

标量光场平面屏衍射的矩阵理论

(II) 衍射积分

物理学系 李先枢

摘 要

本文依据赫姆霍兹—基尔霍夫积分定理和基尔霍夫边界条件,求得用[1]中光场表象表示的一般标量光场入射时平面屏衍射的基本公式。用新的观点讨论了该公式的适用范围,并得出结论:球面波入射的基本衍射公式——著名的费涅耳—基尔霍夫衍射公式,通常都能简化到类同平面波衍射公式的形式。

为了简化基本衍射公式,本文提出了一个新的近似条件,并得到了一个新的近似公式。在这个基础上,历来被分开来讨论的二种衍射,所谓夫琅和费衍射和费涅耳衍射,现在用同一个公式来表示,并且这个公式具有傅里叶变换的简单形式,较便于积分。

在这些近似公式的基础上,本文还证明了,在包括大多数实际讨论情形在内的很广泛范围内,基尔霍夫衍射理论与端利—索末菲理论所得结果是完全一致的。

为了得到[1]中讨论的一般标量光场入射时的平面屏衍射的矩阵理论,本文依据赫姆霍兹—基尔霍夫积分定理^[2]及基尔霍夫边界条件(关于这个条件的讨论可参见[3]),求相应的衍射积分。同时利用[1]中光场表示方法的优点,引出衍射场对称性质方面的某些规律。为了使所得结果适用范围尽可能广泛,我们假设衍射开孔A前(或后,二者一样)紧贴一无限薄的理想薄透镜(半径充分大,图1)并假设开孔复振幅透射系数为常数H。当透镜焦距 $f \rightarrow \infty$, $H = 1$,便过渡到普通开孔衍射情形。

一、基本衍射公式

设上述不透明平面屏 Σ 与光传播轴垂直,如图1所示。有[1]中(2.4)一(2.6)所示光场 $\Phi(\xi, \varphi, z)$ 入射在透镜表面上(即图1平面1上,该平面上一点的坐标为 (ξ', φ', z'))。据[1]可有

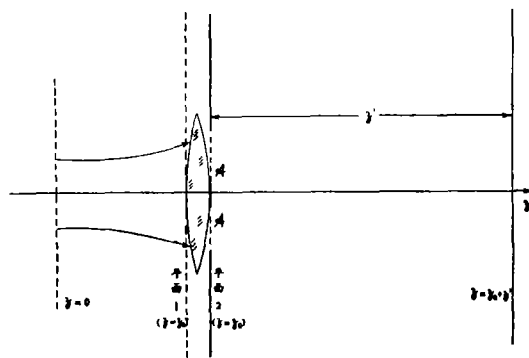


图1 所讨论的装置

$$\begin{aligned} \Phi(\xi', \varphi', z_0) &= \sum_{s_1=-\infty}^{\infty} C_{s_1}(\xi', z_0) e^{js_1\varphi'} \\ &= \sum_{s_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(s_1)}(z_0) \Psi_n^{(s_1)}(\xi', \varphi', z_0) \end{aligned} \quad (1.1)$$

其中所有符号同[1]。透镜后表面(平面2)上开孔内的入射场为(透镜作用参见[4])

$$\Phi'(\xi', \varphi', z_0) = \Phi(\xi', \varphi', z_0) e^{jk\rho'^2/2f} \quad (1.2)$$

因透镜无限薄,图1中平面1、2可认为是重迭的,可用同样的坐标。把(1.2)代入赫姆霍兹—基尔霍夫积分定理,并利用基尔霍夫边界条件(图2,坐标示于图3),设

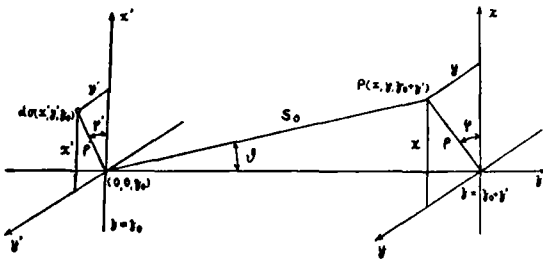


图2 基尔霍夫边界条件令 $u^{(i)}$ 表示平面2上入射光场, u 表示衍射光场,则在边界上:

在区域A, $u = u^{(i)}, \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u^{(i)}}{\partial n}$;

在区域B, $u = 0, \frac{\partial u}{\partial n} = 0$;

在区域b, $u = 0, \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ 。

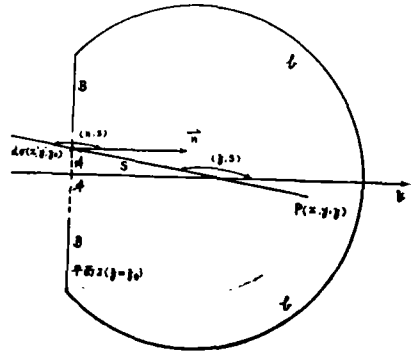


图3 本文所用坐标和符号

$$\begin{aligned} \xi'^2 &= \frac{2\rho'^2}{q_0}, \\ S &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2} \\ S_0 &= \sqrt{x^2 + y^2 + z'^2} \end{aligned}$$

$$\left| \frac{1}{s} \right| \ll k \quad (1.3)$$

得到 $\Phi(\xi', \varphi', z_0)$ 的衍射场

$$u(P) = \sum_{s_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(s_1)}(z_0) u_n^{(s_1)}(P) \quad (1.4)$$

$u_n^{(s_1)}(P)$ 为元模 $\Psi_n^{(s_1)}(\xi', \varphi', z_0)$ 的衍射场

$$\begin{aligned} u_n^{(s_1)}(P) &= \frac{-j\mathbf{H}}{2\lambda} \iint_A \frac{e^{-jks}}{S} \Psi_n^{(s_1)}(\xi', \varphi', z_0) e^{jk\rho'^2/2f} \\ &\quad \left\{ \cos(z, s) + \left[\Psi_n^{(s_1)}(\xi', \varphi', z_0) \right]^{-1} \frac{1}{jk} \left[\frac{\partial}{\partial z} \Psi_n^{(s_1)}(\xi', \varphi', z) \right]_{z=z_0} \right. \\ &\quad \left. + \left[jk\alpha_n^{(s_1)}(z_0) \right]^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial z} \alpha_n^{(s_1)}(z) \right]_{z=z_0} \right\} d\sigma \end{aligned} \quad (1.5)$$

上式中球面次波表示为 e^{-jks}/s ,与[2]不同,是为了与[1,5]中高斯光束的习用表示式一

致。用〔1〕中 $\Psi_n^{(sl)}(\xi, \varphi, z)$ 的表示式代入(1.5), 令 $R_0 = R(z_0), w_0 = w(z_0)$ 为入射光场的参照高斯光场 $u_0(\xi^2, z)$ 在透镜前表面上的基本参数, 若

$$kR_0 \gg 1, \quad k^2 w_0^2 \gg 1, \tag{1.6}$$

$$\left[k \alpha_n^{(sl)}(z_0) \right]^{-1} \left[-\frac{\partial}{\partial z} \alpha_n^{(sl)}(z) \right]_{z=z_0} \ll 1, \tag{1.7}$$

由(1.5)得到

$$u_n^{(sl)}(P) = \frac{j}{2\lambda} \iint_A \Psi_n^{(sl)}(\xi', \varphi', z_0) e^{jk\rho'^2/2f} \frac{e^{-iks}}{s} \left\{ 1 - \frac{2n+l}{k^2 q_0} + \frac{\xi'^2}{k^2 q_0} - \cos(z, s) \right\} d\sigma. \tag{1.8}$$

式中 $q_0^{-1} = \frac{1}{w_0^2} + j \frac{k}{2R_0} = \frac{1}{w_0 w_a} e^{j\phi(z_0)}$, q_0 为平面 1 上 $u_0(\xi, z)$ 的复光斑半径。若略去

(1.8) { } 内第二项, 取 $f \rightarrow \infty$, 参照高斯光场参数 $kw_0^2 \ll 2z_0$, 并取开孔范围内 $\frac{\rho'^2}{2z_0} \approx \rho'^2/2(z_0^2 + \rho'^2)$, 令 $\Phi = A \frac{e^{jkf}}{r}$ 由(1.8)便得到著名的费涅耳—基尔霍夫衍射公式。

若以 a 表须考虑光场区域中所有点至轴距离的最大值, 而

$$\left| \frac{2n+l}{k^2 q_0} \right| \ll 1, \tag{1.9}$$

$$2a^2 \ll k^2 w_0^2 w_a^2, \tag{1.10}$$

则(1.8)进一步简化为

$$u_n^{(sl)}(P) = \frac{jH}{2\lambda} \iint_A \Psi_n^{(sl)}(\xi', \varphi', z_0) e^{jk\rho'^2/2f} \frac{e^{-iks}}{s} \{ 1 - \cos(z, s) \} d\sigma. \tag{1.11}$$

由(1.4)及(1.11)得 $\Phi(\xi', \varphi', z_0)$ 的衍射场

$$u(P) = \frac{jH}{2\lambda} \iint_A \Phi(\xi', \varphi', z_0) e^{jk\rho'^2/2f} \frac{e^{-iks}}{s} \{ 1 - \cos(z, s) \} d\sigma. \tag{1.12}$$

如果把 $\Phi(\xi', \varphi', z_0) e^{jk\rho'^2/2f}$ 看作是正入射平面波在开孔平面上的复振幅分布〔4〕§ 2.2), (1.12)式就和目前广泛使用的习用平面波衍射公式一致。

设开孔平面上场显异于零或须讨论的区域半径为 a , 场的各傅里叶成份 $C_{sl}(\xi', z_0) e^{jsl\varphi}$ 中, 复振幅径向分布 $C_{sl}(\xi', z_0)$ 的所有结构——即起伏(包括位相分布结构)中最小结构径向宽度为 $2t_{\min}$ 。那么据附录 A 与 B, 合理选取 $|q_0| \geq a^2$, 可得同时满足(1.6)、(1.7)、(1.9)、(1.10)式从而使(1.12)式成立的充分条件为

$$t_{\min}^2 \gg \frac{e^2}{2\pi^2} (\lambda/2)^2. \tag{1.13}$$

注意: 条件(A.17)并不限制(1.1)式中参照光场的选择。事实上若选用某一 q_0 能使(1.12)成立, 那么把该式中 $\Phi(\xi', \varphi', z_0)$ 展为对任一 q_0'' 的级数(1.1)式, 便可证(1.4)、(1.11)与

(1.12) 式必同时对任意选用的 q_0'' 成立。

在球面波入射情形, 若把位相分布每变化 π 标为一个结构, 取 $q_0 = w_0^2$, 易证(1.13)式与熟知的平面波正入射条件 $\cos(z, r) \approx 1$ (开孔范围内) 是完全一致的。(1.12) 式即通常平面波正入射的衍射公式。

假设对入射光场 $\Phi(\xi', \varphi', z_0)$ 衍射公式(1.12) 式成立, 容易证明, 把 Φ 换成它与任意参照光场高斯位相分布的乘积 $\Phi e^{-jk\rho'^2/2R(z_0)}$ 后, (1.12) 式应仍能成立。重复附录 A、B 的讨论, 并利用 Φ 的性质, 不难作出这一证明。然而这一结果也可以更直观地从(1.5) 式中看出来。只要

$$\left| e^{-jk\rho'^2/2R(z_0)} \left[\frac{\partial}{\partial z} e^{-jk\rho'^2/2R(z)} \right]_{z=z_0} \right| = \left| -j \frac{k\rho'^2}{R(z_0) \cdot z_0} \cdot \frac{z_0 - R(z_0)}{R(z_0)} \right| \ll k. \quad (1.14)$$

那么(1.5) 式 $\{ \}$ 内的第二项便可认为在作上述置换的前后不变。即可认为 $\frac{1}{jk} \left[\Psi_n^{(sl)} \right]^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial z} \Psi_n^{(sl)} \right]_{z=z_0} \approx \frac{1}{jk} \left[\Psi_n^{(sl)} e^{-jk\rho'^2/2R(z_0)} \right]^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial z} \Psi_n^{(sl)} e^{-jk\rho'^2/2R(z)} \right]_{z=z_0}$ 。而该式 $\{ \}$ 内其它各项则与此置换无关。这就是说, (1.13) 式中的 t_{\min} 对于位相分布来说, 应理解为入射场的位相偏离正比于 ρ^2 规律部份的结构 (位相差改变 π) 的最小径向宽度。

这样一来, 我们就容易具体证明 (恰当挑选 $R(z_0)$ 与 z_0 , 例如取 $R(z_0) = z_0, z_0 = 1.33 r_0, r_0$ 为点源至衍射屏距离, 则当 $\rho' \leq r_0$ 时 t_{\min} 出现在 $\rho' \approx 0.43 r_0$ 处, $2t_{\min} \approx 7\lambda$ 。而公式(1.12) 式误差应为

$$\delta \approx \frac{e^2}{2\pi^2} \left(\lambda/2 \right)^2 t_{\min}^{-2}, \quad (1.15)$$

以 t_{\min} 值代入, 得 $\delta \approx 7 \times 10^{-3}$, (1.12) 式在通常要求的精度范围内, 可推广应用于球面波正入射而光锥角 $(z, r) \leq 45^\circ$ 的情形。由于我们在讨论中并未规定开孔的具体形状, 因此得出结论: **只要入射角不超过 45° , 则 Fresnel-Kirchhoff 衍射公式总可在(实际上是)充分的精度内简化为平面波衍射公式。**

由于这个早在1882年就由Kirchhoff 得出的衍射的标量理论中的著名公式在光学中的重要性, 以及它至今仍是一个应用最普遍的基本衍射公式, 因此上述结论无论在理论上和应用方面都显然是很有意义的。

讨 论

费涅耳—基尔霍夫衍射公式([2] § 8.3(17) 式)

$$u(P) = - \frac{jA'}{2\lambda} \iint_A \frac{e^{-jk(r+s)}}{rs} \left[\cos(z, r) - \cos(z, s) \right] d\sigma \quad (1.16)$$

中因子 $\cos(z, r)$, 在通常情况下都可近似取为 1 而不影响计算结果。对于这一结论,

- 把(1.5) 式中的积分区域看成几个较小区域组成的, 对每一区域选用不同的 $R(n_0)$ 与 n_0 。容易证明, 这个 45° 的限制也是可以放宽的。

作者认为可如此解释：当 (z,r) 较大而 $[\cos(z,r) - 1]$ 显异于零时，平面屏上球面波位相径向分布，周期已较近于 λ 。因此当 $d\sigma$ 沿径向移动，而 $[\cos(z,r) - 1]$ 的变化还极微小时，平面屏上入射场的位相已改变了许多个周期，而各 $d\sigma$ 对 P 点衍射场的贡献，便差不多互相抵消了。因此若把(1.16)式中 $\cos(z,r)$ 写为 $\{1 + [\cos(z,r) - 1]\}$ ，因 $[\]$ 内部份对积分总贡献不大而可以忽略，就并不值得奇怪了。

如果作一个费涅耳波带片，在球面波正入射情形下，遮住共轴衍射园孔的所有球面波函数 $R\left[\frac{A}{r}e^{-jkr}\right]$ 为负的区域而只是暴露出上述函数为正的区城。那么，在 $[\cos(z,r) - 1]$ 显异于零的区域内，由于此时（透射）光场振幅分布结构最小径向宽度已近于 λ ，从而不满足条件(1.13)，因此，在这一区域内(1.12)式不能成立。不过这时衍射开孔线度已经很小，衍射的标量理论的适用范围也须要考虑了⁽²⁾。如果上述费涅耳波片只改变位相分布，由于此时场位相分布偏离 ρ^2 规律亦很显著，在 $\cos(z,r) \neq 1$ 区域(1.13)式亦不能成立。

为说明本节结论的合理性，进一步考虑如下情形。设想图1所示装置中没有透镜，球面波正入射在开孔A上，那么，据已有结果，衍射场应用(1.16)式表示。但据本文(1.12)式应有

$$u'(P) = -\frac{jA}{2\lambda} \iint_A \frac{e^{-jk(r+s)}}{rs} [1 - \cos(z,s)] d\sigma \quad (1.17)$$

现设想在开孔A后置一合轴理想薄透镜（线度无穷大），焦距 f ，焦点正落在球面波点源 $(z=0)$ 处。由于透镜无限薄，从物理上看，开孔A紧贴透镜前、后表面，衍射场应该完全一样。因此可与图1装置等价，从而据已有结果，亦应认为可采用平面波入射公式求得其衍射场 $\tilde{u}(P)$ 。于是应用本文第二节近似条件，依次得到(1.16)、(1.17)及 $\tilde{u}(P)$ 的适用于远、近衍射场的近似公式

$$u(P) = \frac{-jk}{4\pi} \frac{Ae^{-jks_0}}{s_0} \iint_A \frac{e^{-jkr}}{r} [\cos(z,r) + 1] e^{-jk\rho'^2/2z'} e^{jk(px'+gy')} dx' dy' \quad (1.18)$$

$$u'(P) = -\frac{jk}{2\pi} \frac{Ae^{-jks_0}}{s_0} \iint_A \frac{e^{-jkr}}{r} e^{-jk\rho'^2/2z'} e^{jk(px'+gy')} dx' dy' \quad (1.19)$$

$$\tilde{u}(P) = -\frac{jk}{2\pi} \frac{Be^{-jks_0}}{s_0} \iint_A \frac{e^{-jkr}}{r} e^{-jk\rho'^2(\frac{1}{2f} - \frac{1}{2z'})} e^{jk(px'+gy')} dx' dy' \quad (1.20)$$

令 $\frac{1}{z''} = \frac{1}{f} - \frac{1}{z'}$ (1.21)

$$s_{01} = z' \left(1 + \frac{p^2 + g^2}{2}\right), \quad s_{02} = z'' \left(1 + \frac{p^2 + g^2}{2}\right) \quad (1.22)$$

$$x_1 = s_{01}p, \quad y_1 = s_{01}g, \quad z_1 = z' \quad (1.23)$$

$$x_2 = s_{02}p, \quad y_2 = s_{02}g, \quad z_2 = z'' \quad (1.24)$$

讨论衍射场中相应二点 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ 。可以证明由(1.19)一(1.24)式可得

$$\tilde{u}(P_1) = u'(P_2) \frac{z_2}{z_1} e^{-jk(z_1-z_2)} \left(1 + \frac{p^2+g^2}{2}\right) / f. \quad (1.25)$$

注意到未加透镜前衍射场中的 P_2 点的场, 在加透镜后应成像于 P_1 点。(1.25)式表明了加透镜后 $z = z_1$ 平面上的实振幅分布与未加透镜前它的共轭平面($z = z_2$)上的分布完全相同。不过分布曲线横坐标按比例 $\frac{z_1}{z_2}$ 缩小或放大了。二者的位相分布间相差一个正比于 (p^2+g^2) 的因子也完全合理。

但是, 比较(1.18)和(1.20)式却可以看出: 除非(1.18)式中 $[\cos(z, r) - 1]$ 对积分的贡献(累积效果)可以忽略, 否则便得不出开孔后加透镜时的衍射场可看作开孔后无透镜时的衍射场的像这一合理结果来。

这里要强调的是, 在(1.21)——(1.24)及本文第二节处理衍射公式的近似条件中, 所取的(傍轴)近似一概与入射角 (z, r) 的大小无关。因而无损于结果的普遍性。

条件(1.13)式还表明: 不能通过衍射场利用(1.12)式来了解入射场中 $t_{\min} \lesssim \lambda/2$ 的结构。但在(1.12)式原来不能成立情形, 若可采取忽略小结构近似, 它却又成为能近似成立的了。可见(1.13)式反映了测不准关系的某种要求。对(1.12)条件的这种新认识也反映了[1]中光场表象的优点。

二、近似条件与近似公式

为简化基本衍射公式使简单实用, 须引入近似条件。已有的夫琅和费近似条件^[2], 限制了衍射公式不能应用于“近衍射场”。因而严格说来, 就不宜用来讨论, 例如, 一般激光器的光学谐振腔中的衍射这样的重要问题。近期来流行一种费涅耳近似条件^[6], 但本文作者认为, 它不宜用来讨论“远衍射场”。事实上按本文符号, 该条件可写为:

$$-\cos(z, s) \approx 1, \quad s \approx z'; \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{4\lambda} \frac{1}{z'^2} \left[(x'^2 + y'^2) - 2(x'x + y'y) + (x^2 + y^2) \right]_{\max}^2 \ll 1. \quad (2.2)$$

令 $\theta_m \approx \text{tg} \theta_m = (\sqrt{x^2 + y^2}/z')_{\max}$ 表示近似条件允许讨论的最大衍射角(参见图3)。当 z 轴穿过开孔时, 据(2.2)有

$$\lim_{z' \rightarrow \infty} \theta_m^4 \lesssim \lim_{z' \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}{z'} \right]_{\max}^4 \ll \lim_{z' \rightarrow \infty} \frac{4\lambda}{z'} \quad (2.3)$$

可见上述近似条件不能用来讨论远衍射场随 θ 的分布。因此如果使用上述近似条件, 就必须把远、近衍射场用二个近似条件, 二个衍射公式分别开来讨论, 较不方便。

1. 关于一个新近似条件的建议

为把远、近衍射场用一个近似条件与衍射公式来讨论, 作者提出如下的近似条件:

$$-\cos(z, s) \approx 1, \quad s \approx s_0; \quad (2.4)$$

• 点光源像点附近除外

$$\frac{1}{4\lambda} \left\{ \frac{1}{s_0^3} \left[2(x'x + y'y) - (x'^2 + y'^2) \right]^2 \right\}_{\max} \ll 1 \quad (2.5)$$

把(2.5)与夫琅和费近似条件[参看[2]§ 8.3(29)、(32)式]比较, 唯一区别是(2.5)少忽略了最关键的一项 $\frac{x'^2 + y'^2}{2\lambda s_0}$, 因此通常的夫琅和费衍射区显然完全包含在(2.5)所允许讨论的区域内。比较(2.5)与(2.2), 除 $s_0^{-3} \leq z'^{-3}$ 外, (2.5)还少忽略了(2.2) [] 中, 在大多数实际情形下对衍射场区域限制最大的一项 $(x^2 + y^2)$ 。当 x', y' 可与 x, y 反号时 (例如 z 轴穿过开孔), (2.5)所允许讨论的衍射场区域, 显然包含了习用费涅耳近似条件(2.2)与夫琅和费近似条件所允许讨论的区域的总和, 并且较这个总和还要大。总之, (2.5)允许讨论远、近衍射场。

2. 衍射公式

把 k_s 展为如下级数

$$k_s = k_{s_0} \left\{ 1 - \left[\frac{2(x'x + y'y)}{s_0^2} - \frac{x'^2 + y'^2}{s_0^2} \right] - \frac{1}{8} \left[\frac{2(x'x + y'y)}{s_0^2} - \frac{x'^2 + y'^2}{s_0^2} \right]^2 + \dots \right\} \quad (2.6)$$

由于 $x'^2 + y'^2 = \rho'^2$ 由(2.5)及图 3 得

$$\frac{k\rho'^2}{2s_0} \approx \frac{k\rho'^2}{2z'} \quad (2.7)$$

令 $p = \frac{x}{s_0}, g = \frac{y}{s_0}, c = e^{-jk s_0 / s_0}$ (2.8)

以(2.5)–(2.8)代入(1.11)、(1.2)得

$$u_n^{(s1)}(P) = \frac{jc}{2\lambda} \iint_A \Psi_n^{(s1)''}(\xi', \varphi', z_0, f, z') e^{jk(px' + gy')} dx' dy' \quad (2.9)$$

$$u(P) = \frac{jc}{2\lambda} \iint_A \Phi''(\xi', \varphi', z_0, f, z') e^{jk(px' + gy')} dx' dy' \quad (2.10)$$

其中

$$\Psi_n^{(s1)''}(\xi', \varphi', z_0, f, z') = 2H\Psi_n^{(s1)}(\xi', \varphi', z_0) \exp\left[jk\rho'^2 \left(\frac{1}{2f} - \frac{1}{2z'} \right) \right] \textcircled{1} \quad (2.11)$$

$$\Phi''(\xi', \varphi', z_0, f, z') = 2H\Phi(\xi', \varphi', z_0) \exp\left[jk\rho'^2 \left(\frac{1}{2f} - \frac{1}{2z'} \right) \right] \quad (2.12)$$

①若入射场不满足条件(1.13), 则此式中常数 2 应改为 $\left[2 - \frac{2n+1}{k^2 q_0} + \frac{\xi'^2}{k^2 q_0} \right]$ 。同时(2.10)、(2.12)均不成立。

引入光瞳函数 $G(\xi', \varphi')$, 令

$$F_n^{(sl)}(\xi', \varphi', z_0, f, z') = \Psi_n^{(sl)''}(\xi', \varphi, z_0, f, z') \cdot G(\xi', \varphi'). \quad (2.13)$$

$$F(\xi', \varphi', z_0, f, z') = \Phi''(\xi', \varphi', z_0, f, z') \cdot G(\xi', \varphi') \quad (2.14)$$

于是(2.9)与(2.10)成为

$$u_n^{(sl)}(P) = \frac{jc}{2\lambda} \iint_{-\infty}^{\infty} F_n^{(sl)}(\xi', \varphi', z_0, f, z') e^{jk(px' + gy')} dx' dy'. \quad (2.15)$$

$$u(P) = \frac{jc}{2\lambda} \iint_{-\infty}^{\infty} F(\xi', \varphi', z_0, f, z') e^{jk(px' + gy')} dx' dy'. \quad (2.16)$$

把 $F_n^{(sl)}$ 与 F 称为元模 $\Psi_n^{(sl)}$ 和光场 Φ 的广义光瞳函数。我们看到 $u(P)$ 、 $u_n^{(sl)}(P)$ 正好是它们的傅里叶变换乘以 c^{-1} 。公式(2.9)、(2.10)与(2.15)、(2.16)正好和平面波(正)入射时平面光波的习用夫琅和费衍射公式形式上一模一样, 较易积分。

如果是单个球面波入射, 那末当满足夫琅和费近似条件时, (2.10)中的被积函数要简化得多。但如果入射光场 Φ 和光瞳函数 G 比较复杂, 苛刻的夫琅和费衍射条件带来的好处就不大了。因此, 作者认为, 在人们日益关心复杂的衍射现象和光源像平面以外的衍射场区域的今天, 近似条件(2.4)–(2.5)似乎便成为可取的了。

3. 几种衍射理论结果的比较

当 $H=1, f \rightarrow \infty$, 并进一步取近似 $s_0 \approx z'$ 时, (2.16)便过渡到[6]中根据第一种瑞利—索末菲衍射公式所到的费涅耳衍射公式([6](4-10)式)。据[7], 二种瑞利—索末菲衍射公式之和的一半, 即为据基尔霍夫衍射理论所得之公式。因此, 本文就证明了: **上述二种理论、三种公式, 在[1]中讨论的一般标量光场入射及条件(1.3)和(1.13)下, 在本文近似条件讨论范围内(包括绝大多数实际讨论情形)实际上完全一致。**

上述两种理论所得结果的对比, 至今是一些作者关心的课题^[8, 6, 7]。[3]中曾据[8]的实验结果得出: 三个公式的结果很不相同。但这与本文的结果并无矛盾。因[3]讨论的情况不满足本文条件(1.3)。反之本文结果却与平面或球面波入射, 满足本文近似条件的情形下, 前人的一些结果或意见[7]相符。当然, 本文结果较[7]要普遍得多。

三、关于衍射场的对称性质和表示

把(2.16)中入射场 Φ 的广义光瞳函数 F 按 φ' 展为傅里叶级数(注意: 对(2.15)也可取如下作法。故本节全部结论可用(1.4)、(1.8)、(2.15)作基础得出)。

$$F(\xi', \varphi', z_0, f, z') = \sum_{s_l=-\infty}^{\infty} C'_{s_l}(\xi', z_0, f, z') e^{js_l \varphi'},$$

$$s = \pm 1, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

只要 F 满足狄义赫利条件, (3.1)右边必绝对且一致收敛。把(3.1)代入(2.26), 并令(参看图3)

$$\theta \approx \sin \theta = \rho / S_0 \tag{3.2}$$

$$\varphi = \theta \cos \varphi, \quad g = \theta \sin \varphi, \quad x' = \rho' \cos \varphi', \quad y' = \rho' \sin \varphi'. \tag{3.3}$$

得到

$$u(P) = \sum_{s_l=-\infty}^{\infty} u^{(s_l)}(P) \tag{3.4}$$

$$u^{(s_l)}(P) = \frac{\pi c}{2\lambda} j^{l+1} q_0 e^{js_l \varphi} \int_0^{\infty} C'_{s_l}(\xi', z_0, f, z') J_l(k\rho'\theta) \xi' d\xi'. \tag{3.5}$$

由于(3.5)中积分与 φ 无关, 据[1] $u^{(s_l)}(P)$ 的轴对称性质便由 $e^{js_l \varphi}$ 决定, 与广义光瞳函数的傅里叶成份 $C'_{s_l} e^{js_l \varphi'}$ 完全一样. 由此得到结论:

1. 如果衍射屏垂直入射光传播轴, 那么衍射场中便不会包含广义光瞳函数所没有的 s_l 成份和轴对称成份. 故衍射场与该函数整体的轴对称性质相同——这一点在夫琅和费衍射这一特殊情形, 最近已为 J. Komrska⁽⁹⁾ (1979) 所得出.

由(3.5)还得出: 广义光瞳函数(3.1)的傅里叶成份 $C'_{s_l} e^{js_l \varphi'}$, 只对衍射场 $u(P)$ 中以同一 s_l 标志的傅里叶成份 $u^{(s_l)}(P)$ 有贡献, 而对 $u(P)$ 中以其它 s_l 标志的傅里叶成份毫无贡献. 故 s_l 不同的成份的衍射, 完全可以分开来讨论.

如果衍射开孔是共轴圆形开孔, 即光瞳函数是理想轴对称的, 那末广义光瞳函数的对称性质便完全由入射场的性质决定. 故

2. 在与1. 相同条件下, 共轴圆开孔衍射场不会包含入射光场所没有的 s_l 成份. 其轴对称性质与入射场相同.

据[10]

$$J_l[(2xt)^{1/2}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(l)}(x)}{\Gamma(n+l+1)} (xt)^{l/2} t^n e^{-t}. \tag{3.6}$$

其中 $K_n^{(l)}(x)$ 为广义 Laguerre 多项式⁽¹⁰⁾, 令 q 为用来描述衍射场的参照高斯光场 $u''_c(\xi'', z'')$ 的复光斑半径, 而取

$$t = (\theta^2/q) s_0^2, \quad x = k^2 q \rho'^2 / 4s_0^2 \tag{3.7}$$

以(3.7)代入(3.6)再代入(3.5), 可以看到 $u^{(s_l)}(P)$ 可表为级数. 其中 $(n+1)$ 项 $(n=0, 1, 2, \dots)$ 所包含的与 ξ'' 和 φ 有关的因子是

$$\frac{\Gamma(n+l/2+1)}{\sqrt{2\pi(n+l/2)}\Gamma(n+l+1)} \left\{ \frac{\sqrt{2\pi(n+l/2)}}{\Gamma(n+l/2+1)} \left(\frac{\xi''^2}{2} \right)^{n+l/2} e^{-\xi''^2/2} e^{js_l \varphi} \right\} \tag{3.8}$$

上式 $\{ \}$ 内函数乘一个与 ξ'' 无关的、仅依赖于 z'' 的适当“系数” $u''_c(0, z)$, 便是[1]中元模场 $\Psi_n^{(s_l)}(\xi'', \varphi, z')$. 由此可见

3. 只要入射场可用〔1〕的方法表示, 衍射屏垂直光传播轴, 光瞳函数满足狄义赫利条件, 那么射场就一定可以用〔1〕的方法表示。

附录A.

关于光场复振幅分布结构的表示和所需元模数的讨论

1. 在任意 $z = \text{常数}$ 平面上, 〔1〕中所讨论光场分布的傅里叶成份 $C_{sl}(\xi, z)e^{jsl\varphi}$ 可近似表示如下 ($\rho \leq a$)

$$C_{sl}(\xi, z) \approx \sum_{n=0}^N \alpha_n^{(sl)}(z) \psi_{ln}(\xi, z) \quad (\text{A.1})$$

其中 $\psi_{ln}(\xi, z)e^{jsl\varphi}$ 即〔1〕中元模场。而

$$\xi^2 = 2\rho^2/q, \quad q^{-1} = \frac{1}{w^2} + \frac{jk}{2R} \quad (\text{A.2})$$

2. 令

$$C_{sl}(\xi, z) = \sum_i C_{sl}^{(i)}(\xi, z) \quad (\text{A.3})$$

适当划分 $C_{sl}^{(i)}$, 使表示峰在 $\rho = \rho_i$ 处的结构, 并有

$$C_{sl}^{(i)}(\xi, z) = \sum_{n=0}^N \alpha_{in}^{(sl)} \psi_{ln}(\xi, z) \quad (\text{A.4})$$

若 $C_{sl}^{(i)}$ 中包含不能表示为(A.4)的成份, 则这些成份必恰好被(A.3)中其它 $C_{sl}^{(i)}$ 中的相应成份所抵消, 没有意义。可证(A.4)可化为

$$C \approx \sum_{p=0}^K \beta_p^{(i)}(z) f_p^{(i)}(\rho) \quad (\text{A.5})$$

$$f_p^{(i)}(\rho) = \frac{\sqrt{2\pi(p+1/2)}}{\Gamma(p+1/2+1)} \left[(p+1/2)\rho^2/\rho_i^2 \right]^{p+1/2} e^{-(p+1/2)\rho^2/\rho_i^2} e^{-jk\rho^2/2R} \quad (\text{A.6})$$

(A.6)表示一峰位置 $\rho = \rho_i$, 峰值近于1, 振幅分布在 ρ_i 两边单调下降的简单结构。令

$$f_p^{(i)}(\rho_i + t_+) = f_p^{(i)}(\rho_i - t_-) = \frac{1}{e} f_p^{(i)}(\rho_i) \quad (\text{A.7})$$

结构宽度用 $2t_{ip} = t_+ + t_-$ 表示, 则 $f_p^{(i)}$ 宽度为

$$2t_{ip} = 2\sqrt{\frac{1}{2p+1}} \rho_i \quad (\text{A.8})$$

3. 设结构 $C_{sl}^{(i)}$ 的 $\beta_p^{(i)}$ 及 K 均已知(将 $C_{sl}^{(i)}$ 进行结构分解), 便可定出(A.4)中的 N 。把 $f_p^{(i)}$ 也用元模场表示后, 比较(A.5)、(A.4)得

$$\begin{aligned} & \alpha_{i(n-l/2)}^{(sl)} \frac{\sqrt{2n\pi}}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{\rho^2}{q}\right)^n e^{-\rho^2/w^2} u_G(0,z) \\ &= (-1)^n \sum_{p=0}^{n-l/2} \frac{(-1)^{p+l/2}}{\sqrt{2\pi(n-p-l/2)}} \frac{\sqrt{2\pi(p+l/2)}}{\Gamma(p+l/2+1)} \\ & \quad \left(\frac{q}{2t_{ip}^2}\right)^{p+l/2} \left[\frac{eq}{w^2} \frac{w^2-2t_{ip}^2}{2t_{ip}^2(n-p-l/2)}\right]^{n-p-l/2} \\ & \quad \left(\frac{\rho^2}{q}\right)^n e^{-\rho^2/w^2} \cdot \beta_p^{(i)} \end{aligned} \tag{A.9}$$

等式两边都有的一个模为1的因子 $e^{-jk\rho^2/2R}$ ，和Stirling公式中一个近于1的因子，都略去了。当 $n'=0$ ，应取 $\sqrt{2n'\pi}$ 为1。这些显然无碍于后面讨论的正确性。若规定要求(A.4)成立的空间区域为 $\rho \leq a$ ，则当

$$2t_{ip}^2 \geq w^2 \tag{A.10}$$

(A.9)右边含 t_{ip} 项可略去的充分条件是

$$n \geq N + l/2 \approx e^2 \left(\frac{a^2}{w^2}\right)^{1+\mu} + \frac{\rho_i^2}{2t_{ip}^2} \approx \frac{e^2 a^2}{w^2} . \tag{A.11}$$

上式中 $\mu = (p+l/2)/(n-p-l/2) \approx \frac{1}{e^2} \left(\frac{W^2}{a^2}\right)^\mu \left(\frac{\rho_i^2 W^2}{2a^2 t_{ip}^2}\right)$ ，可以近似略去，若

$$2t_{ik}^2 < w^2 \tag{A.12}$$

类前得上述条件为

$$n \geq N + l/2 \approx e^2 a^2 / 2t_{ip}^2 \tag{A.13}$$

故若

$$w^2 \geq 2t_{\min}^2 \tag{A.14}$$

便近似求得(A.1)中的 N 为

$$N + l/2 \approx e^2 a^2 / 2t_{\min}^2 . \tag{A.15}$$

$2t_{\min}$ 表(A.3)中所有 $C_{sl}^{(i)}$ 包含的最小结构的径向宽度。对位相分布，上述结构指各 C_{sl} 位相分布与因子 $e^{-jk\rho^2/2R}$ 的位相分布之差所形成的结构。显然实际所需 N ，往往可比(A.15)算得的小许多。

4. 设在整个平面上(垂直光传播轴)。近似有 $C_{sl} = \sum_{n=l/2}^{N'} \alpha_{(n-l/2)}^{(sl)}(z) \phi_{ln}(\xi, z)$ 。 N'

显然可不同于(A.1)中 N 。类似(A.11)，若取 $|q| \geq 2a^2 \geq 2(t_{ip^2})_{\max}$ ，则当

$$n \geq N' + l/2 \approx \frac{e^2 |q|}{2t_{\min}^2} = \frac{e^2 w_0 w}{2t_{\min}^2} \tag{A.16}$$

(A.9)中右边有关各项系数便远小于1(N' 大)。忽略这些项的场表示式，应在 $\rho \leq |q|$

区域内近似正确。为求衍射问题中 $\alpha_n^{(sl)}(z)$ 的法向导数，只要求所得场的三维分布，在开孔附近近似正确就可以了。故取 $|q| \gg a$ ，便可认为所得 $C_{sl}(\xi, z)$ 表示式在全平面内都近似正确。而只要满足条件

$$|q| = w_0 w \geq a^2 \quad (\text{A.17})$$

$|q|$ 的选择便不影响(1.9)、(1.10)及(B.7)的结果和(1.13)的正确性。

附录B

自由空间光场表示式中 $\alpha_n^{(sl)}(z)$ 的形式及它对 z 的导数

已知函数

$$F_{slp}(\xi, \varphi, z) = \left[\sum_{\mu=0}^p (-1)^\mu \binom{l+p}{l+\mu} \left(\frac{2Q^2}{w^2} \right)^{\mu+1/2} \frac{1}{\mu!} \right] e^{jsl\varphi} e^{j(2p+1)\phi(z)} u_G(\xi^2, z) \quad (\text{B.1})$$

为赫姆霍兹方程近似解⁽⁵⁾。为求 $\alpha_n^{(sl)}(z)$ ，把 $C_{sl}(\xi, z) \cdot e^{jsl\varphi}$ 在整个自由空间内表示为(B.1)的线性组合

$$C_{sl}(\xi, z) e^{jsl\varphi} = \sum_{p=0}^{N'} \beta_p^{(sl)} F_{slp}(\xi, \varphi, z) \quad (\text{B.2})$$

$\beta_p^{(sl)}$ 为与 z 无关的常数。在所讨论的 $z = \text{常数}$ 的整个平面上，比较(B.2)与(A.4)，得

$$\alpha_n^{(sl)}(z) = \frac{\Gamma(n+1/2+1)}{\sqrt{2\pi(n+1/2)}} \sum_{p=n}^{N'} (-1)^n \binom{l+p}{l+n} \frac{1}{n!} \left(\frac{2q}{w^2} \right)^{n+1/2} e^{j(2p+1)\phi(z)} \beta_p^{(sl)} \quad (\text{B.3})$$

$$\text{又} \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{2q}{w^2} \right)^{n+1/2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{w_0}{w} e^{j\phi(z)} \right)^{n+1/2} = 2(n+1/2) \left(\frac{2q}{w^2} \right)^{n+1/2} \left[\frac{j}{kw^2} - \frac{1}{2R} \right] \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[e^{j(2p+1)\phi(z)} \right] = j(2p+1) \frac{2}{kw_2} e^{j(2p+1)\phi(z)} \quad (\text{B.5})$$

当 w^2/w_0^2 取得比 1 大得较多，便有

$$2R \sim kw_0 w \quad (\text{B.6})$$

由此得出满足(1.7)的充分条件是

$$N' + 1/2 \ll k^2 w_0 w \quad (\text{B.7})$$

其中 N' 由(A.16)中取 $|q| \rightarrow \infty$ ，或 $|q| \geq a$ 得到。

参 考 文 献

- [1] 李先枢, 一种新的光场表示方法, 物理学报, 30(1981), 503.
- [2] M. Born & E. Wolf, *Principles of Optics*, 4-th edition, Pergamon Press, New York, (1975).
- [3] E. W. Marchand & E. Wolf, *J. O. S. A.*, 56 (1966), 1712.
- [4] E. W. Marcuse, *Light Transmission Optics*, Van Norstrand Reinhold, New York, (1972).
- [5] H. Kogelnik & T. Li, *Applied Optics*, 5 (1966), 1550.
- [6] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill Book Company, New York, (1968).
- [7] E. Wolf & E. W. Marchand, *J. O. S. A.*, 54 (1964), 587.
- [8] S. Silver, *J. O. S. A.*, 52 (1962), 131.
- [9] J. Komrska, *Optica Acta*, 26 (1979), 173—195.
- [10] G. Szegoe, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XX I, (1939).

A Matrix Theory for Diffraction of a Scalar Light Field by Plane Screens

I. The Diffraction Integral

Li Xian Shu

Abstract

Based on the Helmholtz-Kirchhoff integral theorem and the Kirchhoff boundary conditions, a fundamental formula of the diffraction of the general scalar light field by a plane screen, which may be expressed by the light field representation proposed by the author previously^[1], is obtained in this paper. The confines of the application of this formula is discussed in a new point of view.

It is concluded that the fundamental formula of the diffraction of the spherical wave, which is known as Fresnel-Kirchhoff diffraction formula, may be simplified to the form as the formula of the diffraction of the plane wave generally.

To simplify the fundamental diffraction formula, a new approximate condition is suggested, and a new approximate diffraction formula is obtained. On this basis, the diffraction fields discussed up to the present as two different kinds, so called Fraunhofer diffraction and Fresnel diffraction, are now expressed in one and the same formula, and this new formula has the same simple form with the Fourier transform and is more convenient to integrate.

It has also been shown by the author that the results of the Kirchhoff diffraction theory and the Rayleigh-Sommerfeld diffraction theory are in good agreement with each other over the extensive range including the most cases often discussed practically.