# 双曲型方程组的第三特征問題

林　伟　　　　吴兹潜
（数学力学系）　（计算机科学系）

在文〔2〕、〔3〕中，我们讨论了双曲方程组$(H)$[1]的第一特征问题（在两条不同特征线上给定特征条件）和第二特征问题（在三条不同特征线上给定特征条件）解的唯一性的充要条件。如果特征条件给在四条不同特征线上，则称它为第三特征问题，由于方程组$(H_1)$才具有四族特征线，因此，仅有第一类双曲方程组

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\begin{pmatrix}b_1 & 1\\ b_3 & b_1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=0, \qquad (H_1)$$

$$b_3=\left(b_1-\frac{k}{2}\right)\left(b_1-\frac{1}{2k}\right)\neq 0,\ 0<k<1,\ b_1\neq 0,$$

才能提第三特征问题。

本文由于所求得的特征问题的解属于两不同的函数类，在§3、§4将证明在三条特征线上给出$u$(或$v$)的函数值，在另一特征线上给出$v$(或$u$)的值时，除了一种情形外，它们的解在相差一次函数项下是唯一的，此外还将讨论在两条特征线上给出$u$的值，而在另外两特征线上给出$v$的值时，四种特征问题解的唯一性。在本文的§4、§5将继续讨论另二种特征问题解的唯一性，它们的解属于另一函数类。

## §1 齐次函数方程的解

**引理1**　假设齐次函数方程

$$f(x)=\sum_{i=1}^{l}a_i f(\alpha_i x),\quad |\alpha_i|<1,\ -\infty<x<+\infty, \qquad (1)$$

的解连续，而且导数$f'(x)$在$x=0$的邻域存在连续，适合$f'(x)=O(|x|^{\mu-1})$的估计，$\mu\geqslant 1$，则

i）若$\sum_{i=1}^{l}|a_i\alpha_i^{\mu}|<1$，　则$f(x)\equiv const$；

ii）若各$a_i\alpha_i^{\mu}(i=1,2,\cdots\cdots l)$均同号时，当$\left|\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^{\mu}\right|<1$，或$\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^{\mu}=-1$时，

则$f(x)=const$，

iii）若各$a_i\alpha_i^{\mu}(i=1,2,\cdots\cdots l)$均同号时，当$\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^{\mu}=1$时，则$f(x)=cx^{\mu}+f(0)$，$c$为任

意实常数。对于$\mu$假设它使实函数$t^{\mu}$在$-\infty<t<+\infty$有定义。

**证** 作自变数变换$x=t^{\frac{1}{\mu}}$，即$t=x^{\mu}$,将它代入(1)得

$$f(t^{\frac{1}{\mu}})=\sum_{i=1}^{l}a_i f\left((\alpha_i^{\mu}t)^{\frac{1}{\mu}}\right),$$

命$\omega(t)=f(t^{\frac{1}{\mu}})$,上式写成

$$\omega(t)=\sum_{i=1}^{l}a_i\omega(\alpha_i^{\mu}t). \tag{2}$$

对(2)求导数得

$$\omega'(t)=\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^{\mu}\omega'(\alpha_i^{\mu}t), \tag{3}$$

而且

$$\omega'(t)=\frac{1}{\mu}f'(x)x^{\mu-1},$$

因此，$\omega'(t)$在$t=0$的邻域存在且连续。

i) 若$\sum_{i=1}^{l}|a_i\alpha_i^{\mu}|<1$. 由(3)迭代$n$次得

$$\omega'(t)=\sum_{i=1}^{l}a_{i_1}\alpha_{i_1}^{\mu}\sum_{i_2=1}^{l}a_{i_2}\alpha_{i_2}^{\mu}\cdots\cdots\sum_{i_n=1}^{l}a_{i_n}\alpha_{i_n}^{\mu}\omega'\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_{i_k}t\right),$$

当$n\to\infty$时，$\prod_{i_\mu=1}^{n}\alpha_{i_k}\to 0$,因此，存在一正数$M>0$,使当$n$足够大时有

$$\left|\omega'\left(\prod_{i_\mu=1}^{n}\alpha_{i_k}t\right)\right|<M,$$

从而有

$$|\omega'(t)|\leqslant\left(\sum_{i_1=1}^{l}\left|a_{i_1}\alpha_{i_1}^{\mu}\right|\right)\cdot\left(\sum_{i_2=1}^{l}\left|a_{i_2}\alpha_{i_2}^{\mu}\right|\right)\cdots\cdots\left(\sum_{i_n=1}^{l}\left|a_{i_n}\alpha_{i_n}^{\mu}\right|\right)M,$$

命

$$\sum_{i_k=1}^{l}\left|a_{i_k}\alpha_{i_k}^{\mu}\right|=q,\quad 0<q<1,$$

立得

$$|\omega'(t)|\leqslant Mq^n,$$

当$n\to\infty$时，得$\omega'(t)\equiv 0$，即得$\omega(t)=const$,也即

$$f(x)\equiv const.$$

ii) 若$|\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^{\mu}|<1$,由于各$a_i\alpha_i^{\mu}$同号，所以

$$\sum_{i=1}^{l}|a_i\alpha_i^{\mu}|=|\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^{\mu}|<1,$$

由i)的证明，立得

$$f(x)\equiv coost.$$

若 $\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^{\mu}=-1$，在(3)中命$t=0$得$\omega'(0)=0$，由于$\omega'(t)$在$t=0$的附近存在连续，所以对于任一$\varepsilon>0$，有$\delta>0$，使当$|t|<\delta$时有

$$|\omega'(t)|=|\omega'(t)-\omega'(0)|<\varepsilon,$$

当$n$足够大时，$\left|\prod_{k=1}^{n}\alpha_{i_k}^{\mu}t\right|<\delta$，所以有

$$\left|\omega'\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_{i_k}^{\mu}t\right)\right|<\varepsilon,$$

从而有

$$|\omega'(t)|\leqslant\left(\sum_{i_1=1}^{l}\left|a_{i_1}\alpha_{i_1}^{\mu}\right|\right)\cdots\cdots\left(\sum_{i_n=1}^{l}\left|a_{i_n}\alpha_{i_n}^{\mu}\right|\right)\cdot\varepsilon=\varepsilon,$$

由于$\varepsilon>0$的任意性，故有$\omega'(t)\equiv0$，$\omega(t)\equiv const$。即得所证。

iii)　若$\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^{\mu}=1$，由(3)有

$$\omega'(t)-\omega'(0)=\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^{\mu}\left[\omega'(\alpha_i^{\mu}t)-\omega'(0)\right],$$

由于$\omega'(t)$在$t=0$的附近存在连续，故对任一$\varepsilon>0$，存在一$\delta>0$，使当$|t|<\delta$时有

$$|\omega'(t)-\omega'(0)|<\varepsilon.$$

事实上，由于各$a_i\alpha_i^{\mu}$同号，故当$n$足够大时有

$$|\omega'(t)-\omega'(0)|\leqslant\left(\sum_{i_1=1}^{l}\left|a_i\alpha_{i_1}^{\mu}\right|\right)\cdots\cdots\sum_{i_n=1}^{l}\left|a_{i_n}\alpha_{i_n}^{\mu}\right|\Bigg)\cdot\varepsilon=\varepsilon,$$

由于$\varepsilon>0$的任意性，得

$$\omega'(t)=\omega'(0),$$

立得

$$\omega(t)=\omega'(0)t+\omega(0),$$

命$c=\omega'(0)$，即得

$$f(x)\equiv cx^{\mu}+f(0),$$

故得证。

**引理 2**　假设函数方程

$$f(x)=\sum_{i=1}^{l}a_if(\alpha_ix),\ |\alpha_i|<|,\quad -\infty<x<+\infty$$

的解是解析的，则函数方程的解$f(x)$是一多项式或者是一常数。

**证**　由于$f(x)$在$-<x<+\infty$中解析，故

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}c_n x^n,$$

从而得

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n=\sum_{i=1}^{l}a_i\sum_{n=0}^{\infty}c_n(\alpha_i x)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{l}a_i\ \alpha_i^n\right)c_n x^n,$$

比较系数得

$$\left(1-\sum_{i=1}^{l}a_i\ \alpha_i^n\right)c_n=0,\qquad n=0,1,2,\cdots\cdots,$$

由于$|\alpha_i|<1$，故存在一正整数$N$，使当$n>N$时

$$\left|\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^n\right|\leqslant\sum_{i=1}^{l}|a_i||\alpha_i|^n<1,$$

由此立得

$$c_n=0,\ \text{当}n>N\text{时}.$$

故$f(x)$是一多项式。

若对于所有自然数$n$恒有

$$\sum_{i=1}^{l}a_i\ \alpha_i^n\neq 1,$$

则$c_n=0$，$n=1,2,\cdots\cdots$。若$\sum_{i=1}^{l}a_i\neq 1$，则$c_0=0$，得

$$f(x)\equiv 0\ .$$

若$\sum_{i=1}^{l}a_i=1$，则$c_0\neq 0$，又得

$$f(x)\equiv c_0\ .$$

引理2证毕。

系　若引理2的函数方程的解在$-\infty<x<+\infty$中解析，而且存在某一自然数$n_0$，使

$$\sum_{i=1}^{l}a_i\ \alpha_i^n=\begin{cases}1, & \text{当}n=n_0\text{时},\\ \beta,\ \beta\neq 1, & \text{当}n\neq n_0\text{时},\end{cases}$$

则函数方程的解为

$$f(x)=cx^{n_0},\ c=const.$$

## §2 序号1—4的第三特征问题

设$l_i$，$i=1,2,3,4$是方程组$(H_1)$的四根不同特征线。本节要求方程组$(H_1)$的如下特征问题的解：

$$u|_{l_i}=\varphi_i(x),\ v|_{l_j}=\phi(x),\ j\neq i,\ i=1,2,3, \tag{*}$$

对于函数$\varphi_i$、$\phi$作如下的假设：$\varphi_i'$、$\phi'$在$x=0$的邻域内存在连续，而且适合$\varphi_i'(x)=O(|x|^{\mu-1})$，$\phi'(x)=O(|x|^{\mu-1})$的估计，$\mu\geqslant\mu_0$，$\mu_0\geqslant1$为某一实数。称这一假设为条件$(A)$，上述的特征问题有下列四种齐次条件：

| 特征线 \ 序号 | $x=0$ | $y=0$ | $y=kx$ | $y=\frac{x}{k}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $u=0$ | $u=0$ | $u=0$ | $v=0$ |
| 2 | $u=0$ | $u=0$ | $v=0$ | $u=0$ |
| 3 | $u=0$ | $v=0$ | $u=0$ | $u=0$ |
| 4 | $v=0$ | $u=0$ | $u=0$ | $u=0$ |

这里，$u$和$v$还可以互换，对于这种情形因结果相似，我们不讨论。

从一般解$(H_1^*)$出发[2]，在特征线上$u$和$v$的齐次条件可以表示为

$$u|_{x=0}=f_2(y)+f_3(-ky)+f_4\left(-\frac{y}{k}\right)=0, \tag{2.1}$$

$$u|_{y=0}=f_2(0)+f_3(x)+f_4(x)=0, \tag{2.2}$$

$$u|_{y=kx}=f_2(kx)+f_3((1-k^2)x)+f_4(0)=0, \tag{2.3}$$

$$u|_{y=\frac{x}{k}}=f_2\left(\frac{x}{k}\right)+f_3(0)+f_4\left(\frac{k^2-1}{k^2}x\right)=0, \tag{2.4}$$

$$v|_{x=0}=f_1(0)+\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{2}f_3(-ky)+\frac{k-2b_1}{2}f_4\left(-\frac{y}{k}\right)=0, \tag{2.5}$$

$$v|_{y=0}=f_1(x)+\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{2}f_3(x)+\frac{k-2b_1}{2}f_4(x)=0, \tag{2.6}$$

$$v|_{y=kx}=f_1(x)+\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{2}f_3((1-k^2)x)+\frac{k-2b_1}{2}f_4(0)=0, \tag{2.7}$$

$$v|_{y=\frac{x}{k}}=f_1(x)+\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{2}f_3(0)+\frac{k-2b_1}{2}f_4\left(\frac{k^2-1}{k^2}x\right)=0, \tag{2.8}$$

**定理1**　假设方程$(H_1)$的特征问题$(*)$的解在域内属于$C^1$函数类，如果在特征线上给出的函数适合条件$(A)$，则

i)对于序号1,2,3的齐次特征问题解的不唯一的充要条件是$\mu=1$，而且其不唯一解按序如

$$u=0,\ v=cb_1\frac{1-k^2}{k^2}(x-ky),$$

$$u=0,\ v=cb_1(k^2-1)(x-\frac{y}{k}),$$

$$u=0,\ v=cb_1y,$$

如果选择的$\mu>1$，且使实函数$t^\mu(-\infty<t<+\infty)$有定义，则问题的解唯一。

ii)对于序号4，齐次问题的解不存在。

**证** 对于序号1齐次问题，由(2.1)，(2.2)，(2.3)消去$f_2$、$f_4$，并命$F_3(t)=f_3(t)-f_3(0)$，得

$$F_3(t)=F_3(k^2t)-F_3(-(1-k^2)t),$$

当$\mu=1$时，由于

$$k^2-(-(1-k^2)=1,$$

当$\mu>1$时，由于

$$|k^{2\mu}-(-(1-k^2))^\mu|\leqslant k^{2\mu}+(1-k^2)^\mu<k^2+(1-k^2)=1,$$

由引理1得

$$F_3(t)=ct+F_3(0)=ct,$$

$$c=\begin{cases}0, & 当\mu>1,\\ c, & 当\mu=1,\end{cases}$$

由此推得$f_3(t),f_1(t),f_2(t),f_4(t)$。并代入$(H_1^*)$。立得当$\mu>1$时，$u=0,v=0$；

当$\mu=1$时，$c\neq0$，立得

$$u=0,\ v=cb_1\frac{1-k^2}{k^2}(x-ky).$$

同理可以讨论序号2、3的齐次问题解的不唯一性。

iii)对于序号4的齐次特征问题，由于任意函数$f_1(x)$无法确定，故无需讨论。

## §3 序号5—8的第三特征问题

本节继续讨论方程组$(H_1)$在两特征线上给$u$，而在另两特征线上给出$v$的函数值的特征问题的解。即要求方程组$(H_1)$适合条件

$$u|_{l_i}=\varphi_i,\ v|_{l_j}=\psi_j,\ l_i\neq l_j \tag{1*}$$

的特征问题的解。这里，假设$\varphi_i$、$\psi_j(i,j=1,2)$在$x=0$的邻域存在连续，而且它们适合$O(|x|^{\mu-1})$的估计，这里$\mu\geqslant\mu_0$，$\mu_0\geqslant1$为某一实数，称这一假设为条件$(B)$，(1*)对应的齐次条件有如下的情形

| 特征线 / 序号 | x = 0 | y = 0 | y = kx | $y=\frac{x}{k}$ |
|---|---|---|---|---|
| 5 | u = 0 | u = 0 | v = 0 | v = 0 |
| 6 | v = 0 | v = 0 | u = 0 | u = 0 |
| 7 | v = 0 | u = 0 | u = 0 | v = 0 |
| 8 | v = 0 | u = 0 | v = 0 | u = 0 |
| 9 | u = 0 | v = 0 | u = 0 | v = 0 |
| 10 | u = 0 | v = 0 | v = 0 | u = 0 |

**定理 2**　命$\mu_1=\dfrac{ln|k-2b_1|-ln|\frac{1}{k}-2b_1|}{2lnk}$，$\mu_0=max(1,\mu_1)$，假设双曲型方程组$(H_1)$的特征问题的解在域内属于$c^1$函数类，对应于序号 5、6 的特征条件适合条件 $B$，而且$\mu\geqslant\mu_0$，则序号 5、6 的齐次特征问题解不唯一的充要条件是存在$\mu\geqslant\mu_0$，而且$\mu\neq1$使

$$-\frac{\left(\frac{1}{k}-2b_1\right)}{k-2b_1}(-k^2)^{\mu}=1 \qquad (H_4-1)$$

成立，此时序号 5 的不唯一解为

$$\begin{cases} u=c\{[(x-ky)^{\mu}-(-ky)^{\mu}]-\{(x-\frac{y}{k})^{\mu}-(-\frac{y}{k})^{\mu}]\}, \\ v=-c\dfrac{\frac{1}{k}-2b_1}{2}\left\{[(1-k^2)x]^{\mu}-(x-ky)^{\mu}\right\}-c\dfrac{k-2b_1}{2}(x-\frac{y}{k})^{\mu} \end{cases} \qquad (3.1)$$

序号 6 不唯一解为

$$\begin{cases} u=-c\left[\left(-\frac{1-k^2}{k}y\right)^{\mu}-\left(-(x-ky)\right)^{\mu}+\left(x-\frac{y}{k}\right)^{\mu}\right], \\ v=c\dfrac{\frac{1}{k}-2b_1}{2}\left[\left(-(x-ky)\right)^{\mu}-(-x)^{\mu}\right]+c\dfrac{k-2b_1}{2}\left[\left(x-\frac{y}{k}\right)^{\mu}-x^{\mu}\right]. \end{cases} \qquad (3.2)$$

这里，$\mu$使实函数$t^{\mu}$在$-\infty<t<+\infty$内有定义。

**证**　这里只证明序号 5 的情形，序号 6 的证明略去.序号 5 的齐次问题适合(2.1)、(2.2)、(2.7)、(2.8)等四式，由(2.2)、(2.7)、(2.8)消去$f_1$、$f_4$得

$$f_3(x)-f_3(0)=-\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{k-2b_1}\left[f_3(-k^2x)-f_3(0)\right],$$

当$\mu\geqslant\mu_0$时，由于$0<k<1$，故有

$$\left|\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{k-2b_1}\right|\cdot\left|(-k^2)^{\mu}\right|\leqslant\left|\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{k-2b_1}\right|k^{2\mu_0}\leqslant\left|\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{k-2b_1}\right|k^{2\mu_1}=1.$$

由引理1，当且只当存在$\mu\geqslant\mu_0\geqslant 1$使条件$(H_4-1)$成立时，则函数方程有解

$$f_3(t)=ct^{\mu}+f_3(0),\quad c=const,\ \begin{cases}=0, & 当\mu=1,\\ \neq 0 & 当\mu>1,\end{cases}$$

从而可求得$f_i(t)$，将$f_i$代入$(H_1{*})$即得解(3.1)。当$\mu=1$时，得$u=0$，$v=0$。故i)得证。

同理还可以证明下面定理：

**定理3**　命 $\mu_0=max\left(1,\dfrac{ln|k-2b_1|-ln|\frac{1}{k}-2b_1|}{2lnk}\right)$，假设方程组$(H_1)$的特征问题的解在域内属于$C^1$函数类，对应于序号7、8的特征条件适合条件$(B)$，而且$\mu\geqslant\mu_0$，则序号7、8的齐次特征问题解不唯一的充要条件是存在$\mu\geqslant\mu_0$，而且$\mu\neq 1$使

$$\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{k-2b_1}k^{2\mu}=1 \tag{$H_4-2$}$$

成立，这里$\mu$使实函数$t^\mu$在$-\infty<t<+\infty$内有定义。则序号7的不唯一解为

$$\begin{cases} u=-c\left[\left(\dfrac{1-k^2}{k}y\right)^{\mu}-(x-ky)^{\mu}+\left(x-\dfrac{y}{k}\right)^{\mu}\right],\\ v=\dfrac{\frac{1}{k}-2b_1}{2}c\left[(-(1-k^2)x)^{\mu}+(x-ky)^{\mu}-\left(k^2\left(x-\dfrac{y}{k}\right)\right)^{\mu}\right]. \end{cases} \tag{3.3}$$

对应于序号8的不唯一解为

$$\begin{cases} u=c\left[\left(-\dfrac{1-k^2}{k}y\right)^{\mu}+(x-ky)^{\mu}-\left(x-\dfrac{y}{k}\right)^{\mu}\right],\\ v=-c\dfrac{\frac{1}{k}-2b_1}{2}\left[((1-k^2)x)^{\mu}+(x-ky)^{\mu}\right]-\dfrac{k-2b_1}{2}c\left(x-\dfrac{y}{k}\right)^{\mu}. \end{cases} \tag{3.4}$$

## §4 序号10的第三特征问题

**定理4**　假设双曲型方程组$(H_1)$适合序号(10)的条件的解为解析函数。i)若$k<2b_1<\frac{1}{k}$，则问题的解唯一，ii) 若$k>2b_1$或$\frac{1}{k}<2b_1$，则齐次问题的解不唯一的充要条件是存在一正整数$n_0\geqslant 2$，使条件

$$\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{k-2b_1}\left(\frac{1}{k^{n_0}}-\left(\frac{1-k^2}{k}\right)^{n_0}\right)^2=1, \tag{$H_4-3$}$$

成立。而不唯一解为

$$u=-c\left[\left(\frac{k^2-1}{k}y\right)^{n_0}-\left(x-\frac{y}{k}\right)^{n_0}+\left(\frac{x-ky}{k^2}\right)^{n_0}-\left(\frac{1-k^2}{k^2}(x-ky)\right)^{n_0}\right], \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} v=c\frac{\frac{1}{k}-2b^1}{2}&\left[\left(\frac{1-k^2}{k^2}x\right)^{n_0}-\left(\left(\frac{1-k^2}{k}\right)^2x\right)^{n_0}-\left(\frac{x-ky}{k^2}\right)^{n_0}\right.\\ &\left.+\left(\frac{1-k^2}{k^2}(x-ky)\right)^{n_0}\right]+c\frac{k-2b_1}{2}\left(x-\frac{y}{k}\right)^{n_0}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

**证**　由(2.1)，(2.4)，(2.6)，(2.7)省去$f_1$，$f_2$，$f_3$得函数方程

$$f_4(x)-f_4(0)=\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{k-2b_1}\left[f_4\left(\frac{x}{k^2}\right)-2f_4\left(\frac{1-k^2}{k^2}x\right)+f_4\left(\left(\frac{1-k^2}{k}\right)^2x\right)\right], \tag{4.3}$$

命$F_4(t)=f_4(t)-f_4(0)$，由上式易得

$$F_4(t)=\frac{k-2b_1}{\frac{1}{k}-2b_1}F_4(k^2t)+2F_4((1-k^2)t)-F_4((1-k^2)^2t). \tag{4.4}$$

这就是引理2所讨论的函数方程。由函数方程有

$$\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^n=\frac{k-2b}{\frac{1}{k}-2b_1}k^{2n}+2(1-k^2)^n-(1-k^2)^{2n}$$

$$=\frac{k-2b_1}{\frac{1}{k}-2b_1}k^{2n}\left[1-\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{k-2b_1}\left(\frac{1}{k^n}-\left(\frac{1}{k}-k\right)^n\right)^2\right]+1. \tag{4.5}$$

i) 若$k<2b_1<\frac{1}{k}$，则$\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{k-2b_1}<0$，从而有

$$1-\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{k-2b_1}\left(\frac{1}{k^n}-\left(\frac{1}{k}-k\right)^n\right)^2>1,$$

故

$$\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^n\neq1,\quad n=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots,$$

由引理2，得$F_4(t)\equiv0$，即得

$$f_i(s)=f_i(0),\quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

将$f_i(t)$代入$(H_1^*)$得$u=0$，$v=0$。故问题的解唯一。

ii) 若$k>2b_1$或$\frac{1}{k}<2b$，则$\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{k-2b_1}>0$. 若(4.5)式的右端为1，即存在这样的自然数$n=n_0$，使

$$\omega(n)=\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{k-2b_1}\left(\frac{1}{k^n}-\left(\frac{1}{k}-k\right)^n\right)^2=1.$$

$\omega(n)$是单调上升函数，这是因为

$$\frac{d}{dn}\omega(n)=2\frac{\frac{1}{k}-2b}{k-2b_1}\left(\frac{1}{k^n}-\left(\frac{1}{k}-k\right)^n\right)\left[\frac{\ln\frac{1}{k}}{k^n}-\left(\frac{1}{k}-k\right)^n\ln\left(\frac{1}{k}-k\right)\right]$$

$$> 2 \quad \frac{\frac{1}{k}-2b_1}{k-2b_1}\left(\frac{1}{k^n}-\left(\frac{1}{k}-k\right)^n\right)^2 \ln\frac{1}{k}>0,$$

因此至多有一自然数$n=n_0$，使$\omega(n_0)=1$，从而

$$\sum_{i=1}^{l} a_i\alpha_i^n \neq 1, \qquad \text{当}n\neq n_0\text{时。}$$

当$n_0=0$，$\omega(0)=0$；当$n_0=1$，如果$\omega(1)=0$，则$b_1(k^2-1)=0$，这是不可能的，故$n_0\geqslant 2$。由引理2，如果存在一自然数$n_0\geqslant 2$，使$(H_4-3)$成立，立得

$$f_4(t)=ct^{n_0}+f_4(0).$$

从而还可以求得$f_3(t)$，$f_2(t)$，$f_1(t)$，代入$(H_1^*)$便得不唯一解(4.1)，(4.2)。

## §5 序号 9 的第三特征问题

**定理 5** 假设双曲方程组$(H_1)$适合序号 9 的齐次特征条件的解属于解析函数类。

i) 当$\frac{1-k^2}{k}\neq 1$时，若$k<2b_1<\frac{1}{k}$，则问题的解唯一。若$k>2b_1$或$\frac{1}{k}<2b_1$，则问题解不唯一的充要条件是存在整数$n_0\geqslant 2$，使

$$\frac{k-2b_1}{\frac{1}{k}-2b_1}\left[k^{n_0}-\left(-\frac{1-k^2}{k}\right)^{n_0}\right]^2=1 \qquad (H_4-5)$$

而且当$\frac{1-k^2}{k}<1$ 时，至少有一奇数$n_0=2m_1+1\geqslant 3$和有限个大于 1 的偶数使$(H_4-5)$成立。当$\frac{1-k^2}{k}>1$时，至多只有一偶数$n_0=2m_2\geqslant 2$和有限个大于 1 的奇数使$(H_4-5)$成立。

ii) 当$\frac{1-k^2}{k}=1$时。若$k<2b_1$，则问题解不唯一的充要条件是存在一偶数$n_0=2m_2$，使$(H_4-5)$成立。若$k>2b_1$，则问题的解不唯一的充要条件是存在一奇数$n_0=2m+1$使$(H_4-5)$成立。而且其不唯解（在齐次特征条件下）呈如下的形式：

$$u_\mu=C_\mu\left\{\left[\left(x-\frac{y}{k}\right)^\mu+\left(-\frac{y}{k}\right)^\mu\right]-\frac{k-2b_1}{\frac{1}{k}-2b_1}\left[(x-ky)^\mu\right.\right.$$
$$\left.\left.+(ky)^\mu+\left(\frac{1-k^2}{k^2}(x-ky)\right)^\mu+\left(\frac{1-k^2}{k}y\right)^\mu\right]\right\}, \qquad (5.1)$$

$$v_\mu=C_\mu\frac{k-2b_1}{2}\left\{\left(\frac{1-k^2}{k^2}x\right)^\mu-\left(\frac{1-k^2}{k^2}(x-ky)\right)^\mu\right.$$
$$\left.-(x-ky)^\mu+\left(x-\frac{y}{k}\right)^\mu\right\}. \qquad (5.2)$$

这里$\mu$为正整数。

**证** 由序号 9 的齐次条件代入$(H_1^*)$便得(2.1)，(2.3)，(2.6)，(2.8)，消去$f_i$

$(i=1,2,3)$，因之得函数方程

$$F_4(t) = \frac{k-2b_1}{\frac{1}{k}-2b_1}F_4(k^2t)+2F_4((1-k^2)t)-F_4((1-k^2)^2t),$$

$$F_4(t)=f_4(t)-f_4(0).$$

i) 当 $\frac{1-k^2}{k}\neq 1$ 时。

i-1) 若 $\frac{1-k^2}{k}<1$，则函数方程是引理 2 所讨论的，而且有

$$\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^n=\frac{k-2b_1}{\frac{1}{k}-2b_1}\left[k^n-\left(\frac{-1-k^2}{k}\right)^n\right]^2 \tag{5.3}$$

若 $k<2b_1<\frac{1}{k}$，则 $\frac{k-2b_1}{\frac{1}{k}-2b_1}<0$，式(5,3)对于一切的自然数 $n$ 它恒不为 1，根据引理 2 得 $F_4(t)=0$，由此可以证明问题的解唯一。

若 $k>2b_1$; 则 $0<\frac{k-2b_1}{\frac{1}{k}-2b_1}<1$。若 $\frac{1}{k}>2b_1$，则 $\frac{k-2b_1}{\frac{1}{k}-2b_1}>1$。当 $n$ 为奇数时，由(5.3)有

$$\omega_1(n)=\frac{k-2b_1}{\frac{1}{k}-2b_1}\left[k^n+\left(\frac{1-k^2}{k}\right)^n\right]^2,$$

由于 $\frac{1-k^2}{k}<1$，得

$$\frac{d}{dn}\omega_1(n)=2\frac{k-2b_1}{\frac{1}{k}-2b_1}\left[k^n+\left(\frac{1-k^2}{k}\right)^n\right]\left[k^n\ln k+\left(\frac{1-k^2}{k}\right)^n\ln\frac{1-k^2}{k}\right]<0,$$

所以 $\omega_1(n)$ 是单调下降的函数。

仿照定理 4 的作法，可证至多有一 $n_0=2m_1+1\geqslant 3$ 使 $(H_4-5)$ 成立，从而可得问题不唯一解为

$$u=u_{2m_1+1},\quad v=v_{2m_1+1}.$$

当 $n=2m$ 为偶数时，若 $k>2b_1$，则 $0<\frac{k-2b_1}{\frac{1}{k}-2b_1}<1$，又由于 $\left[k^{2m}-\left(\frac{1-k^2}{k}\right)^{2m}\right]^2<1$，式(5.3)对于一切正的偶数恒小于1，根据引理 2 得 $F_4(t)=0$，故问题的解唯一。若 $\frac{1}{k}<2b_1$，则 $\frac{k-2b_1}{\frac{1}{k}-2b_1}>1$，当 $n=n_0=2m_2$，使 $(H_4-5)$ 成立时，有

$$f_4(t)=C_{2m_2}t^{2m_2}+f_4(0),$$

另方面，由于

$$\omega_2(n)=\frac{k-2b_1}{\frac{1}{k}-2b_1}\left[k^n-\left(\frac{1-k^2}{k}\right)^n\right]^2,$$

得

$$\lim_{n\to\infty}\omega_2(n)=0,$$

所以存在正整数$N$，使当 $n=2m>2N$时，

$$|\omega_2(2m)|<1,$$

所以有有限个偶数$n_0\geqslant 2$，使$(H_4-5)$成立。即$f_4(t)$是由有限个非常数解的线性组合，故得齐次问题的不唯一解为

$$u=\sum_{\mu=1}^{N-1}u_{2\mu},\qquad v=\sum_{\mu=1}^{N-1}v_{2\mu}.$$

i－2）若$\frac{1-k^2}{k}>1$，这时函数方程改写成

$$F_4(t)=-F_4\left(\left(\frac{k^2}{1-k^2}\right)^2t\right)+2F_4\left(-\frac{k^2}{k-k^2}t\right)$$

$$+\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{k-2b_1}F_4\left(\frac{k^2}{(1-k^2)^2}t\right).$$

这一函数方程属于引理2所讨论的。而且

$$\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^n=-\left(\frac{k^2}{1-k^2}\right)^{2n}+2\left(-\frac{k^2}{1-k^2}\right)^n+\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{k-2b_1}\left(\frac{k}{1-k^2}\right)^{2n}=1$$

$$+\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{k-2b_1}\left(\frac{k}{1-k^2}\right)^{2n}\left\{1-\frac{k-2b_1}{\frac{1}{k}-2b_1}\left[k^n-\left(\frac{1-k^2}{k}\right)^n\right]^2\right\},$$

如果上式等于1，则要求存在一自然数$n$，使

$$\omega_2(n)=\frac{k-2b_1}{\frac{1}{k}-2b_1}\left[k^n-\left(-\frac{1-k^2}{k}\right)^n\right]^2=1.$$

当$k<2b_1<\frac{1}{k}$，则$\frac{k-2b_1}{\frac{1}{k}-2b_1}<0$，从而得

$$\omega_2(n)\leqslant 0,\quad \sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^n\neq 1,\qquad n=0,1,\cdots\cdots,$$

故得$F_4(t)=0$，故问题的解唯一。

若$k>2b_1$ 或 $\frac{1}{k}<2b_1$，则$\frac{k-2b_1}{\frac{1}{k}-2b_1}>0$。当$n=2m$时，由于$\frac{1-k^2}{k}>1>k$，所以

$$\frac{d\omega_2(\mu)}{d\mu}=2\frac{k-2b_1}{\frac{1}{k}-2b_1}\left[k^\mu-\left(\frac{1-k^2}{k}\right)^\mu\right]\left[k^\mu\ln k-\left(\frac{1-k^2}{k}\right)^\mu\ln\left(\frac{1-k^2}{k}\right)\right]$$

$$< 2\frac{k-2b_1}{\frac{1}{k}-2b_1}\left(k^{\mu}-\left(\frac{1-k^2}{k}\right)^{\mu}\right)^2 lnk<0,$$

即$\omega_2(\mu)$是单调下降的，所以至多有$-\mu=n_0=2m_2\geqslant 2$，使$(H_4-5)$成立，根据引理2，函数方程有解

$$f_4(t)=C_{2m_2}t^{2m_2}+f_4(0),$$

故齐次问题的不唯一解为

$$u=u_{2m_2},\quad v=v_{2m_2},$$

当$n=2m+1$为奇数时，如果要求$\sum\limits_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^m=1$，即要求

$$\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{k-2b_1}\left(\frac{k}{1-k^2}\right)^{2n}-\left(1+\left(\frac{k^2}{1-k^2}\right)^n\right)^2=0.$$

命

$$A=\frac{((1-k^2)^n+k^{2n})^2}{k^{2n}},$$

则$A>1$，从而得

$$2b_1=\frac{Ak^2-1}{k(A-1)}<k.$$

由于$b_1\neq 0$，因此，有$n=n_0=2m_2+1\geqslant 3$，使$(H_4-5)$成立，而且这样的$m_2$有有限多个，故齐次问题的解为

$$u=\sum_{m_2}u_{2m_2},\quad v=\sum_{m_2}v_{2m_2}.$$

当$2b_1>\frac{1}{k}$时，对于$m_0$为奇数的情形，问题的解是唯一的。

ii）当$\frac{1-k^2}{k}=1$时，函数方程为

$$F_4(t)=(k-2b_1)[F_4(k^2t)-2F_4(-kt)],$$

而且

$$\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^{2n}=(k-2b_1)(k^{2n}-2(-k)^n).$$

ii-1）若$k<2b_1$，当$n$为奇数时，由于

$$(k-2b_1)(k^{2n}-2(-k)^n)<0,$$

由引理2得$F_4(t)=0$，故问题的解唯一。

当$n=2m$时，

$$\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^{2m}=(k-2b_1)(k^{4m}-2k^{2m}),$$

由于$(k-2b_1)(k^{2\mu}-2k^{\mu})$对于$\mu$是单调下降的，所以至多有一偶数$n_0=2m_2$，使

$$(k-2b_1)(k^{4m_2}-2k^{2m_2})=1,$$

即$(H_4-5)$成立，故齐次问题不唯一解表示为

$$u = u_{2m_2}, \quad v = v_{2m_2}.$$

ii-2) 若$k > 2b_1$。当$n$为奇数时，由于

$$(k-2b_1)(k^{2\mu}+2k^{\mu})$$

是单调下降的，因此，至多有$-n = n_0 = 2m_1+1$使$(H_4-5)$成立，齐次问题的不唯一解为

$$u = u_{2m_1+1}, \quad v = v_{2m_1+1}.$$

当$n$为偶数时，由于

$$(k-2b_1)(k^{4m_2}-2k^{2m_2}) \leqslant 0, \; m_2 = 0, 1, \cdots\cdots,$$

故问题的解是唯一的。

## 参 考 文 献


〔1〕华罗庚、吴兹潜、林伟，二阶两个自变数两个未知函数的常系数线性偏微分方程组，科学出版社，1979.

〔2〕吴兹潜、林伟，双曲方程组的第一特征问题，中山大学学报(自然科学)，1980，1.

〔3〕吴兹潜、林伟，双曲方程组的第二特征问题，中山大学学报(自然科学)，1980，2.


# The Third Characteristic Problem for the Systems of the Hyperbolic Equations


*Lin Wei* *Wu Cisqian(Wu Tzechine)*


## Abstract


What we call the third characteristic problem for the system of the hyperbolic equations

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\begin{pmatrix}b_1 & 1\\ b_3 & b_1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = 0 \qquad (H_1)$$

$$b_3 = b_1^2 - \frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{k}\right)b_1 + \frac{1}{4} \neq 0, \qquad b_1 \neq 0, \qquad 0 < k < 1,$$

is to look for the unknow functions $u$, $v$, satisfying the characteristic conditions.

$$u|_{l_i} = \varphi_i(x), \qquad v|_{l_j'} = \phi(x), \qquad l_j' \neq l_i \qquad i = 1, 2, 3$$

or

$$u|_{l_i} = \varphi_i(x), \qquad v|_{l_j'} = \phi(x), \qquad l_i \neq l_j' \qquad i, j = 1, 2$$

where $l_i$, $l_j$ are four characteristic lines of $(H_1)$. The sufficient and necessary conditions for the uniqueness of the third characteristic problem, as we know, is still left open.

In this paper we completely solve the above-mentioned problem. Further, we also find out all trivial solutions for $(H_1)$.