马尔可夫过程的几可乘泛函及伴随的转移概率变换

邓 永 录

（数学力学系）

§1 引 言

本文沿用〔1〕、〔2〕中的记号和定义。设$\alpha_t(\omega)$（$0\leqslant t<\xi(\omega)$）是齐次马尔可夫过程$X=(x_t, \zeta, \mathsf{M}_t, P_x)$的几压缩几齐次几可乘泛函（详细定义见后），则$\widetilde{P}(t,x,\Gamma)=\mathsf{M}_x(\chi_\Gamma(x_t)\alpha_t)$（$t\geqslant 0$，$x\in E$，$\Gamma\in\widetilde{\mathsf{B}}$）定义相空间$(E, \widetilde{\mathsf{B}})$上一转移函数。从直观看来，这相当于以一定的规律缩短原过程的生命而得到一新的转移函数，α_t给出在时间区间〔$0, t$〕内生命不缩短的概率。$\widetilde{P}(t, x, \Gamma)$对应的半群算子是

$\widetilde{T}_t f(x)=\int_E f(y)\widetilde{P}(t, x, dy)=\mathsf{M}_x\{f(x_t)\alpha_t\}$，这里$f$是任意的$\overline{\mathsf{B}}$可测有界函数。

人们有兴趣于研究在什么条件下$\widetilde{P}(t, x, \Gamma)$（或$\widetilde{T}_t$）仍保持$P(t, x, \Gamma)$（或$T_t$）所具有的一系列重要性质。例如，Е.Б.Дынкин[1]、梁之舜[5]和P.A. Meyer[3,4]都曾分别对这类问题的某些方面进行了研究。本文的目的是较系统和全面地进一步研究这类问题，主要是给出连系于几压缩几齐次几可乘泛函α_t的转移函数$\widetilde{P}(t, x, \Gamma)$保持原过程的转移函数$P(t, x, \Gamma)$的某些重要性质（例如，保守性、正规性、概连续性、强马氏性、*Feller*性、强*Feller*性和可微性等）的条件。在讨论*Feller*性和强*Feller*性时，为了把〔6〕的一些结果强化和推广到D_0空间，首先对作者在〔8〕中提出的D_0空间的性质和结构作进一步讨论，这些工作可以看作是〔8〕的继续。

定义1.1 设$X=(x_t, \zeta, \mathsf{M}_t, P_x)$是一齐次马尔可夫过程，它的相空间是$(E, \mathsf{B})$。又设对每一$\omega\in\Omega$（$\Omega$是基本事件空间）对应某一区间$I(\omega)\subseteq$〔$0,\infty$）。我们把取值于某一可测空间（$\widetilde{E}$，$\widetilde{\mathsf{B}}$）的映像

$$\alpha=\alpha_t^s(\omega) \qquad (s\leqslant t\in I(\omega))$$

称做过程X的泛函，若它满足下列条件：对任意$\Gamma\in\widetilde{\mathsf{B}}$

1° $\{\omega:\ \alpha_t^s(\epsilon)\,\omega\,\Gamma\}\in\overline{\mathsf{N}}$ (1)；

---

(1) 若以N_0代$\overline{\mathsf{N}}$，则泛函α称做N可测的。至于N_0和$\overline{\mathsf{N}}$的定义可参看〔1〕或〔2〕。

(2) 马时又称马尔可夫时间，其定义可参看〔1〕或〔2〕。

2° $\{\omega:\alpha_t^s(\omega)\in\Gamma,\ \zeta(\omega)>t\}\in\mathbf{M}_t$。

今后为叙述简单起见，我们假设对任意$\omega\in\Omega$均有$I(\omega)=[0,\zeta(\omega))$，于是条件$1^\circ$和$2^\circ$可合并为：对任意$0\leqslant s\leqslant t$和任意$\Gamma\in\widetilde{\mathbf{B}}$

$$\{\omega:\alpha_t^s(\omega)\in\Gamma\}\in\overline{\mathbf{N}}\cap\mathbf{M}_t. \tag{1.1}$$

还假设$\widetilde{E}=[0,\infty)$和$\widetilde{\mathbf{B}}$是$[0,\infty)$上的波雷耳代数，相空间一般是D_0空间。

泛函的可乘性、几可乘性、连续性、几连续性、压缩性、几压缩性以及两泛函等价（或几等价）的定义可参看[2]。本文不再复述。

定义1.2　几可乘泛函α称做强几可乘的，若它满足下列两条件：

(A) 对任意$0\leqslant s<t$，$\alpha_u^s(\omega)$作为(u,ω)的二元函数在$[s,t]\times\Omega_t$上是$\mathbf{B}_{[s,t]}\times\mathbf{M}_t$可测的。

(B) 对任意$s\geqslant0$，任意马时[2] $\tau\geqslant s$，任意$t\geqslant0$和任意$x\in E$有

$$\alpha_{\tau+t}^s=\alpha_\tau^s\,\alpha_{\tau+t}^\tau\qquad(a.\ a.\ \Omega_{\tau+t},\ P_x). \tag{1.2}$$

若上式代以

$$\alpha_{\tau+t}^s=\alpha_\tau^s\,\theta_\tau\,\alpha_t\qquad(a.\ a.\ \Omega_{\tau+t},\ P_x). \tag{1.3}$$

则称做强几齐次几可乘泛函，这里θ是齐次性定义中的“挪移算子”。

定义1.3　相空间E中的点x称做(关于α的)不变点，如果

$P_x\{\omega:\alpha_s^s(\omega)=1$　对所有$0\leqslant s<\zeta(\omega)\}=1$，否则称做非不变点。

注意若α是齐次泛函，则上述条件等价于

$$P_x\{\omega:\alpha_0(\omega)=1\}=1.$$

定义1.4　设α是齐次马尔可夫过程X的几压缩几齐次几可乘泛函，由公式$\widetilde{P}(t,x,\Gamma)=M_x\{\chi_\Gamma(x_t)\alpha_t\}$定义$(E,\overline{\mathbf{B}})$上一转移函数，我们称之为$\alpha$-转移函数，它对应的半群$\widetilde{T}_t$称做$\alpha$-半群。如果$\widetilde{T}_t$还满足条件：对$X$的任意马时$\tau$有

$$\widetilde{T}_{\tau+t}f(x)=\widetilde{T}_\tau\ \widetilde{T}_t\,f(x)$$

则称之为强α-半群。

§2 α-转移函数的保守性、正规性和概连续性；强几齐次几可乘泛函和强α-半群

此后除特别声明外，一般假设泛函α是几压缩、几齐次、几可乘的，同时简称做泛函。

定理2.1　设α是马尔可夫过程X的泛函。1°若X的转移函数有$P(t,x,E)=1$对某$x\in E$和某$t\geqslant0$，则$\widetilde{P}(t,x,E)=1$的充分必要条件是

$$\alpha_t(\omega)=1\qquad(a.\ a.\ \Omega_t,\ P_x). \tag{2.1}$$

2°若$P(t,x,\Gamma)$是正规[3]（概连续）的，则$\widetilde{P}(t,x,\Gamma)$是正规（概连续）的充分必要条件是对任意$x\in E$和$t_n\downarrow 0$有

$$\lim_{t_n\downarrow 0} \alpha_{t_n}=1 \qquad (a.\ a.\ P_x). \tag{2.2}$$

这条件又等价于α_{t_n}依概率P_x收敛于1。

〔证〕 1°可直接由$\widetilde{P}(t,x,\Gamma)$的定义推出。往证2°。因正规性是概连续性的特款（取$U_x=E$），故只须就概连续性证明这一命题。这时要证明从α_{t_n}依概率P_x收敛于1可推出$\widetilde{P}(t,x,\Gamma)$的概连续性，以及从$\widetilde{P}(t,x,\Gamma)$的概连续性可推出(2.2)。下面证明第一个论断。

设U是任一可测开集，x是U中任一点，我们要证明

$$\lim_{t\downarrow 0} \widetilde{P}(t,x,U)=1$$

这相当于要求对任意数列$t_n\downarrow 0$均有

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{P}(t_n,x,U)=1.$$

由依概率收敛的定义知对任意$\varepsilon>0$，$\delta>0$，存在一正数N_0，使当$n>N_0$时有

$$P_x\{\omega:|1-\alpha_{tn}(\omega)|>\delta\}<\varepsilon,$$

故这时有

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(t_n,x,U)&=\int_\Omega \chi_U(x_{t_n})\alpha_{t_n}P_x(d\omega)\\ &\geqslant\int_{\{\omega:|1-\alpha_{t_n}|\leqslant\delta\}}\chi_U(x_{t_n})\alpha_{t_n}P_x(d\omega)\\ &\geqslant\int_{\{\omega:|1-\alpha_{t_n}|\leqslant\delta\}}(1-\delta)\chi_U(x_{t_n})P_x(d\omega)\\ &\geqslant(1-\delta)\int_\Omega\chi_U(x_{t_n})P_x(d\omega)-\varepsilon\geqslant P(t_n,x,U)-\delta-\varepsilon.\end{aligned}$$

令$n\to\infty$得 $\varliminf_{n\to\infty}\widetilde{P}(t_n,x,U)\geqslant 1-\delta-\varepsilon$，由$\delta$和$\varepsilon$的任意性即得所欲证。

第二个论断的证明从略。

因为$\widetilde{P}(t,x,\Gamma)\leqslant P(t,x,\Gamma)$，由此易得

定理2.2[4] 若过程X的转移函数$P(t,x,\Gamma)$分别满足

有界性条件：对任意$u\geqslant 0$

$$\lim_{y\to\infty}\sup_{t\leqslant u} P(t,y,\Gamma)=0;$$

---

(3) $P(t,x,\Gamma)$称做正规的，若对任意$x\in E$恒有$P(0,x,E)=1$.

(4) 这里假设相空间E是具有可数基的局部紧Hausdorff空间，$\overline{U_\varepsilon(x)}$表示x的$\varepsilon$-邻域之余集．参看〔2〕第3章§2．

连续性条件：对任意$\varepsilon>0$

$$\lim_{t\downarrow 0} t^{-1} \sup_{x\in\Gamma} P(t,x,\overline{U_\varepsilon(x)})=0\ ;$$

右连续性条件：对任意$\varepsilon>0$

$$\lim_{t\downarrow 0} \sup_{x\in\Gamma} P(t,x,\overline{U_\varepsilon(x)})=0\ .$$

则$\widetilde{P}(t,x,\Gamma)$亦分别满足对应的条件。

引理2.1　若对任意$0\leqslant s\leqslant t$，$\overset{s}{\alpha}_u(\omega)$是变元$(u,\omega)$的$\mathbf{B}_{[s,t]}\times\mathbf{M}_t$可测函数，$\tau$是任一马时$(\tau\geqslant s)$，则$\overset{s}{\alpha}_\tau(\omega)$是$(\Omega_\tau,\mathbf{M}_\tau)$到$([0,\infty),\ \mathbf{B}_{[0,\infty)})$的可测函数。

证明从略。

定理2.3　设X是强马尔可夫过程，α_t是X的强几齐次几可乘泛函，则它对应的α-半群是强α-半群。

〔证〕　对于X的任意马时τ有

$$\widetilde{T}_{\tau+t}f(x)=\mathbf{M}_x[f(x_{t+\tau})\alpha_{\tau+t}]$$

$$=\mathbf{M}_x[f(\theta_\tau x_t)\alpha_\tau\theta_\tau\alpha_t]=\mathbf{M}_x[\alpha_\tau\theta_\tau(f(x_t)\alpha_t)].$$

由引理2.1知α_τ是$\mathbf{M}_\tau$可测的，而$f(x_t)\alpha_t$是$\overline{\mathbf{N}}$可测的，故由[2]之　定理3.11即可推得

$$\widetilde{T}_{\tau+t}f(x)=\mathbf{M}_x[\alpha_\tau\mathbf{M}_{x_\tau}f(x_t)\alpha_t]=\widetilde{T}_\tau\widetilde{T}_t f(x)$$

设τ是任意马时，α是X的泛函。若τ最多取可列个值，则易证(1.3)恒成立，据此又不难证明下面的定理。

定理2.4　若X的泛函是右连续的，而且对每一$x\in E$有

$$\lim_{s_n\downarrow s} \overset{s_n}{\alpha}_t(\omega)=\overset{s}{\alpha}_t(\omega)\quad 对所有0\leqslant s<t,\ (a.a.P_x,\Omega_t)$$

则α是强几可乘的。

推论　若所有$x\in E$都是泛函α的不变点，α又是右连续，则α是强几可乘的。

定理2.5　若完满的[5]马尔可夫过程X的泛函α是几右连续的，而且对每一$x\in E$有

$$\alpha_0=1\qquad (a.a.P_x),\tag{2.3}$$

则α所对应的半群是强α-半群。

〔证〕　注意到几等价的泛函对应相同的转移概率$\widetilde{P}(t,x,\Gamma)$，我们先证明存在一使所有$x\in E$都是不变点的齐次几右连续泛函$\widetilde{\alpha}$与$\alpha$几等价，为此只须令$\overset{s}{\widetilde{\alpha}}_{s+t}(\omega)=\theta_s\alpha_t(\omega)$(对$s\geqslant0,t\geqslant0$)。由$\alpha$之几齐次性知$\widetilde{\alpha}$与$\alpha$几等价，又由$\widetilde{\alpha}$之定义易知$\widetilde{\alpha}$是齐次几右连续几可

(5)　$X=(x_t,\mathfrak{F},M_t,P_x)$称做完满的，如果$M_0=\overline{M}_0$和$M_t=\overline{M}_t$，这里$\overline{M}_0$和$\overline{M}_t$分别表示$M_0$和$M_t$关于测度族$P_x(x\in E)$的完备化。

乘的。再由(2.3)式推知所有$x\epsilon E$都是$\widetilde{\alpha}$的不变点。

其次，我们证明存在一个除具有$\widetilde{\alpha}$的性质外还是右连续的泛函$\widetilde{\widetilde{\alpha}}$与$\widetilde{\alpha}$等价。事实上，由几可乘性和几压缩性知存在一全测集$\widetilde{\Omega}$，使当$\omega\epsilon\widetilde{\Omega}$和$t$取有理数值时$\alpha_t(\omega)$是$t$的不增函数。对于任意实数$t$，令

$$\widetilde{\widetilde{\alpha}}_t=\begin{cases}\lim\limits_{t_n\downarrow t}\widetilde{\alpha}_{t_n}(\omega) & t_n\text{取有理数值，}\omega\epsilon\widetilde{\Omega}\text{；}\\ 1 & \omega\epsilon\Omega\backslash\widetilde{\Omega}\text{。}\end{cases}$$

由$\widetilde{\alpha}$的几右连续性知$\widetilde{\widetilde{\alpha}}$与$\widetilde{\alpha}$几等价。又由$X$的完满性得$\widetilde{\widetilde{\alpha}}_t$所需的可测性。$\widetilde{\widetilde{\alpha}}$的右连续性则是显然的。余下只需引用定理2.4的推论。

定义2.2 马尔可夫过程X的泛函α_t称做拟左连续的，若对X的任意单调上升于马时τ的马时序列$\{\tau_n\}$和每一$x\epsilon E$，$s\geqslant 0$有

$$\lim_{n\to\infty}\alpha^s_{s+\tau_n}=\alpha^s_{s+\tau}\qquad(a.\ a.\ \Omega_\tau,\ P_x).\tag{2.4}$$

可以证明，若X是拟左连续[6]的强马尔可夫过程，而且α是压缩的，则对任意有界可测连续函数$f(x)$有

$$\widetilde{T}_{\tau_n}f(x)\to\widetilde{T}_\tau f(x)\qquad\text{当}n\to\infty\text{。}\tag{2.5}$$

定理2.6 若X是拟左连续的强马尔可夫过程，泛函α是几左连续的，则(2.5)式成立。

定理的证明与定理2.5的相类似。

定理2.7 若完满的马尔可夫过程X的强几可乘泛函${}^{(k)}\alpha_t(k=1,2,\cdots)$满足条件：对任意初始分布$\mu$和任意$v\geqslant 0,\varepsilon>0$有

$$\lim_{m,n\to\infty}P_\mu\left\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant u}\left|{}^{(m)}\alpha^s_t-{}^{(n)}\alpha^s_t\right|>\varepsilon\right\}=0\ .\tag{2.6}$$

则${}^{(k)}\alpha_t$依概率一致收敛于某一强几可乘泛函α_t。

〔证〕 由〔2〕第6章引理6.1知${}^{(k)}\alpha_t$依概率一致收敛于某一泛函$\widetilde{\alpha}_t$，而且可选出一几乎处处一致收敛的子列${}^{(k_n)}\alpha_t$，这就是说存在一全测集$\widetilde{\Omega}$，使得当$\omega\epsilon\widetilde{\Omega}$时对任意$v\geqslant 0$有

$$\sup_{0\ s\ t\leqslant u}\left|{}^{(k_n)}\alpha^s_t(\omega)-\widetilde{\alpha}^s_t(\omega)\right|\to 0\quad k_n\to\infty.$$

现在定义一新泛函如下：

$$\alpha^s_t(\omega)=\begin{cases}\widetilde{\alpha}^s_t(\omega) & \omega\varepsilon\widetilde{\Omega}\text{；}\\ 1 & \omega\epsilon\Omega\backslash\widetilde{\Omega}\text{。}\end{cases}$$

(6) 简单地说，X满足条件：$\lim\limits_{\tau_n\uparrow\tau}x_{\tau_n}=x_\tau(a.a.\Omega_\tau,P_x)$

易见$^{(k_n)}\alpha_t^s$几乎处处一致收敛于α_t^s，α_t^s具有所要求的二元可测性．下面证明α_t^s满足(1.2)．事实上，对任意马时τ和$u\geqslant 0$有

$$\{\tau+u<\zeta\}=\bigcup_{r_j\text{为有理数}}\{\tau+u\leqslant r_j<\zeta\}=\bigcup_{r_j}\Omega_{r_j}$$

由$^{(k_n)}\alpha_t$的强几可乘性得$^{(k_n)}\alpha_{\tau+u}={}^{(k_n)}\alpha_\tau{}^{(k_n)}\alpha_{\tau+u}^{\tau}$ $(a.a.\ \Omega_{\tau+u},P_x)$．我们断言

$$\lim_{k\to\infty}{}^{(k_n)}\alpha_{\tau+u}=\alpha_{\tau+u}\qquad(a.a.\Omega_{\tau+u},P_x);$$

$$\lim_{k\to\infty}{}^{(k_n)}\alpha_\tau=\alpha_\tau\qquad(a.a.\Omega_\tau,P_x).$$

$$\lim_{k\to\infty}{}^{(k_n)}\alpha_{\tau+u}^{\tau}=\alpha_{\tau+u}^{\tau}\qquad(a.a.\Omega_{\tau+u},P_x).$$

假若不然，例如，存在一集合Δ，使得$P_x(\Delta)>\delta>0$和当$\omega\epsilon\Delta$时$\lim\limits_{k\to\infty}{}^{(k_n)}\alpha_{\tau+u}(\omega)\neq\alpha_{\tau+u}(\omega)$．但另一方面，由$^{(k_n)}\alpha_t$的几乎处处一致收敛性知在每一$\Omega_{r_j}$上有

$$\lim_{k_n\to\infty}{}^{(k_n)}\alpha_{\tau+u}(\omega)=\alpha_{\tau+u}(\omega)\qquad(a.a.\Omega_{r_j},P_x).$$

又因$P_x\{\bigcup\limits_{r_j}\Omega_{r_j}\}=P_x(\Omega_{\tau+u})$，故存在整数$N_0$，使得$P_x(\Omega_{\tau+u}\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{N0}\Omega_{r_j})<\delta$，这就产生矛盾．于是最终有

$$\alpha_{\tau+u}=\alpha_\tau\alpha_{\tau+u}^{\tau}\qquad(a.a.\Omega_{\tau+u},P_x)$$

例　设马尔可夫过程X的定义如下：相空间E只含0和1两点，其拓扑是散拓扑，σ代数是波雷耳代数．假定系统开始时处于0则以后恒处于0，若系统开始时处于1，则在1逗留的时间有指数分布．我们取右连续的轨线，并以这些轨线对应的函数空间作为基本事件空间．定义X的泛函α如下：

$$\alpha_t^s(\varphi)=\begin{cases}0 & \text{当}s\text{是跳跃点时;}\\ 1 & \text{其它情形.}\end{cases}$$

易见α是X的几齐次连续的几可乘泛函，但它不是强几可乘的．事实上，设τ是X首达0点（即发生跳跃）的时刻，则τ是一马时，但这时有$\alpha_{\tau+t}=1$和$\alpha_{\tau+t}^{\tau}=0$,所以

$$P_1\{\omega:\alpha_{\tau+t}=\alpha_\tau\alpha_{\tau+t}^{\tau}\}=0.$$

注意到X是一跳跃型过程[7]这一事实，易知这过程符合〔3〕中对过程的假设，而且α又是几齐次连续几可乘和压缩的，故本例可作为〔3〕中有错误的定理4.2的反例．

(7)跳跃型过程的定义及性质可参看〔1〕第6章§4．

§3 D_0空间上测度的弱收敛及$\widetilde{P}(t,x,\Gamma)$的Feller性和强Feller性

为了讨论$\widetilde{P}(t,x,\Gamma)$的$Feller$性，需要先讨论$D_0$空间上测度的弱收敛问题，为此我们对$D_0$空间的性质作进一步的研究，然后把〔6〕中有关结果稍加强化并推广到D_0空间。

首先回忆D_0空间的定义。拓扑可测空间$(E,\mathbf{C},\mathbf{B})$称做$\mathbf{D}_0$空间，若它满足：

(a) $\mathbf{B}=\sigma(\mathbf{C}_1)$ ，$\mathbf{C}_1\subseteq\mathbf{C}$ ；

(b) 对任一$A\epsilon\mathbf{C}_1$，存在一有界可测连续函数f，使得$A=\{x:f(x)\neq0\}$

下面引进一些记号：

以$\mathbf{Z}$表示所有能表成$\{x:f(x)=0\}$的集合类，$\mathbf{U}$表示所有能表成$\{x:f(x)\neq0\}$的集合类，这里f是任意有界连续函数。称$\mathbf{Z}$中的集合为$\mathbf{Z}$集，$\mathbf{U}$中的集合为$\mathbf{U}$集。

以$\mathbf{M}$表示所有能表成$\{x:f(x)=0\}$的集合类，$\mathbf{N}$表示所有能表成$\{x:f(x)\neq0\}$的集合类，这里f是任意有界可测连续函数。称$\mathbf{M}$中的集合为$\mathbf{M}$集，$\mathbf{N}$中的集合为$\mathbf{N}$集。

$\mathbf{M}$集、$\mathbf{N}$集与$\mathbf{Z}$集、$\mathbf{U}$集之区别在于定义中对f有无可测性要求。$\mathbf{M}$集和$\mathbf{N}$集有如下性质：

(1) $\mathbf{M}$集和$\mathbf{N}$集互为余集，若以$\mathbf{F}$和$\mathbf{C}$分别表示闭集类和开集类，则有

$$\mathbf{BF}\supseteq\mathbf{BZ}\supseteq\mathbf{M} \quad ;$$

$$\mathbf{BC}\supseteq\mathbf{BU}\supseteq\mathbf{N} \quad .$$

(2) $\mathbf{M}$对可列交有限并封闭，$\mathbf{N}$对可列并有限交封闭。

(3) 设M_1、$M_2\epsilon\mathbf{M}$，且$M_1\cap M_2=\phi$，则存在$(E,\mathbf{C},\mathbf{B})$上的连续可测函数$f$，使得$0\leqslant f(x)\leqslant1$和

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\epsilon M_1\ ;\\ 1 & x\epsilon M_2\ .\end{cases}$$

(4) 设f是任意有界连续可测函数，F和G分别是数直线上任意闭集和开集，则

$$f^{-1}(F)\epsilon\mathbf{M} \quad ; \quad f^{-1}(G)\epsilon\mathbf{N} \quad .$$

根据这些性质可得D_0空间的如下等价定义：拓扑可测空间$(E,\mathbf{C},\mathbf{B})$称做$D_0$空间。如果它满足条件：存在$\mathbf{U}$集族$\{U_\alpha\}=\mathbf{U}_1\subseteq\mathbf{U}$，按定义$U_\alpha=\{x:f_\alpha(x)\neq0\}$，故$\{U_\alpha\}$对应一族有界连续函数$\mathbf{F}_1=\{f_\alpha\}$，而$\mathbf{B}$就是使得$\mathbf{F}_1$中所有函数$f_\alpha$为可测的最小$\sigma$代数。

利用$\mathbf{M}$集和$\mathbf{N}$集的术语可以把〔8〕的命题13叙述得更精确些。

定理3.1　D_0空间上任意有限测度μ必满足以下正则性条件：对任意$\Gamma\epsilon\mathbf{B}$有

$$\mu(\Gamma)=inf\{\mu(N):N\supseteq\Gamma,\ N\epsilon\mathbf{N}\}$$

$$=sup\{\mu(M):M\subseteq\Gamma,\ M\epsilon\mathbf{M}\}.$$

基于以上结果并利用本质上是在〔6〕中使用过的证明技巧，可以把〔6〕的一些结果强化并推广到D_0空间。

定理3.2　设μ_1、μ_2是D_0空间$(E,\mathbf{C},\mathbf{B})$上两个有限测度，则下列诸命题等价。

(1) $\mu_1(\Gamma)=\mu_2(\Gamma)$　　对所有$\Gamma\epsilon$**B**；

(2) $\mu_1(M)=\mu_2(M)$　　对所有$M\epsilon$**M**

(或$\mu_1(N)=\mu_2(N)$　　对所有$N\epsilon$**N**)；

(3) $\mu_1(A)=\mu_2(A)$　　若$A\epsilon$**B**并存在$M\epsilon$**M**，$N\epsilon$**N**,使得$M\subseteq A\subseteq N$和$\mu_i(M)=\mu_i(N)$, $i=1,2$；

(4) $\int fd\mu_1=\int fd\mu_2$　对所有有界连续可测函数f；

(5) $\int fd\mu_1=\int fd\mu_2$　对E上所有μ_i可积的可测函数f.

定理3.3　设(E,**C**,**B**)是D_0空间，又Y是任意拓扑空间．若每一$y\epsilon Y$对应**B**上一测度μ_y，而f是(E,**C**,**B**)上任意有界连续可测函数和$y_0\epsilon Y$，则下列三命题等价．

(1) $\int_E fd\mu_y$连于y_0；

(2) $\mu_y(E)$连续于y_0，且对任意$N\epsilon$**N**和$M\epsilon$**M**有

$$\mu_{y_0}(N)\leqslant\varliminf_{y\to y_0}\mu_y(N);$$

$$\varlimsup_{y\to y_0}\mu_y(M)\leqslant\mu_{y_0}(M);$$

(3) 若$A\epsilon$**B**，且存在$A_1\epsilon$**M**，$A_2\epsilon$**N**，使得$A_1\subseteq B\subseteq A_2$和$\mu_{y_0}(A_2\setminus A_1)=0$，则$\mu_y(A)$连续于$y_0$.

推论　设μ和$\mu_n(n=1,2,\cdots)$是D_0空间(E,**C**,**B**)上的有限测度，则下列命题等价．

(1) $\int_E fd\mu_n\to\int_E fd\mu$　对所有有界连续可测函数．

(2) $\mu_n(E)\to\mu(E)$，$\varliminf_{n\to\infty}\mu_n(N)\geqslant\mu(N)$对所有$N\epsilon$**N**和$\varlimsup_{n\to\infty}\mu_n(M)\leqslant\mu(M)$对所有$M\epsilon$**M**.

(3) 若$A\epsilon$**B**且存在$A_1\epsilon$**M**和$A_2\epsilon$**N**，使得$A_1\subseteq A\subseteq A_2$和$\mu(A_1)=\mu(A_2)$，则$\mu_n(A)\to\mu(A)$.

定义3.1　转移函数$P(t,x,\Gamma)$称做$Feller$转移函数，若对任意有界连续可测函数f，$T_tf(x)=\int_E f(y)P(t,x,dy)$是变元$x$的有界连续可测函数．$P(t,x,\Gamma)$称做强$Feller$转移函数，若对任意有界可测函数$f$，$T_tf(x)$是变元$x$的有界连续可测函数．

根据定理3.3易得

定理3.4　设过程X的相空间是D_0空间，X的泛函α_t是**N**可测的，则转移函数$\widetilde{P}(t,x,\Gamma)=M_x\{\chi_\Gamma(x_t)\alpha_t\}$是$Feller$转移函数的充分必要条件是

(A) $\int_\Omega\alpha_t(\omega)P_x(d\omega)$是$x$的连续函数；

(B) 对每一$x_0\epsilon E$和任意$M\epsilon$**M**，$N\epsilon$**N**有

$$\varlimsup_{x\to x_0}\int_{\{x_t\epsilon M\}}\alpha_t(\omega)P_x(d\omega)\leqslant\int_{\{x_t\epsilon M\}}\alpha_t(\omega)P_{x_0}(d\omega);$$

$$\varliminf_{x\to x_0}\int_{\{x_t\epsilon N\}}\alpha_t(\omega)P_x(d\omega)\geqslant\int_{\{x_t\epsilon N\}}\alpha_t(\omega)P_{x_0}(d\omega).$$

定理3.5　设过程X的泛函α_t是**N**可测的，又X的转移函数$P(t,x,\Gamma)$是$Feller$(强

Feller)的，则$\widetilde{P}(t,x,\Gamma)$是Feller（强Feller）转移函数的充分条件是：对每一$x\in E$、任意固定的$t\geqslant 0$和任意正数$\varepsilon>0$，$\delta>0$，存在x的邻域U_x和非负数a，使当$y\in U_x$时有

$$P_y\{|\alpha_t(\omega)-a|\geqslant\delta\}<\varepsilon$$

〔证〕 若$f(x)$是E上的有界连续可测（有界可测）函数。先设$0\leqslant f(x)\leqslant K$，于是当$y\in U_x$时

$$|\widetilde{T}_tf(x)-\widetilde{T}_tf(y)|=|M_x\{\alpha_tf(x_t)\}-M_y\{\alpha_tf(x_t)\}|$$

$$=\left|\int_\Omega f(x_t)\alpha_tP_x(d\omega)-\int_\Omega f(x_t)\alpha_tP_y(d\omega)\right|$$

$$=\left|\int_{\{|\alpha_t-a|\geqslant\delta\}}\alpha_tf(x_t)P_x(d\omega)-\int_{\{|\alpha_t-a|\geqslant\delta\}}\alpha_tf(x_t)P_y(d\omega)\right.$$

$$\left.+\int_{\{|\alpha_t-a|<\delta\}}\alpha_tf(x_t)P_x(d\omega)-\int_{\{|\alpha_t-a|<\delta\}}\alpha_tf(x_t)P_y(d\omega)\right|$$

$$\leqslant 2K\varepsilon+\left|\int_{\{|\alpha_t-a|<\delta\}}\alpha_tf(x_t)P_x(d\omega)\right.$$

$$\left.-\int_{\{|\alpha_t-a|<\delta\}}\alpha_tf(x_t)P_y(d\omega)\right|,$$

这里K是f的界。可以验证上式右端最后一项不超过$a|\int_\Omega f(x_t)P_x(d\omega)-\int_\Omega f(x_t)P_y(d\omega)|+2K\delta+2(a+\delta)K\varepsilon$，故

$$|\widetilde{T}_tf(x)-\widetilde{T}_tf(y)|\leqslant a|T_tf(x)-T_tf(y)|+2K\delta+2(a+\delta+1)K\varepsilon.$$

据此并由$P(t,x,\Gamma)$之Feller性（强Feller性）即可推得$\widetilde{P}(t,x,\Gamma)$之Feller性（强Feller性）。

现在取消$f\geqslant 0$的限制，这时只须将f分为正部与负部并利用上面的结果∎

§4 $\widetilde{P}(t,x,\Gamma)$的可微性

我们把〔7〕的定理1—3稍加改变而得到下面三条引理。

引理4.1 设$P(t,x,\Gamma)$是任意相空间上的转移概率和对某$x\in E$有

$$q(x)=\lim_{t\downarrow 0}t^{-1}[1-P(t,x,\{x\})]<\infty,$$

则若$q(x)=0$时有$P(t,x,\Gamma)=P(0,x,\Gamma)=P(0,x,E)\chi_\Gamma(x)$；

若$q(x)>0$时有

$$P(t,x,\Gamma)=q(x)\int_0^t e^{-q(x)(t-s)}r(s,x,E)\,ds+e^{-q(x)t}P(0,x,E)\chi_\Gamma(x),$$

这里$r(t,x,\Gamma)$是t的可测函数且$0\leqslant r(t,x,\Gamma)\leqslant 1$，同时对几乎所有的$t$，$r(t,x,\Gamma)$是关于

Γ的测度。

引理4.2　设相空间E是欧氏空间，$P(t,x,\Gamma)$是其上的转移函数。若对某$x\epsilon E$有$0<q(x)<\infty$，则存在唯一的具有以下性质的函数$R(t,x,\Gamma)(t>0,\Gamma\epsilon\mathbf{B})$：

(A) 当t固定时它是$\mathbf{B}$上的测度；

(B) 当Γ固定时它是变元t的连续函数；

(C) $R(s+t,x,\Gamma)=\int_E R(s,x,dy)P(t,y,\Gamma)$，

而且有

$$P(t,x,\Gamma)=q(x)\int_0^t e^{-q(x)(t-s)}R(s,x,\Gamma)\,ds+e^{-q(x)t}\chi_\Gamma(x).$$

引理4.3　在引理4.2的假设下，$P(t,x,\Gamma)$在$t>0$处存在微商$P'(t,x,\Gamma)$。当$q(x)=0$时$P'(t,x,\Gamma)=0$；当$q(x)>0$时$P'(t,x,\Gamma)=q(x)(R(t,x,\Gamma)-P(t,x,\Gamma))$。而且$P'(t,x,\Gamma)$是$t$的连续函数，也是$\Gamma$的完全可加集函数，它满足关系式：

$$P'(s+t,x,\Gamma)=\int_E P'(s,x,dy)\,P(t,y,\Gamma).$$

定理4.1　若相空间和过程X的转移函数分别满足上述三引理的条件。又设X的泛函α_t满足条件：对足够小的t有

$$t^{-1}[1-\alpha_t(\omega)]\leqslant K(\omega)\qquad (a.\ a.\ P_x),$$

这里$K(\omega)$是P_x可积函数。则对转移函数$\widetilde{P}(t,x,\Gamma)=\mathbf{M}_x\{\chi_\Gamma(x_t)\alpha_t\}$亦分别有以上三引理的结论。

〔证〕只须证明$\lim\limits_{t\downarrow 0} t^{-1}[1-\widetilde{P}(t,x,\{x\})]<\infty$。事实上，我们有

$$\lim_{t\downarrow 0} t^{-1}[1-\widetilde{P}(t,x,\{x\})]=\lim_{t\downarrow 0} t^{-1}[1-\mathbf{M}_x\{\chi_{\{x\}}(x_t)\alpha_t\}]$$

$$=\lim_{t\downarrow 0} t^{-1}[(1-\mathbf{M}_x\{\chi_{\{x\}}(x_t)\})+\mathbf{M}_x\{\chi_{\{x\}}(x_t)(1-\alpha_t)\}],$$

由引理条件知对于等式右端第一项有

$$\lim_{t\downarrow 0} t^{-1}[1-\mathbf{M}_x\{\chi_{\{x\}}(x_t)\}]=\lim_{t\downarrow 0} t^{-1}[1-P(t,x,\{x\})]<\infty,$$

对于第二项则有

$$0\leqslant\lim_{t\downarrow 0} t^{-1}[\mathbf{M}_x\{\chi_{\{x\}}(x_t)(1-\alpha_t)\}]\leqslant t^{-1}\mathbf{M}_x(1-\alpha_t)\leqslant\mathbf{M}_x K(\omega)<\infty,$$

$$\therefore \lim_{t\downarrow 0} t^{-1}[1-P(t,x,\{x\})]<\infty.$$

参 考 文 献

〔1〕 Е. Б. Дынкин, Основания теория марковских процессов, Физматгиз, Москова, 1959.

〔2〕 Е. Б. Дынкин, Марковский процессы, Физматгиз, Москова, 1963.

〔3〕 P. A. Meyer, Fonctionnelles multiplicatives et additives de Markov, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 12(1962), 125—230.

〔4〕 P. A. Meyer, La propriété de Markov forte des fonctionnelles multiplicatives, Теория вероятн. и её примен., 8(1963), 349—356.

〔5〕 Лян Чжи—шуэн(梁之舜), Инвариантность строго марковского свойства при преобразаваниях Дынкина, Теория вероятн. и её примен., 6 (1961), 228—231.

〔6〕 郑曾同，测度的弱收敛和强马氏过程，数学学报，11 (1961), 2, 126—132.

〔7〕 许宝騄，欧氏空间上纯间断的时齐马尔可夫过程的概率转移函数的可微性，北京大学学报(自然科学版)，(1958)，3，257—270.

〔8〕 邓永录，一类拓扑可测空间，中山大学学报（自然科学版），(1963)，1—2，21—27.

Almost Multiplicative Functionals of Markov Processes and Associated Transformations of Transition Probabilities

Deng Yonglu

Abstract

Let $X=(x_t, \zeta, \mathbf{M}_t, P_x)$ be a homogeneous Markov process, and let α_t be a almost pressed, almost homogeneous and almost multiplicative functional of the process X. Then

$\widetilde{P}(t, x, \Gamma)=\mathbf{M}_x(\chi_\Gamma(x_t)\alpha_t)$, for $t\geqslant 0$, $x\in E$, $\Gamma\in\overline{\mathbf{B}}$, defines a transition function on the state space $(E, \overline{\mathbf{B}})$.

Some conditions are given in this paper, under these conditions, the new transition function preserves corresponding properties (for example, conservative property, normal property, continuity in probability, strong Markov property, Feller property, strong Feller property and differentiability) of the transition function $P(t, x, \Gamma)$ of the process X.