

# 端边界的一个定理

刘良深 韩景奎  
(数学力学系)

局部凸拓扑线性空间内的紧集 $A$ 恒有端点, 而当 $A$ 是紧、凸集时, 它的端点集 $\partial A$ 的闭、凸包即为 $A$ , 这就是Krein-Milman定理. 见[1]p.440). 本文讨论 $L^\infty$ 空间中某些集合的端点的特征, 并利用Krein-Milman定理及A.P. Robertson在文[5]中使用过的方法, 得到Lyapounoff定理的一个证明.

在本文中, 可测空间 $(S, \mathbf{M})$ 恒表示 $S = [0, 1]$ , 而 $\mathbf{M}$ 表示由 $[0, 1]$ 中的子集所组成的一个 $\sigma$ -代数, 测度空间 $(S, \mathbf{M}, \mu)$ 中的原子 $E$ 是指 $E \in \mathbf{M}$ ,  $\mu(E) > 0$ 且

$$F \subset E, F \in \mathbf{M} \Rightarrow \mu(F) = 0 \text{ 或 } \mu(F) = \mu(E).$$

不含有原子的测度称为非原子测度.

$L^\infty = L^\infty(S, \mathbf{M}, \nu)$ 表示 $(S, \mathbf{M})$ 上的本性有界可测函数组成的线性空间, 在 $L^\infty$ 中定义如下的范数:

$$\|u\| = \inf \left\{ \alpha \mid \alpha \geq 0, \nu \{ t \mid |u(t)| > \alpha, t \in [0, 1] \} = 0 \right\}$$

这样,  $L^\infty$ 成为一个Banach空间,  $L^\infty$ 中的弱\*-拓扑记作 $\sigma(L^\infty, L^1)$ , 其中 $L^1$ 是 $(S, \mathbf{M}, \nu)$ 上的可积函数组成的线性空间.

设  $A \in \mathbf{M}$ ,

$$I_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A \\ 0, & t \notin A \end{cases}$$

称为集 $A$ 的特征函数.

**引理 1** 集合

$K = \{ u \mid u \in L^\infty, 0 \leq u(t) \leq 1 \text{ 在 } (S, \mathbf{M}, \nu) \text{ 上几乎处处成立} \}$  是弱\*-拓扑 $\sigma(L^\infty, L^1)$ 中的一个闭集.

**证明** 考虑 $f \notin K$ , 则存在集 $B \in \mathbf{M}$ 使 $\nu(B) > 0$ 及

$$f(t) > 1 \quad \text{对所有 } t \in B$$

(在 $f(t) < 0$ 时可类似地处理), 由于

$B = \{ t \mid t \in S, f(t) > 1 \} = \bigcup_{n > 1} \{ t \mid f(t) > 1 + \frac{1}{n} \}$  故得 $E \in \mathbf{M}$ ,  $\nu(E) > 0$ 及自然数 $n_0$ 使

$$f(t) > 1 + \frac{1}{n_0}, \text{ 对 } t \in E$$

考虑  $\sigma(L^\infty, L^1)$  邻域  $N = N(f; I_E, \varepsilon_0)$ :

$$N = \left\{ u \mid u \in L^\infty, \left| \int I_E \cdot (f - u) dv \right| < \varepsilon_0 \right\}$$

这里  $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{n_0} \nu(E)$ , 故此, 对所有  $u \in K$ , 有

$$\int I_E (f - u) dv \geq \int I_E \cdot \frac{1}{n_0} dv = \frac{1}{n_0} \nu(E) > \varepsilon_0$$

于是  $u \notin N(f; I_E, \varepsilon_0)$ , 这样,  $f$  不是  $K$  的聚点, 故此  $K$  是闭集, 证毕.

**引理 2** 设  $(X, \overline{S}, \nu)$  是一个测度空间,  $\varepsilon$  是一个正数; 又设

1)  $B \in \overline{S}, \nu(B) > 0$ ;

2)  $\mu_1, \dots, \mu_n$  均是  $\overline{S}$  上的非原子测度且  $\nu = \mu_1 + \dots + \mu_n$ , 则

- ① 存在  $(X, \overline{S})$  上的一个可测函数  $v(\cdot)$  使  $v(\cdot)$  在集合  $B$  上不几乎处处为零 (对测度  $\nu$  而言);
- ②  $\int v(\cdot) d\mu_i = 0$ , 对  $i = 1, 2, \dots, n$ ;
- ③  $|v(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , 凡  $x \in X$ .

**证明** 由于  $\nu(B) > 0$  及  $\nu = \mu_1 + \dots + \mu_n$ , 故存在  $i_0, 1 \leq i_0 \leq n$  使  $\mu_{i_0}(B) > 0$ . 又根据  $\mu_{i_0}$  是非原子测度, 故存在互不相交的  $A_K \in \overline{S}, A_K \subset B, K = 1, 2, \dots, n+1$  使对每个  $K, 1 \leq K \leq n+1$  有  $\mu_{i_0}(A_K) > 0$  及

$$\mu_{i_0}(B) = \mu_{i_0}(A_1) + \dots + \mu_{i_0}(A_n) + \mu_{i_0}(A_{n+1})$$

现考虑下述  $n+1$  个变量  $h_1, \dots, h_{n+1}$  的  $n$  个方程:

$$(I) \begin{cases} h_1 \mu_1(A_1) + \dots + h_n \mu_1(A_n) + h_{n+1} \mu_1(A_{n+1}) = 0, \\ h_1 \mu_2(A_1) + \dots + h_n \mu_2(A_n) + h_{n+1} \mu_2(A_{n+1}) = 0, \\ \dots \qquad \qquad \qquad \dots \\ h_1 \mu_n(A_1) + \dots + h_n \mu_n(A_n) + h_{n+1} \mu_n(A_{n+1}) = 0. \end{cases}$$

分两种情形讨论:

**情形 1)** 若行列式

$$D = \begin{vmatrix} \mu_1(A_1) & \dots & \mu_1(A_n) \\ \dots & & \dots \\ \mu_n(A_1) & \dots & \mu_n(A_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

则在 (I) 中指定  $h_{n+1}$  为非零实数, 这时由方程组 (I) 可得非零解  $(h_1, \dots, h_n) \neq 0$ . 令

$$v(t) = \begin{cases} h_i, & t \in A_i, \quad i = 1, 2, \dots, n+1. \\ 0, & t \in X \setminus B \end{cases}$$

则由  $\nu(A_{n+1}) \geq \mu_{i_0}(A_{n+1}) > 0$  及  $h_{n+1} \neq 0$  知  $v(\cdot)$  在集  $B$  上不几乎处处为零 (对测度  $\nu$  而言) 另

外, 由(I)知对每个  $i$  有  $\int v(\cdot) d\mu_i = 0$ , 最后, 由于  $h_1, \dots, h_{n+1}$  是齐次方程组的解, 故可将  $h_i$  乘上正数  $\delta$  使  $|v(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

**情形 2)** 若行列式  $D = 0$ , 则取  $h_{n+1} = 0$ , 这时(I)化成  $n$  个变元  $h_1, \dots, h_n$  的  $n$  个方程组 (I'), 由于  $D = 0$ , 齐次方程组 (I') 有非零解  $(h_1, \dots, h_n) \neq 0$ , 故至少有某一个  $j$  使  $h_j \neq 0$ . 但  $v(A_j) \geq \mu_{i_0}(A_j) > 0$ , 故  $v(\cdot)$  在  $B$  上不几乎处处为零. 其余情况与情形 1) 相同. 证毕.

**定理 1 (A. Liapunoff)** 设  $\mu_1, \dots, \mu_n$  是可测空间  $(S, \mathbf{M})$  上的非原子测度, 则  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  的值域  $\mu(\mathbf{M}) = \{ \mu(E) \mid E \in \mathbf{M} \}$  是  $n$ -维欧氏空间  $R_n$  中的一个紧凸集.

**证明** 首先注意

$$\nu = \mu_1 + \dots + \mu_n$$

是一个有限测度且  $\mu_i \ll \nu, i = 1, 2, \dots, n$ . 这就是说, 每个  $\mu_i$  是对  $\nu$  绝对连续. 根据 Radon-Nikodym 定理, 存在非负、可积函数  $f_i$  使

$$\mu_i(E) = \int_E f_i d\nu \quad \text{凡 } E \in \mathbf{M}.$$

对每个  $u \in L^\infty$ , 定义一个实值、线性泛函  $\varphi_i$  如下:

$$\varphi_i: \quad u \in L^\infty \longrightarrow \int u d\mu_i = \int u f_i d\nu$$

每个  $\varphi_i$  对弱\*拓扑  $\sigma(L^\infty, L^1)$  是连续的, 因而映射

$$\varphi: \quad u \in L^\infty \longrightarrow \left( \int u d\mu_1, \dots, \int u d\mu_n \right)$$

是  $(L^\infty, \sigma(L^\infty, L^1))$  至  $R_n$  中的连续、线性映射. 令

$K = \{ u \mid u \in L^\infty, 0 \leq u(t) \leq 1 \text{ 在 } (S, \mathbf{M}, \nu) \text{ 上几乎处处成立} \}$ . 由于  $K$  是  $(L^\infty, \sigma(L^\infty, L^1))$  中的紧集的一个闭子集, 故此  $K$  是紧集. 不难验证  $K$  是凸集, 因此  $K$  的连续像  $\varphi(K)$  是  $R_n$  中的紧、凸集.

现考虑  $L^\infty$  中的另一子集  $K_0$ ,

$$K_0 = \{ u \mid u(t) = \mathbb{I}_A(t), A \in \mathbf{M} \}$$

对  $u \in K_0$ , 得

$$\varphi(u) = \int \mathbb{I}_A \cdot f d\nu = \int_A f d\nu = \mu(A)$$

因此  $\varphi(K_0) = \mu(\mathbf{M})$ . 如果能证得

$$\varphi(K) = \varphi(K_0)$$

则立得知  $\mu(\mathbf{M})$  是紧、凸集. 现在, 显然有  $K_0 \subset K$ , 故此  $\varphi(K_0) \subset \varphi(K)$ , 现证相反方向的关系式  $\varphi(K) \subset \varphi(K_0)$ .

考虑  $z_1 \in \varphi(K)$ ,  $z_1 = \varphi(u_1)$ ,  $u_1 \in K$ . 定义如下子集  $K_1 \subset K$ :

$$K_1 = \{ u \mid u \in K, \varphi(u) = z_1 \}$$

由于  $K_1$  是  $K$  中的闭子集, 而  $K$  是紧集, 故  $K_1$  也是紧集. 由下式

$$\varphi(\lambda u_1 + (1 - \lambda) u_2) = \lambda \varphi(u_1) + (1 - \lambda) \varphi(u_2)$$

$$= \lambda z_1 + (1 - \lambda) z_1 = z_1$$

知 $K_1$ 是凸集。由Krein-Milman定理可知 $K_1$ 含有一个端点 $u_0$ ，便得 $z_1 = \varphi(u_0)$ ， $u_0 \in K_1$ 。现证 $u_0$ 是一个特征函数，从而 $u_0 \in K_0$ ，假若不然，由引理2知有 $v(\cdot) \in L^\infty$ 使

$$\begin{aligned} 0 \leq u_0(\cdot) + v(\cdot) \leq 1, & \quad (\text{因而 } u_0 + v \in K) \\ 0 \leq u_0(\cdot) - v(\cdot) \leq 1, & \quad (\text{因而 } u_0 - v \in K) \end{aligned} \tag{1}$$

并且有 $\varphi(v) = 0$ ，这样就有 $\varphi(u_0 \pm v) = \varphi(u_0) \pm \varphi(v) = z_1 + 0 = z_1$ 。这就是说， $u_0 \pm v \in K_1$ ，再由

$$u_0 = \frac{1}{2} (u_0 + v) + \frac{1}{2} (u_0 - v)$$

及 $u_0 \neq u_0 + v$ ， $u_0 \neq u_0 - v$  便知 $u_0$ 不是 $K_1$ 的端点，故此得出矛盾。由此得 $u_0 \in K_0$ ，这就是说， $\varphi(K) \subset \varphi(K_0)$ ，证明完毕。

**定理2** 设 $\mu_1, \dots, \mu_n$ 是 $(S, \mathbf{M})$ 上的非原子、符号测度，又 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ ，则 $\mu(\mathbf{M})$ 是 $R_n$ 中的一个紧、凸集。

要证明定理2，可考虑测度 $\nu = |\mu_1| + \dots + |\mu_n|$ ，这里 $|\mu_i|$ 表示 $\mu$ 的全变差。那末每个 $\mu_i$ 对 $|\nu|$ 是绝对连续，其余部分与定理1类似。

**定理3** 设 $K_1$ 的端边界(extreme boundary)为 $\partial K_1$ ， $K$ 的端边界为 $\partial K$ ，那末有

- 1)  $\partial K_1 \subset K_0$ ,
- 2)  $\partial K = K_0$ .

**证明**

注意当 $u_0 \in K_0$ 时，有 $u_0(t) = I_A(t)$ 对所有 $t \in [0, 1]$ 。若 $t_0 \in A$ ，则由

$$1 = I_A(t_0) = \frac{1}{2} (x_1(t_0) + x_2(t_0))$$

及 $0 \leq x_1(t_0) \leq 1$ ， $0 \leq x_2(t_0) \leq 1$ 得 $x_1(t_0) = 1$ 及 $x_2(t_0) = 1$ ，用类似方法知道当 $t_1 \notin A$ 时有 $x_1(t_1) = x_2(t_1) = 0$ ，因此 $u_0(\cdot) = x_1(\cdot) = x_2(\cdot)$ ，故 $u_0$ 是 $K$ 的一个端点。另一方面，若 $u_0 \notin K_0$ ，则由定理1证明中的(1)式可知 $u_0$ 不是 $K$ 的端点，故 $\partial K \subset K_0$ ，于是得 $\partial K = K_0$ 。证毕。

**参 考 文 献**

- [1] Dunford, N. and J. Schwartz, *Linear Operators*, Part I, Interscience, New York, 1968.
- [2] Wong, Yau-Chuen, *Introductory functional analysis*, Publication of The Chinese Univ. of Hong Kong, 1980.
- [3] Halmos, P.R., *Measure Theory*, D. Van Nostrand Company, 1950.
- [4] Robertson, A.P. and W.J. Robertson, *Topological vector spaces*, Cambridge Univ. Press, 1964.
- [5] J.H.C. Kingman and A.P. Robertson, On a theorem of Lyapunov, *J. of London Math. Soc.*, 43(1968), 347-351.

## On a Theorem of Extreme Boundary

Liu Liangshen    Han Jingluan

### Abstract

Using the Krein-Milman theorem in locally convex Hausdorff topological linear space, some properties of extreme boundary of compact convex sets in  $L^\infty$  are given and a theorem of A. Liapunoff on the range of a non-atomic signed measures on measurable space  $(S, \mathcal{M})$  is proved.

## 单 $p$ -函数和单更新序列的构造(摘要)

钱 士 贤

(数学力学系研究生)

在更新序列和 $p$ -函数的理论中,单子(simple)的构造问题是一个相当重要而又难度较大的课题。R. Davidson在这方面做了大量工作,侯振挺教授等近年来也对这一课题进行了研究。

本文建立了三个跟更新序列和 $p$ -函数有关的等式,并利用这些等式对单 $p$ -函数和单更新序列作了研究。本文还统一处理了R. Davidson和何远江的有关工作,推广和深化了他们的结果。

一、给出了标准 $p$ -函数是不稳定单 $p$ -函数的充分条件。

二、把R. Davidson的 $R$ -有界单 $p$ -函数类扩充为 $R$ -速敛单 $p$ -函数类。

本文把 $R$ -速敛的想法应用到非周期更新序列的情形中,提出了局部速敛更新序列和速敛更新序列这两个概念。

三、构造了比R. Davidson和何远江的结果更广泛的一类正的单更新序列——正的局部速敛单更新序列类。

四、证明了具有唯一表示式的可分解更新序列是存在的。

五、对非周期单更新序列作了初步的统一研究,给出了它的一个充分条件。

文中给出了单更新序列的许多例子。

本文还顺便给出了“更新序列类和 $p$ -函数类在点点乘积运算下成为交换半群”这一命题的一个分析证明,这是继侯振挺教授和黄之瑞老师给出上述命题的分析证明后,仅利用数学归纳法得到的一个简明的初等证明。