$$

其中 $a>0,b>0,h(y)>\frac{a}{b}$

分析其右端，可令$F(x)=\int_0^{x}(x^2+1)dx$，$G(y)=\int_0^{y}e^{y}dy$。建立“广义的”微分矩方程组：

$$\begin{cases}(1+x^2)F(x)\,\dot{x}=(1+x^2)F(x)G(y)e^y\\ e^yG(y)\,\dot{y}=(1+x^2)G(y)e^y\cdot z\\ z\,\dot{z}=-(1+x^2)[aF(x)+bG(y)+h(y)z]e^y\cdot z\\ (1+x^2)\,G(y)\,\dot{x}+e^yF(x)\,\dot{y}=(1+x^2)[G^2(y)+F(x)z]e^y\\ ze^y\,\dot{y}+G(y)\,\dot{z}=(1+x^2)e^yz^2-(1+x^2)[aF(x)+bG(y)+h(y)z]G(y)e^y\end{cases}$$

取组合系数$p_{11}=a^2$，$p_{22}=b^2$，$p_{33}=b$，$p_{12}=ab$，$p_{23}=a$，得

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{a^2}{2}F^2(x)+\frac{b^2}{2}G^2(y)+\frac{b}{2}z^2+abF(x)G(y)+aG(y)z+a\int_0^yG(y)h(y)e^ydy\right]$$

$$=-b(1+x^2)z^2\left[h(y)-\frac{a}{b}\right]e^y$$

因此取

$$V=\frac{1}{2}[aF(x)+bG(y)]^2+\frac{1}{2b}[aG(y)+bz]^2+a\int_0^yG(y)\left[h(y)-\frac{a}{b}\right]e^ydy$$

则此函数是定正的李雅普诺夫函数。

一般地说，对方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=g(y)\int_0^yg(y)dy,\\ \dot{y}=f(x)z,\\ \dot{z}=-f(x)\left[a\int_0^xf(x)dx+b\int_0^yg(y)dy+h(y)z\right]e^y\end{cases}$$

($a>0$，$b>0$，$f(x)>0$，$g(y)>0$，$h(y)>\frac{a}{b}$)可以作出广义的二次型加积分项的李雅普诺夫函数

$$V=\frac{1}{2}[aF(x)+bG(y)]^2+\frac{1}{2b}[aG(y)+bz]^2+a\int_0^yg(y)G(y)\left[h(y)-\frac{a}{b}\right]dy$$

其中 $F(x)=\int_0^xf(x)dx$, $G(y)=\int_0^yg(y)dy$. 则通过方程组对 t 的全导数为

$$\dot{V}=-b\left[h(y)-\frac{a}{b}\right]f(x)g(y)z^2$$

特别当$f(x)\equiv1$及$g(y)\equiv1$时，所得结果化为对方程

$$\dddot{x}+h(\dot{x})\,\ddot{x}+b\,\dot{x}+ax=0$$

的稳定性结论[4]。

参 考 文 献

〔1〕王寿松、徐远通，关于构造李雅普诺夫函数的微分矩方法(I)，中山大学学报(自然科学版)，(1981)，4.
〔2〕Огурпов, А. И., ПММ, 23 (1959), 1, 179～181.
〔3〕Ezeilo, J.O.C., *J. London Math. Soc.*, 43 (1968), 2, 161～167.
〔4〕Nagoraja, T. and Chalam, V.V., *International Journal of Control*, 19 (1974), 4, 781～787.

On the Method for Constructing Liapunov's Functions by Differential Moment (Ⅱ)

Wang Shousong　　Xu Yuantong

Abstract

In this paper we give some sufficient conditions for constructing Liapunov's function to the nonautonomous system

$$\dot{x}_i = X_i(t, x_1, \cdots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

by differential moments and resolve certain problems for determining the combination coefficients. These results present some calculating rules for applications.