

# 一种可调谐的引力波天线

郑庆璋 崔世治

(物理学系)

**提要** 本文研究了一种以扭摆为基础的可调谐引力波天线。调整系在扭摆两端的弹性线的张力,很容易使天线的共振频率在 $0.1\text{—}10\text{Hz}$ 范围内调谐,这正是预期由天体物理过程产生的引力波频谱的峰值范围。

## 引言

目前引力波探测实验预期的引力波源来自天体物理过程。理论预言<sup>[1,2]</sup>,低频段的引力辐射最为丰富。脉冲星的辐射多在 $0.1\text{—}100\text{Hz}$ 内,某些设想由中子星或黑洞组成的双星,以及宇宙本底辐射,都在频率 $0.1\text{—}10\text{Hz}$ 范围内有较强的辐射。

当今世界上使用的引力波天线大多是韦伯型机械共振天线<sup>[3]</sup>,这类天线属于机械I型天线<sup>[4]</sup>,它的本征频率与天线线度的一次方成反比。使用这类天线的主要缺陷有两方面:其一是它的本征频率较高,要达到 $10^3\text{Hz}$ 以下比较困难,不能满足探测低频引力辐射的要求;第二是它的共振频率固定,不能调谐,且带宽很窄,不利于探测某些未知频率的窄带引力波(如双星和脉冲星等产生的引力波)。

本文以扭摆的振动为基础,提出一种可调谐的引力波天线设计方案。计算表明,这种引力波天线能在 $0.1\text{—}10\text{Hz}$ 范围内方便地调谐,这无疑对探测预期的低频单色引力波十分有利。

## 扭摆的吸收截面

我们首先讨论扭摆作为引力波天线的可能性。为简单起见,以哑铃状扭摆为例。它由一根质量可忽略的细棒及两端固联的重小球构成,中间由一上端固定的弹性杆悬挂着,如图1所示。

大家知道,张量引力波具有“+”和“×”两种偏振状态。沿 $x_3$ 轴传播的引力波的两偏振态如图2所示。若沿 $x_1$ 轴放置一弹簧振子,则在“+”偏振态引力波的策动下,经受伸长和缩短的纵向振动;韦伯天线所探测的也正是引力波的这种偏振态。若沿 $x_1$ 轴放置一个哑铃状扭摆,则在“×”偏振态引力波的策动下,扭摆以 $x_3$ 轴为转轴扭转摆动。可见扭摆对引力波的一个偏振态是有响应的。

进一步的计算表明,一般扭摆对引力波的吸收截面同纵模振动的谐振子天线在数量

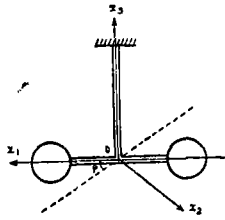
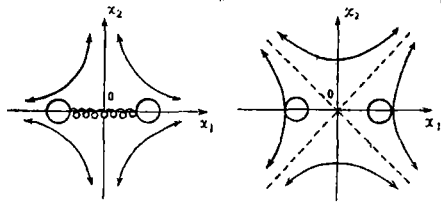


图1 哑铃状扭摆



a. “+” 偏振态      b. “x” 偏振态

图2 引力波的偏振状态

级上是一样的。换句话说，扭摆作为引力波天线的可用性，就其吸收截面来讲，与其他类型机械振子天线是不相上下的。

### 可调频扭摆

#### 1. 扭摆的本征频率

大家知道，当图1所示的扭摆扭过一偏角 $\varphi$ 时，它受到的恢复力矩  $M$  和本征振动角频率分别为

$$M = -\mu\varphi \tag{1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu}{I}} \tag{2}$$

其中  $I$  为扭摆的转动惯量， $\mu$  为弹性悬杆或悬线的扭转模量。当弹性悬杆为圆柱体，且其半径为  $r$ ，长度为  $h$ ，切变模量为  $N$  时，其扭转模量为

$$\mu = \frac{\pi}{2} N \cdot \frac{r^4}{h} \tag{3}$$

这个关系式很容易在一般教科书中找到。

由(2)式可见，由于表征扭摆特征的参数  $\mu$  和  $I$  不容易连续改变，因此通常扭摆的  $\omega_0$  是很难连续调节的。但是，如果在扭摆两端各系上一条弹性线(图3)，则由以下的讨论可

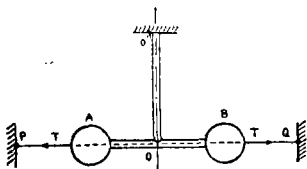


图3 可调频扭摆

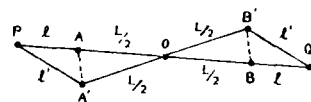


图4 弹性线伸长变化示意图

以看到，通过改变线中的张力  $T$ ，能够方便地达到连续改变扭摆本征角频率  $\omega_0$  的目的。

#### 2. 可调频扭摆的势能

我们将通过写出扭摆系统的拉格朗日方程来找出它的本征频率。为此，我们先计算扭摆系统的势能。

由于扭摆绕铅垂轴 $oo'$ 在水平面上摆动，故它只有一个自由度。我们选扭转角 $\varphi$ 为广义坐标。

假定弹性线原长为 $l_0$ ，拉伸至具有张力 $T$ 时的长度为 $l$ ，则由弹性定律有

$$T = k(l - l_0) \quad (4)$$

其中 $k$ 为弹性线的倔强系数。当扭摆扭过微小角度 $\varphi$ 时，弹性线的长度伸长至 $l'$ （图4）。若扭摆两端的距离为 $L$ ，则在 $\triangle OPA'$ 中，由余弦定律得

$$l'^2 = (l + \frac{L}{2})^2 + (\frac{L}{2})^2 - 2(l + \frac{L}{2}) \cdot \frac{L}{2} \cos \varphi$$

由于 $\varphi \ll 1$ ，近似地有 $\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ ，于是上式化为

$$l'^2 = l^2 + (l + \frac{L}{2}) \frac{L}{2} \varphi^2$$

或

$$l' = l \left[ 1 + \left( 1 + \frac{L}{2l} \right) \frac{L}{2l} \varphi^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

注意到 $\varphi \ll 1$ ，上式又可展成

$$l' \approx l \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{L}{2l} \right) \frac{L}{2l} \varphi^2 \right]$$

即

$$l' - l = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{L}{2l} \right) \frac{L}{2l} \varphi^2 \quad (5)$$

弹性悬线的伸长为

$$\Delta l = l' - l_0 = (l' - l) + (l - l_0)$$

把(4)和(5)代入上式，得

$$\Delta l = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{L}{2l} \right) \frac{L}{2l} \varphi^2 + \frac{T}{k} \quad (6)$$

平方并略去高级微量 $\varphi^4$ 项，得

$$(\Delta l)^2 = \frac{T}{k} \left( 1 + \frac{L}{2l} \right) \frac{L}{2l} \varphi^2 + \frac{T^2}{k^2}$$

故每一条弹性线的势能为

$$V_1 = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2 = \frac{TL}{4} \left( 1 + \frac{L}{2l} \right) \varphi^2 + \frac{T^2}{2k} \quad (7)$$

考虑到悬杆的扭转势能 $V_2 = \frac{1}{2} \mu \varphi^2$ ，得整个扭摆系统的势能为

$$\begin{aligned} V &= 2V_1 + V_2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ \mu + TL \left( 1 + \frac{L}{2l} \right) \right] \varphi^2 + \frac{T^2}{k} \end{aligned} \quad (8)$$

### 3. 可调频扭摆的拉格朗日方程

可调频扭摆的动能为

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 \quad (9)$$

其中  $I$  为扭摆对  $ox_3$  轴的转动惯量,  $\dot{\varphi} \equiv \frac{d\varphi}{dt}$  为扭摆的角速度。拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} \left[ \mu + TL \left( 1 + \frac{L}{2l} \right) \right] \varphi^2 - \frac{T^2}{k} \end{aligned} \quad (10)$$

代入拉格朗日方程:  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ , 得

$$I \ddot{\varphi} + \mu \left[ + TL \left( 1 + \frac{L}{2l} \right) \right] \varphi = 0 \quad (11)$$

这就是我们所要寻求的扭摆运动方程。

### 4. 可调频扭摆的本征振动频率

(11)式是典型的简谐振动方程。由此可见, 可调频扭摆的本征振动角频率为

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{I} \left[ \mu + TL \left( 1 + \frac{L}{2l} \right) \right]} \quad (12)$$

而本征振动频率则为

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{I} \left[ \mu + TL \left( 1 + \frac{L}{2l} \right) \right]} \quad (13)$$

作为一个估计, 假定扭摆是一个由相距  $L = 1$  米的两个质量各为  $M/2 = 500$  千克的小球构成的哑铃状扭摆(整个系统的质量为  $M = 1000$  千克), 于是它的转动惯量为

$$I = 2 \cdot \left( \frac{M}{2} \right) \cdot \left( \frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} ML^2 = 250 \text{ 千克} \cdot \text{米}^2$$

此外, 弹性悬杆为一半径  $r = 6$  毫米, 长度  $h = 1$  米的钢质园柱体, 其切变模量为  $N = 7000$  千克力·毫米<sup>2</sup>, 故其扭转模量为

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\pi}{2} N \frac{r^4}{h} = 1.4 \times 10^4 \text{ 千克力} \cdot \text{毫米} \\ &= 1.4 \times 10^2 \text{ 牛顿} \cdot \text{米} \end{aligned}$$

当弹性线的张力(外加张力) $T=0$ 时,得到扭摆的最低本征频率

$$\nu_{0min} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{I}} = 0.12\text{Hz}$$

而当 $T=10Mg$ ,  $l = \frac{L}{10}$ 时,扭摆的本征频率变为

$$\begin{aligned} \nu_0 &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4}{ML^2}[\mu + 10MgL(1+5)]} \\ &= 7.7\text{Hz} \end{aligned}$$

## 结 论

1. 具有质量四极矩的扭摆对引力波有响应,可以作为探测引力波的天线。在相同的探测条件下,扭摆的吸收截面与纵模谐振子天线的数量级相同。

2. 由(12)及(13)可见,通过不断改变弹性线中的张力 $T$ (这在实际上是很容易进行的),能够使扭摆的本征频率连续改变,从而达到调谐的目的。

3. 以上述的典型数值估计为例,当外加张力由 $T=0$ 变到 $T=10Mg$ 时,天线的共振频率从 $0.12\text{Hz}$ 变到 $7.7\text{Hz}$ 。这个频段正是预期的天体物理引力波源辐射最为丰富的频段。对引力辐射的这一频段进行过细的探测和研究,无疑对理论和实验都有很大的意义。

## 参 考 文 献

- [1] C. W. Misner, et al., *Gravitation*, Freeman, San Francisco, 1973, Chap. 36
- [2] 秦荣先, 物理, 8 (1979), 332.
- [3] G. Papini, *Can. J. Phys.*, 52 (1974), 880.
- [4] D. H. Douglass and J. A. Tyson, *Nature*, 229 (1971), 34.
- [5] *ibid* [1], Chap. 37.

## A Tunable Gravitational Wave Antenna

Zheng Qingzhang Cui Shizhi

### Abstract

In this article, we have studied a tunable gravitational wave antenna on the basis of torsional pendulum. By tuning the tension of elastic wire that has bound to either end of the torsional pendulum, it is easily to tune resonant frequency of the antenna in the range of 0.1-10Hz, which is the predictive peak range of the spectrum of gravitational wave that should be produced by astrophysical process.