二阶线性双曲型偏微分方程组的不等距对顶点定理及其应用*

施奕如　　　詹前树
（七机部五院）　（数学力学系）

考虑二阶两个自变数两个未知函数线性偏微分方程组

$$A\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+2B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+C\frac{\partial^2}{\partial y^2}\begin{pmatrix}v\\v\end{pmatrix}=0, \qquad (\mathrm{I})$$

其中，A、B、C是二行二列的实数方阵．如果特征方程$F(\xi,\eta)=|A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2|=0$的根全为实根，而且不是实四重根，则称方程组（Ⅰ）是双曲型的．文〔1〕将双曲型方程组分为第一、二、三、四类，分别用(H_1)、(H_2)、(H_3)、(H_4)表示，并已导出它们的标准型和一般解．

文〔2〕已在等距的情况下提出(H_2)、(H_3)、(H_4)的对顶点定理，本文将其推广到不等距的情形，给出(H_2)、(H_3)、(H_4)的若干不等距对顶点定理，并应用于求解这三类方程组在有限域内的一些定解问题．

§1．不等距对顶点定理

第二类双曲型方程组的标准型为〔1〕

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}b_1&1\\b_3&b_1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0, \qquad (H_2)$$

其中，$b_3=(b_1-\frac{1}{2})^2\neq 0$，$b_1\neq 0$，它的一般解是

$$\begin{cases} u=\dfrac{1}{2b_1}f_1(x-y)-\dfrac{1-2b_1}{2b_1}\left[xf_1'(x-y)+f_2(x-y)\right]+f_3(y), \\ v=-\dfrac{b_3}{b_1}\left[xf_1'(x-y)+f_2(x-y)\right]+f_4(x), \end{cases} \qquad (H_2^*)$$

这里$f_i(i=1,2,3,4)$是任意的三阶连续可微函数．分别作出特征平行四边形$ABCD$及$A_1B_1C_1D_1$（如图1），应用一般解(H_2^*)，可证有

定理 1　方程组(H_2)的正规解u、v在特征平行四边形上恒有

---

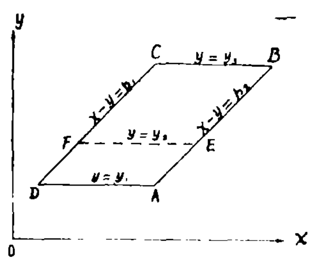
* 本文于1981年10月收到．本文是在吴兹潜、林伟副教授指导下完成的．

$$\begin{vmatrix} y_3 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} u(A) + \begin{vmatrix} y_3 & 1 \\ y_1 & 1 \end{vmatrix} u(F) + \begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_1 & 1 \end{vmatrix} u(B) = \begin{vmatrix} y_3 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} u(D)$$

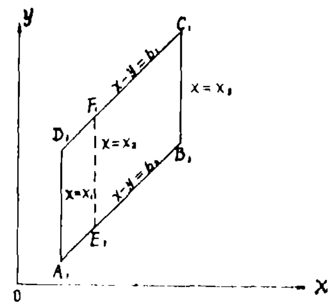
$$+ \begin{vmatrix} y_3 & 1 \\ y_1 & 1 \end{vmatrix} u(E) + \begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_1 & 1 \end{vmatrix} u(C), \tag{1.1}$$

$$\begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} v(A_1) + \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix} v(F_1) + \begin{vmatrix} x_2 & 1 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix} v(B)_1 = \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} v(D_1)$$

$$+ \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix} v(E_1) + \begin{vmatrix} x_2 & 1 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix} v(C_1). \tag{1.2}$$



(a)



(b)

图　1

由于在特征线$x-y=b_1$及$x-y=b_2$上，x与y有线性关系，故(1.1)．(1.2)有下面等价形式

$$\begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} u(A) + \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix} u(F) + \begin{vmatrix} x_2 & 1 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix} u(B)$$

$$= \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} u(D) + \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix} u(E) + \begin{vmatrix} x_2 & 1 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix} u(C), \tag{1.1$'$}$$

$$\begin{vmatrix} y_3 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} v(A_1) + \begin{vmatrix} y_3 & 1 \\ y_1 & 1 \end{vmatrix} v(F_1) + \begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_1 & 1 \end{vmatrix} v(B_1)$$

$$= \begin{vmatrix} y_3 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} v(D_1) + \begin{vmatrix} y_3 & 1 \\ y_1 & 1 \end{vmatrix} v(E_1) + \begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_1 & 1 \end{vmatrix} v(C_1). \tag{1.2$'$}$$

第三类双曲型方程组的标准型是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4}-k & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \tag{H_3}$$

其中，$k \neq 0$，$\frac{1}{4}$，它的一般解是

$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{4k} f_1(y) + f_2(y) - \dfrac{1}{2k} \displaystyle\int_0^x f_3(t)\,dt, \\ v = -\dfrac{1-4k}{8k} \displaystyle\int_0^y f_1(t)\,dt + \dfrac{y}{4k} f_3(x) + f_4(x), \end{cases} \tag{H_3^*}$$

这里$f_i(i=1,2,3,4)$是任意的三阶连续可微函数。同样可证在特征矩形上(如图2)，有下面定理成立。

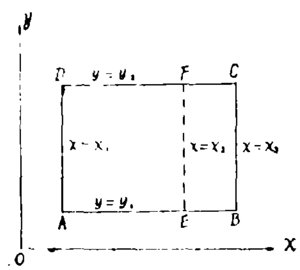
定理 2 方程组(H_3)的正规解u、v在特征矩形上恒有

$$\begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} u(A) + \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix} u(F) + \begin{vmatrix} x_2 & 1 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix} u(B)$$

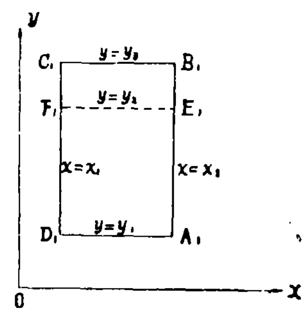
$$= \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} u(D) + \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix} u(E) + \begin{vmatrix} x_2 & 1 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix} u(C), \quad (1.3)$$

$$\begin{vmatrix} y_3 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} v(A_1) + \begin{vmatrix} y_3 & 1 \\ y_1 & 1 \end{vmatrix} v(F_1) + \begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_1 & 1 \end{vmatrix} v(B_1)$$

$$= \begin{vmatrix} y_3 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} v(D_1) + \begin{vmatrix} y_3 & 1 \\ y_1 & 1 \end{vmatrix} v(E_1) + \begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_1 & 1 \end{vmatrix} v(C_1). \quad (1.4)$$



(a)



(b)

图 2

第四类双曲型方程组的标准型是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & k \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0, \quad (H_4)$$

其中$k \neq 0$,它的一般解是

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{4k}\left[4kxf_1(y) + x^2 f_1'(y) - 2xf_2(y) + f_3(y)\right], \\ v = \dfrac{1}{4k}\left[-xf_1(y) + \displaystyle\int_0^y f_2(t)dt + f_4(x)\right], \end{cases} \quad (H_4^*)$$

这里，$f_i(i=1,2,3,4)$是任意的三阶连续可微函数。

假设$A(x_1,c_1)$，$B(x_2,c_1)$，$C(x_3,c_1)$，$M(x,c_1)$，$(x_1<x_2<x_3)$，为特征线$y=c_1$上任意四点，又设特征矩形如图2(a)，则易证有

定理3 方程组(H_4)的正规解u在特征线$y=c_1$上恒有

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} u(M) = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} u(A) + \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x^2 & x & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} u(B) + \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x^2 & x & 1 \end{vmatrix} u(C), \quad (1.5)$$

而v在特征矩形上恒有

$$\begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} v(A) + \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix} v(F)) + \begin{vmatrix} x_2 & 1 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix} v(B) = \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} v(D) + \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix} v(E) + \begin{vmatrix} x_2 & 1 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix} v(C). \quad (1.6)$$

利用上述所得不等距对顶点定理，可以求解第二、三、四类双曲型方程组在有界域内的一些定解问题。

§2．方程组（H_2）若干有限域定解问题

第一问题是在由$^1/_4$单位圆σ：$x^2+y^2=1$，$x\geqslant0$，$y\geqslant0$及直线$y=x+1$，$y=0$所围区域Ω内，求方程组(H_2)的解，使之适合于

$$\begin{cases} u|_{y=0}=\varphi_1(x),\ -1\leqslant x\leqslant1, & u|_{y=x+1}=\varphi_2(x),\ -1\leqslant x\leqslant0, \\ u|_{\sigma}=\varphi_3(x),\ 0\leqslant x\leqslant1, & v|_{y=0}=\phi(x),\ -1\leqslant x\leqslant1, \end{cases} \tag{2.1}$$

这里$\varphi_i(i=1,2,3)$、ϕ为二阶连续可微函数，并且$\varphi_1(-1)=\varphi_2(-1)$，$\varphi_2(0)=\varphi_3(0)$，$\varphi_1(1)=\varphi_3(1)$。

解　(如图3)，在Ω内任取一点$E(x_0,\ y_0)$，则对A、E、B、C、F和D诸点，应用定理1的(1.1)式立得

$$\begin{aligned} u(x_0,\ y_0)=&\frac{(x_0+y_0)-\sqrt{2-(x_0-y_0)^2}}{(x_0-y_0)-\sqrt{2-(x_0-y_0)^2}}[\varphi_1(x_0-y_0)-\varphi_1(-1)] \\ &-\frac{2y_0}{(x_0-y_0)-\sqrt{2-(x_0-y_0)^2}}\left[\varphi_3\left(\frac{(x_0-y_0)+\sqrt{2-(x_0-y_0)^2}}{2}\right)\right. \\ &\left.-\varphi_2\left(\frac{-2-(x_0-y_0)+\sqrt{2-(x_0-y_0)^2}}{2}\right)\right]+\varphi_2(y_0-1), \end{aligned} \tag{2.2}$$

将$u(x_0,y_0)$代入方程组(H_2)，并计及条件$v|_{y=0}=\phi(x)$，求得

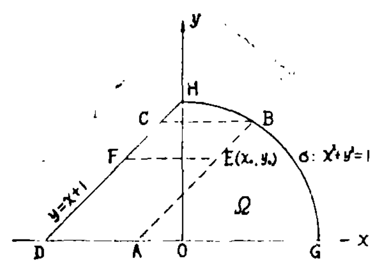


图 3

$$\begin{aligned} v(x_0,y_0)=&\frac{1-2b_1}{2} \\ &\cdot\left\{\frac{(x_0+y_0)-\sqrt{2-(x_0-y_0)^2}}{(x_0-y_0)-\sqrt{2-(x_0-y_0)^2}}\right. \\ &\cdot[\varphi_1(x_0-y_0)-\varphi_1(-1)] \\ &\left.-[\varphi_1(x_0)-\varphi_1(-1)]\right\} \\ &-\frac{(1-2b_1)y_0}{(x_0-y_0)-\sqrt{2-(x_0-y_0)^2}}\left[\varphi_3\left(\frac{(x_0-y_0)+\sqrt{2-(x_0-y_0)^2}}{2}\right)\right. \\ &\left.-\varphi_2\left(\frac{-2-(x_0-y_0)+\sqrt{2-(x_0-y_0)^2}}{2}\right)\right] \\ &+\int_{x_0}^{x_0-y_0}\frac{1}{t-\sqrt{2-t^2}}\left[\varphi_1(t)-\varphi_1(-1)-\varphi_3\left(\frac{t+\sqrt{2-t^2}}{2}\right)\right. \\ &\left.+\varphi_2\left(\frac{-2-t+\sqrt{2-t^2}}{2}\right)\right]dt+Ky_0+\phi(x_0). \end{aligned} \tag{2.3}$$

这里K是任意常数。由此可见第一问题的解v将带一个任意一次式。

由直接验算得知$u(x_0,y_0)$、$v(x_0,y_0)$满足方程组(H_2)及(2.1)式所给条件，故$u(x_0,y_0)$、$v(x_0,y_0)$为所求第一问题之解。

用类似方法可解如下问题。

第二问题是在由特征线$x-y=0$，$y=0$及$x=a$，$(a>0)$，所围成的三角形域内，求解方程组(H_2)的解，使之适合于

$$\begin{cases} u|_{y=x}=\varphi_1(x),\ 0\leqslant x\leqslant a,\ u|_{y=0}=\varphi_2(x),\ 0\leqslant x\leqslant a, \\ u|_{x=a}=\varphi_3(y),\ 0\leqslant y\leqslant a,\ v|_{y=\alpha x}=\phi(x),\ 0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant \alpha\leqslant 1, \end{cases}$$

这里$\varphi_i(i=1,2,3)$、ϕ为二阶连续可微函数，而且$\varphi_1(0)=\varphi_2(0)$，$\varphi_1(a)=\varphi_3(a)$，$\varphi_2(a)=\varphi_3(0)$，在$x=0$近旁，$\varphi_1(x)=M|x|^\mu$，在$x=a$近旁，$\varphi_2(x)=M|x-a|^\mu$，在$y=0$近旁，$\varphi_3(y)=M|y|^\mu$，这里$\mu\geqslant 3$。

第三问题是在由特征线$x-y=0$，$y=0$，$x-y=a$，$y=c$，$(a>0,c>0)$所围成的特征平行四边形域内(如图4)，求解方程组(H_2)的解，使之适合于

$$\begin{cases} u|_{y=0}=\varphi_1(x),\ 0\leqslant x\leqslant a,\ u|_{y=c}=\varphi_2(x),\ c\leqslant x\leqslant a+c, \\ u|_{y=x}=\varphi_3(x),\ 0\leqslant x\leqslant c,\ v|_{y=\alpha x}=\phi(x),\ 0\leqslant x\leqslant a+c,\ \dfrac{c}{a+c}\leqslant \alpha\leqslant 1, \end{cases}$$

这里 $\varphi_i(i=1,2,3)$、ϕ 是二阶连续可微函数，而且$\varphi_1(0)=\varphi_3(0)$，$\varphi_2(c)=\varphi_3(c)$。

如果取 $\alpha=\dfrac{c}{a+c}$则解的定义域都在特征平行四边形上。

此外，如果把u在OC上给值，改为在OC'上给值，C'是线段CJ上任一内点，则解仍然存在。

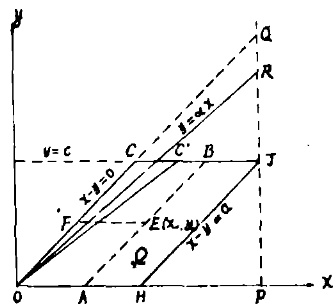


图4

§3. 方程组(H_3)的一些定解问题

第一问题是在由特征线$x=0$，$x=a$，$(a>0)$，$y=0$，$y=b$，$(b>0)$所围成的特征矩形域Ω内求方程组(H_3)的解，使之适合于

$$\begin{cases} u|_{x=0}=\varphi_1(y),\ 0\leqslant y\leqslant b,\ u|_{x=a}=\varphi_2(y),\ 0\leqslant y\leqslant b, \\ u|_{y=0}=\varphi_3(x),\ 0\leqslant x\leqslant a,\ v|_{y=0}=\phi(x),\ 0\leqslant x\leqslant a \end{cases},$$

这里$\varphi_i(i=1,2,3,)$、ϕ为二阶连续可微函数，而且$\varphi_1(0)=\varphi_3(0)$，$\varphi_3(a)=\varphi_2(0)$。

解　(如图5)在Ω内任取一点$F(x_0,y_0)$，过点F引特征线，则对0、E、B、C、F、D诸点，应用定理2的(1.3)式立得

$$u(x_0,y_0)=\frac{a-x_0}{a}\Big[\varphi_1(y_0)-\varphi_1(0)\Big]+\frac{x_0}{a}\Big[\varphi_2(y_0)-\varphi_3(a)\Big]+\varphi_3(x_0),$$

将$u(x_0,y_0)$代入方程组(H_3)并考虑条件$v|_{y=0}=\phi(x)$求得

$$v(x_0,y_0)=\frac{1-4k}{2a}\int_0^{y_0}[\varphi_1(t)-\varphi_2(t)]dt-\frac{y_0}{2}\varphi_3'(x_0)+Ky_0+\phi(x_0),$$

这里K为任意常数。

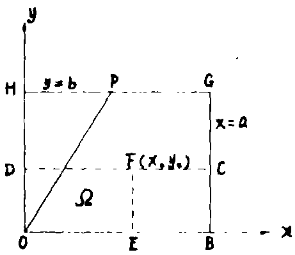


图5

如果将u在OH上给值改为在OP上给值，P是 GH上的任一内点，则解仍然存在。

类似地可解下面问题。

第二问题是在由特征线$y=0$，$y=b$，$x=\frac{b}{a}$，$x=\frac{b}{c}$，$(a>0,\ b>0,\ c<0)$所围成的特征矩形域内，求方程组(H_3)的解，使之适合于

$$\begin{cases} u|_{y=cx}=\varphi_1(x), & \frac{b}{c}\leqslant x\leqslant 0,\quad u|_{y=ax}=\varphi_2(x),\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{b}{a}, \\ u|_{y=b}=\varphi_3(x), & \frac{b}{c}\leqslant x\leqslant\frac{b}{a},\quad v|_{y=b}=\phi(x),\quad \frac{b}{c}\leqslant x\leqslant\frac{b}{a}, \end{cases}$$

这里$\varphi_i(i=1,2,3)$、ϕ为二阶连续可微函数，而且$\varphi_1\left(\frac{b}{c}\right)=\varphi_3\left(\frac{b}{c}\right)$，$\varphi_2\left(\frac{b}{a}\right)=\varphi_3\left(\frac{b}{a}\right)$，在$x=0$近旁，$\varphi_i(x)=M|x|^\mu$，$\mu\geqslant 3$，$i=1,\ 2,\ 3$。

第三问题是在由半圆弧σ：$(x-1)^2+y^2=1$，$y\geqslant 0$，及直线$y=0$所围成的半圆域内求方程(H_3)的解，使之适合于

$$\begin{cases} u|_\sigma=\varphi_1(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 2, \quad u|_{y=0}=\varphi_2(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 2, \\ v|_{y=0}=\phi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 2, \end{cases}$$

这里$\varphi_i(i=1,2)$、ϕ是二阶连续可微函数，而且$\varphi_1(0)=\varphi_2(0)$，$\varphi_1(2)=\varphi_2(2)$，在$x=1$近旁，$\varphi_i(x)=M|x-1|^\mu$，$\mu\geqslant\frac{3}{2}$，$i=1,2$。

第四问题是在由抛物线$y=x^2$及直线$y=b$，$(b>0)$所围成的区域内，求解方程组(H_3)的解，使之适合于

$$\begin{cases} u|_{y=x^2}=\varphi_1(x),\quad -\sqrt{b}\leqslant x\leqslant\sqrt{b},\quad u|_{y=b}=\varphi_2(x),\ -\sqrt{b}\leqslant x\leqslant\sqrt{b}, \\ v|_{y=b}=\phi(x),\quad -\sqrt{b}\leqslant x\leqslant\sqrt{b}, \end{cases}$$

这里$\varphi_i(i=1,2)$、ϕ为二阶连续可微函数，而且$\varphi_1(-\sqrt{b})=\varphi_2(-\sqrt{b})$，$\varphi_1(\sqrt{b})=\varphi_2(\sqrt{b})$，在$x=0$近旁，$\varphi_i(x)=M|x|^\mu$，$\mu\geqslant\frac{3}{2}$，$i=1,2$。

§4. 方程组（H_4）的一些定解问题

第一问题是在由特征线$x=c_1$，$x=c_2$，$(c_1<0<c_2)$，$y=0$及$y=b$，$(b>0)$所围成的区域Ω内求方程组(H_4)的解，使之适合于

$$\begin{cases} u|_{x=0}=\varphi_1(y),\quad u|_{x=c_1}=\varphi_2(y),\quad u|_{x=c_2}=\varphi_3(y),\quad 0\leqslant y\leqslant b, \\ v|_{y=0}=\phi(x),\quad c_1\leqslant x\leqslant c_2, \end{cases}$$

这里$\varphi_i(i=1,2,3)$、ϕ是二阶连续可微函数。

解　（如图6）在Ω内任取一点$M(x_0,\ y_0)$，过点M引平行于x轴的特征线，对A、B、M、

C四点应用定理3的(1.5)式即得

$$u(x_0,y_0)=\frac{(x_0-c_1)(x_0-c_2)}{c_1c_2}\varphi_1(y_0)+\frac{x_0(x_0-c_2)}{c_1(c_1-c_2)}\varphi_2(y_0)+\frac{x_0(x_0-c_1)}{c_2(c_2-c_1)}\varphi_3(y_0),$$

将$u(x_0,y_0)$代入方程组(H_4)并应用条件$v|_{y=0}=\phi(x)$，解得

$$v(x_0,\,y_0)=\frac{1}{2}\int_0^{y_0}\left[4k\int_l^t\alpha(\tau)d\tau+\beta(t)\right]dt-x_0\int_0^{y_0}\alpha(t)dt+ky_0+\phi(x_0)$$

这里l、K为任意常数，而

$$\alpha(t)=\frac{1}{c_1c_2}\left\{\varphi_1(t)+\frac{1}{c_1-c_2}\left[c_2\varphi_2(t)-c_1\varphi_3(t)\right]\right\},$$

$$\beta(t)=\frac{c_1+c_2}{c_1c_2}\varphi_1(t)+\frac{c_2}{c_1(c_1-c_2)}\varphi_2(t)+\frac{c_1}{c_2(c_2-c_1)}\varphi_3(t).$$

类似地可解下面问题。

第二问题是在由特征线$y=0$，$y=b$，$x=\frac{b}{c}$，$x=\frac{b}{a}$，$(a>0,\ b>0,\ c<0)$所围成的矩形域内求方程组(H_4)的解，使之适合于

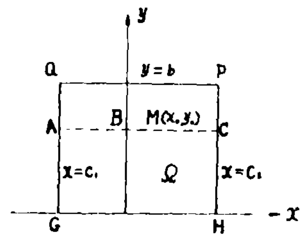


图6

$$\begin{cases}u\Big|_{x=0}=\varphi_1(y),\quad u\Big|_{x=\frac{y}{c}}=\varphi_2(y),\quad u\Big|_{x=\frac{y}{a}}=\varphi_3(y),\quad 0\leqslant y\leqslant b,\\ v\Big|_{y=0}=\phi(x),\quad \frac{b}{c}\leqslant x\leqslant\frac{b}{a},\end{cases}$$

这里$\varphi_i(i=1,2,3)$、ϕ是二阶连续可微函数，而且$\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=\varphi_3(0)$，在$y=0$近旁，$\varphi_i(y)=M|y|^{\mu}$，$\mu\geqslant3$，$i=1,2,3$。

第三问题是在上半单位圆σ：$x^2+y^2=1$，$y\geqslant0$及直线$y=0$所围成的区域内，求方程组(H_4)的解，使之适合于

$$\begin{cases}u|_{x=0}=\varphi_1(y),\quad 0\leqslant y\leqslant1,\quad u|_{\sigma}=\varphi_2(x),\quad -1\leqslant x\leqslant1,\\ v|_{y=0}=\phi(x),\quad -1\leqslant x\leqslant1\end{cases}$$

这里$\varphi_i(i=1,2)$、ϕ是二阶连续可微函数，且$\varphi_1(1)=\varphi_2(0)$，在$y=1$近旁，$\varphi_1(y)=M|y-1|^{\mu}$，在$x=0$近旁，$\varphi_2(x)=M|x|^{\mu}$，$\mu\geqslant2$。

应用定理3的(1.6)式可解下面定解问题。

第四问题是在由特征线 $x=0$，$x=c$，$(c>0)$，$y=0$，$y=b$，$(b>0)$所围成的矩形域内，求方程组(H_4)的解，使之适合于

$$\begin{cases}v|_{x=0}=\varphi_1(y),\quad 0\leqslant y\leqslant b,\quad v|_{x=c}=\varphi_2(y),\quad 0\leqslant y\leqslant b,\\ v|_{y=0}=\varphi_3(x),\quad 0\leqslant x\leqslant c,\quad u|_{x=0}=\phi(y),\quad 0\leqslant y\leqslant b\end{cases}$$

这里$\varphi_i(i=1,2,3)$、ϕ为二阶连续可微函数，而且$\varphi_1(0)=\varphi_3(0)$，$\varphi_2(0)=\varphi_3(c)$。

第五问题是在由特征线$y=0$，$y=b$，$(b>0)$，$x=\frac{b}{c}$，$x=\frac{b}{a}$，$(a>0$，$c<0)$围所成的矩形域内求方程组(H_4)的解，使之适合于

$$\begin{cases} v\big|_{y=Cx}=\varphi_1(x)\ ,\ \frac{b}{c}\leqslant x\leqslant 0, & v\big|_{y=ax}=\varphi_2(x),\ 0\leqslant x\leqslant\frac{b}{a}, \\ v\big|_{y=0}=\varphi_3(x)\ ,\ \frac{b}{c}\leqslant x\leqslant\frac{b}{a}, & u\big|_{x=0}=\phi(y),\ 0\leqslant y\leqslant b, \end{cases}$$

这里$\varphi_i(i=1,2,3)$、ϕ是二阶连续可微函数，而且$\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=\varphi_3(0)$，在$x=0$近旁，$\varphi_i(x)=M|x|^\mu$，$\mu\geqslant 3$，$i=1,2,3$。

第六问题是在由半圆孤σ：$(x-1)^2+y^2=1$，$y\geqslant 0$及$y=0$所围成的半圆域内，求方程组(H_4)的解，使之适合于

$$\begin{cases} v|_\sigma=\varphi_1(x),\ v|_{y=0}=\varphi_2(x),\ 0\leqslant x\leqslant 2, \\ u|_{x=0}=\phi(y),\ 0\leqslant y\leqslant 1, \end{cases}$$

这里$\varphi_i(i=1,2)$、ϕ是二阶连续可微函数，而且$\varphi_1(0)=\varphi_2(0)$，$\varphi_1(2)=\varphi_2(2)$，在$x=1$近旁，$\varphi_i(x)=M|x-1|^\mu$，$\mu\geqslant\frac{5}{2}$，$i=1,2$。

如对上述所有在圆周$x^2+y^2=1$上提出的定解问题，改成在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上给值，其定解问题仍然可解。

参　考　文　献

〔1〕华罗庚、吴兹潜、林伟，二阶两个自变数两个未知函数线性偏微分方程组，科学出版社，(1979)。

〔2〕马汝念、陈宝耀、吴兹潜、肖应昌，二阶常系数线性双曲型偏微分方程组的对顶点定理及其应用，中山大学学报(自然科学版)，(1965)，2，139-145。

Non-isometric Opposite Vertex Theorems for the Systems of the Hyperbolic Equations and Their Applications

Shi Yiru　　Zhan Qianshu

Abstract

In this paper we shall discuss some non-isometric opposite vertex theorems for the linear systems of the hyperbolic equations (H_2), (H_3), (H_4), shown in 〔1〕 as

$$A\frac{\partial^2}{\partial x^2}\binom{u}{v}+2B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\binom{v}{u}+C\frac{\partial^2}{\partial y^2}\binom{u}{v}=0$$

and apply these theorems to solve several problemes of above syetems in finite closed domain.