关于随机Riemann和的均方收斂性

谢平民
（数学力学系）

本文给出随机Riemann和在闭区间上一致均方收斂的充分性条件，并把所得结果应用于随机积分，高阶随机积分，同时还得到一类$It\hat{o}$随机微分方程在均方收斂意义下的解。

一、随机Riemann和的均方收斂性

设$(\Omega,\mathbf{F},P)$为完备化概率空间。$D=[a,b]$为右半直线上任一有限闭区间。$\mathbf{F}_t$，$t\in D$为$\mathbf{F}$的单调上升子σ代数族，并且$\mathbf{F}_a$包含$\mathbf{F}$的一切零测集。$f=\{f(t),t\in D\}$为具有有限二阶矩的可测适应过程。$\Delta=\Delta(t,s)$，$a\leqslant s\leqslant t\leqslant b$，$\Delta(t,t)=0$为一族具有有限二阶矩的随机变量，且当$s<t$时，$\Delta$对$\mathbf{F}_t$可测。

又设存在

1）D上的单调不减函数$\mathbf{F}(t)$；

2）具有有限二阶矩的可测适应过程g；

3）非负实数M_1及正数M_2、m_1、m_2、δ（在某些场合下，M_2可以是任给的，这时δ还与M_2有关），使得以概率1，当$0<t-s<\delta$时，都有

$$|E\{\Delta(t,s)|\mathbf{F}_s\}|\leqslant M_1[F(t)-F(s)]^{m_1}g(s), \tag{1}$$

$$E\{\Delta^2(t,s)|\mathbf{F}_s\}\leqslant M_2^2[F(t)-F(s)]^{m_2}g^2(s), \tag{2}$$

又对区间D的任一分割h：

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=b,$$

令

$$J_i=[t_i,t_{i+1}),\quad i=0,1,\cdots,n-2,\quad J_{n-1}=[t_{n-1},t_n].$$

$$\|h\|=\underset{0<i<n-1}{Max}\{t_{i+1}-t_i\}.$$

现在我们来考虑f对Δ的随机Riemann和：

$$I(f_h)(t)=\begin{cases} f(t_0)\Delta(t,t_0),\ t\in J_0 \\ \sum\limits_{i=0}^{k-1} f(t_i)\Delta(t_{i+1},t_i)+f(t_k)\Delta(t,t_k),t\in J_k,k\geqslant 1. \end{cases}$$

固定分割h时，容易看出，

1) $I(f_h)(t)$对于f及Δ都是线性的，

2) 若对任意的 $\tau\leqslant s\leqslant t$,

$$\Delta(t,\tau)=\Delta(t,s)+\Delta(s,\tau),$$

则阶梯过程f对于Δ的随机Riemann和$I(f_h)(b)$因D的再分割而改变的，最多有f的分点那么多项。

此外，我们还有如下重要估计式：

当$\|h\|<\delta$时，对任意的$A\in\mathbf{F}_a$及$t\in D$，都有

$$\int_A[I(f_h)(t)]^2dp\leqslant M_2^2\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta F(t_i))^{m_2-1}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\Delta F(t_i)\int_A f^2(t_i)g^2(t_i)dp \tag{3}$$

及

$$\int_A[I(f_h)(t)]^2dp\leqslant M_2^2\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta F(t_i))^{m_2}\int_A f^2(t_i)g^2(t_i)dp$$
$$+2M_1M_2\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta F(t_i))^{\frac{m_2}{2}}\left(\int_A f^2(t_i)g^2(t_i)dp\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta F(t_i))^{m_1}\left(\int_A f^2(t_i)g^2(t_i)dp\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

其中 $\Delta F(t_i)=F(t_{i+1})-F(t_i)$。

为了证明(3)、(4)式，除了条件期望的一些熟知性质外，我们还须要如下的

引理 设$\mathbf{B}_1\subset\mathbf{B}_2\subset\mathbf{F}$为二$\sigma$代数，又设$\mathbf{X}$、$\mathbf{Y}$、$\mathbf{Z}$为非负函数，其中$\mathbf{X}$、$\mathbf{Z}$对$\mathbf{B}_1$可测，$\mathbf{Y}$对$\mathbf{B}_2$可测，且

$$E\{\mathbf{Y}/\mathbf{B}_1\}\leqslant\mathbf{Z},\ a.s.$$

则对任意的$A\in\mathbf{B}_1$，有

$$\int_A\mathbf{X}Ydp\leqslant\int_A\mathbf{XZ}dp$$

若$\mathbf{XZ}$可积，则上式意味着

$$E\{\mathbf{X}Y|\mathbf{B}_1\}\leqslant\mathbf{XZ},\ a.s.$$

这个引理可用通常的办法给予证明。

(3)式的证明：容易看出，只须就$t=b$的情形给出证明，并且不妨设

$$\int_A f^2(t_i)g^2(t_i)dp<\infty,\ i=0,1,2,\cdots,n-1.$$

因而由引理，当$\|h\|<\delta$时，有

$$\int_A f^2(t_i)\Delta^2(t_{i+1},t_i)dp\leqslant M_2^2(\Delta F(t_i))^{m_2}\int_A f^2(t_i)g^2(t_i)dp<\infty$$

从而 $$\int_A|f(t_i)\Delta(t_{i+1},t_i)\|f(t_j)\Delta(t_{j+1},t_j)|dp<\infty,\ i,j=0,1,2,\cdots,n-1.$$

$$\int_A[I(f_h)(b)]^2dp=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\int_A f(t_i)\Delta(t_{i+1},t_i)f(t_j)\Delta(t_{j+1},t_j)dp$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\int_A f^2(t_i)\Delta^2(t_{i+1},t_i)\,dp\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_A f^2(t_j)\Delta^2(t_{j+1},t_j)\,dp\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant M_2^2\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_A f^2(t_i)g^2(t_i)\Delta F(t_i)\,dp\right)^{\frac{1}{2}}\left(\Delta F(t_i)\right)^{\frac{m_2-1}{2}}\right]^2$$

(3)式得证。(4)式的证明：

$$\int_A [I(f_h)(b)]^2\,dp=\sum_{i=0}^{n-1}\int_A f^2(t_i)\Delta^2(t_{i+1},t_i)\,dp$$

$$+2\sum_{i<j}\int_A f(t_i)\Delta(t_{i+1},t_i)f(t_j)\Delta(t_{j+1},t_j)\,dp$$

$$\leqslant M_2^2\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta F(t_i))^{m_2}\int_A f^2(t_i)g^2(t_i)\,dp$$

$$+2M_1\sum_{i<j}(\Delta F(t_j))^{m_1}\int_A |f(t_i)||\Delta(t_{i+1},t_i)||f(t_j)g(t_j)|\,dp$$

$$\leqslant M_2^2\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta F(t_i))^{m_2}\int_A f^2(t_i)g^2(t_i)\,dp$$

$$+2M_1\sum_{i<j}(\Delta F(t_j))^{m_1}\left(\int_A f^2(t_i)\Delta^2(t_{i+1},t_i)\,dp\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_A f^2(t_j)g^2(t_j)\,dp\right)^{\frac{1}{2}}$$

由(3)、(4)二个估计式我们得到随机Riemann和在D上一致均方收敛的三组充分性条件：

定理 1　若$F(t)$连续，$E\{f^2(t)g^2(t)\}$有界，且满足下列三条件之一：1) $m_2>2$； 2) $m_2=2$，$m_1>1$； 3) $m_2>1$，$M_1=0$，则当$\|h\|\to 0$时，关于$t\in D$及$A\in\mathbf{F}_a$，一致地有

$$\int_A [I(t_h)(t)]^2\,dp\to 0.$$

定理 2　若$F(t)$连续，$E\{f^2(t)g^2(t)\}$有界，而M_2是任给的，且满足下列二条件之一：

1) $m_2=2$； 2) $m_2=1$，$M_1=0$；

则当$\|h\|\to 0$时，关于$t\in D$及$A\in\mathbf{F}_a$，一致地有

$$\int_A [I(f_h)(t)]^2\,dp\to 0.$$

定理 3　若当$\|h\|\to 0$时，

$$\sum_{i=0}^{n-1}\Delta F(t_i)\int f^2(t_i)g^2(t_i)\,dp\to 0$$

且满足下列二条件之一：

1) $m_2=2$； 2) $m_2=1$，$M_1=0$；

则当$\|h\|\to 0$时，关于$t\in D$及$A\in\mathbf{F}_a$，一致地有

$$\int_A [I(f_h)(t)]^2\,dp\to 0.$$

二、应用于随机积分

设$\beta=\{\beta_t: t\in D\}$为Borwnian运动过程，令

$$\mathbf{F}_t=\sigma\{\beta s: a\leqslant s\leqslant t\},\quad t\in D$$

为F的子σ代数族，并且$\mathbf{F}_a$包含F的一切零测集。设λ为任意实数或复数。考虑作为级数和的随机过程：

$$e^{\lambda\beta_t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\lambda\beta_t]^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\lambda(\beta_t-\beta_a)]^n}{n!}$$

容易证明，对任意的t、$s\in D$，$t>s$，有

$$\lim_{n\to\infty}E\{|\sum_{i=0}^{n}\frac{[\lambda(\beta_t-\beta_s)]^i}{i!}-e^{\lambda(\beta_t-\beta_s)}|^2\}=0,$$

于是，利用逐项求期望的办法可得：

$$E\{e^{\lambda(\beta_t-\beta_s)}\}=e^{\frac{\lambda^2}{2}(t-s)}$$

为了方便，引进下列记号：以

$S_0(D)$表示全体具有有限二阶矩的可测适应阶梯过程；$S(D)$表示全体可测适应均方连续过程；$I(f)$表示f对Δ的随机Riemann和$I(f_h)(b)$的均方极限，$I_1(f)$表示$I(f_n)$的均方极限，其中$f\in L^2(D\times\Omega)$为可测适应过程，而$f_n\in S_0(D)$，并使

$$\lim_{n\to\infty}E\{\int_a^b(f_n(t)-f(t))^2dt\}=0.$$

1)令 $\Delta(t,s)=\beta_t-\beta_s$，$t>s$。那么利用定理3可以证明，$I_1(f)$存在并且就等于通常所指的$f$对$\beta$的随机积分。

2) 令$\Delta(t,s)=(\beta_t-\beta_s)^2$，$t>s$。利用定理1及定理3可以证明，当$f\in L^2(D\times\Omega)$时，$f$对$\beta$的二阶随机积分$\int_a^b f(s)\,d\beta_s^2$存在并且

$$\int_a^b f(s)\,d\beta_s^2=\int_a^b f(s)ds.$$

这就是说，在这种情形下，f对β的二阶随机积分就是通常的Lebesgue积分。这里推广了[4]的结果。

3) 令 $\Delta(t,s)=(\beta_t-\beta_s)^m$，$t>s$，$m\geqslant 3$为自然数。利用定理1可以证明，当$f\in L^2(D\times\Omega)$时，$I_1(f)$存在且等于零，推广了[4]的结果。

4) 利用上述结果可得

$$\begin{aligned}\beta_b^p-\beta_a^p&=p\int_a^b\beta_s^{p-1}d\beta_s+\frac{p(p-1)}{2!}\int_a^b\beta_s^{p-2}d\beta_s^2\\&=p\int_a^b\beta_s^{p-1}d\beta_s+\frac{p(p-1)}{2!}\int_a^b\beta_s^{p-2}ds.\end{aligned}$$

这是关于Borwnian运动过程的幂在均方收敛意义下的$It\hat{o}$公式。这里推广了〔6〕的结果。在那里是指依概率收敛而言。

5）令 $\Delta(t,s)=(A(t)-A(s))(\beta_t-\beta_s)^m$，$t>s$，$m$为自然数。$A(t)$为$D$上的连续函数。由定理2可知，当$f\epsilon L^2(D\times\Omega)$时，$I_1(f)$存在且等于零。作为特例，由此可得

$$\int_a^b \beta_s ds=\int_a^b (b-s)d\beta_s$$

这就是〔5〕的例5.3.1.也是〔6〕的例4.5.2.

6）令 $\Delta(t,s)=e^{\beta_t-\beta_s}-1-(\beta_t-\beta_s)-\frac{1}{2}(\beta_t-\beta_s)^2$，$t>s$。由定理1可知，当$f\epsilon L^2(D\times\Omega)$时，$I_1(f)$存在且等于零。作为特例，由此可得

$$e^{\beta_b}=1+\int_a^b e^{\beta_s}d\beta_s+\frac{1}{2}\int_a^b e^{\beta_s}d\beta_s^2.$$

7）与6)类似可得

$$e^{\beta_b}=1+\int_a^b e^{\beta_s}d\beta_s+\frac{1}{2}\int_a^b e^{\beta_s}ds.$$

8）令 $\Delta(t,s)=e^{\beta_t-\beta_s-\frac{1}{2}(t-s)}-1-(\beta_t-\beta_s)$，$t>s$。　由此可得

$$e^{\beta_b-\frac{1}{2}(b-a)}=1+\int_a^b e^{\beta_s-\frac{1}{2}(s-a)}d\beta_s$$

9）由过程$\{e^{\beta_t}: t\epsilon D\}$的连续性.并注意到当$f\epsilon L^2(D\times\Omega)$时，过程$\int_a^t f(s)d\beta_s$、$\int_a^t f(s)ds$都以概率1在$D$上连续的事实，由7)、8)便得到$It\hat{o}$随机微分方程

$$f(t)=1+\int_a^t f(s)d\beta_s+\frac{1}{2}\int_a^t f(s)ds$$

及
$$f(t)=1+\int_a^t f(s)d\beta_s$$

在均方收敛意义下的解。并求得解的一、二阶矩。

上列随机微分方程的解，通常是从$It\hat{o}$复合函数求导公式推导出来的，而这个公式通常是就依概率收敛而证明的。参阅，例如〔3〕、〔5〕、〔8〕。

上列随机积分都对应于$g=1$的情形。进一步，还可得到对应于g的其他情形的随机积分。

参考文献

〔1〕 E. J. Mcshanc, *Stochastic Calculus and Stochactic Models*, 1974.
〔2〕 Doob, *Stochastic Processes*, 1953.
〔3〕 А. Б. Скороход и И. И. Гихман, Введение в Теорию Случайных Прочессов, 1965.
〔4〕 A. H. Jazwinski, *Stochastic Processes and Filtering Theory*, 1970.
〔5〕 Р. Ш. Липцер, А. Н. ширяев, Статистика Случайных Процессов, 1974.
〔6〕 Avner Frledman, *Stochastic Differential Equations and Applications*, *Vol*. 1, 1975.
〔7〕 J. Yeh, *Stochastic Processes and the Wiener Integral*, 1973.
〔8〕 王梓坤，随机过程论，科学出版社， 1965.

On Mean Square Convergence of a Stochastic Riemann Sum

Xie Pingmin

Abstract

This paper discusses mean square convergence of a stochastic Riemann sum, and its application in the stochastic integral.