

加速级数收敛的一种外推算法

黄友谦

(计算机科学系)

谢平氏

(数学力学系)

D.C.Joyce⁽¹⁾于1971年对外推算法作了综合性评述。本文探讨Aitken外推算法应用于级数的加速收敛。为此,建立了定理1至定理4。最后将外推算法与级数加速收敛的传统方法^(2,3)作出比较。

一、基本定理

设 $\{x_n\}$ 是 a 的近似序列, 误差序列

$$d_n = x_n - a \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

令

$$\widehat{x}_{n+1} = x_{n+1} - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_{n-1}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.2)$$

及

$$\widehat{d}_{n+1} = \widehat{x}_{n+1} - a, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.3)$$

其中 Δ 为向前差分算子。称(1.2)为序列 $\{x_n\}$ 的Aitken外推序列, 又称 δ^2 外推序列。我们将给出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{d}_{n+1} = 0 \quad (1.4)$$

及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{d}_{n+1}}{d_{n+1}} = 0 \quad (1.5)$$

成立的条件。即

定理1 若 $\{x_n\}$ 是 a 的近似序列, 误差序列(1.1)有界, 且满足

$$d_{n+1} = (c + \varepsilon_n)d_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

其中 $c \neq 0, 1$, 而序列 $\{\varepsilon_n\}$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0,$$

则(1.5)成立, 从而(1.4)成立, 即 $\{\widehat{x}_{n+1}\}$ 收敛于 a 。并且当 $\{x_n\}$ 收敛于 a 时, $\{\widehat{x}_{n+1}\}$ 比 $\{x_{n+1}\}$ 更快地收敛于 a 。

证明(从略)

附注. 若误差序列(1.1)有界, 且满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = c \neq 0, 1 \quad (1.6)$$

则定理的结论仍真.

下面研究级数求和的Aitken外推算法.

给定数列级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \quad (1.7)$$

并作部分和

$$x_n = \sum_{i=0}^n a_i, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

关于部分和 $\{x_n\}$ 的 δ^2 外推序列, 我们给出

定理2 若级数(1.7)满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n-1}} = c, \quad 0 < |c| < 1 \quad (1.9)$$

则(1.5)成立, 从而序列 $\{\hat{x}_{n+1}\}$ 比 $\{x_{n+1}\}$ 更快地收敛于级数(1.7)的和 a .

证明 由假设(1.9)知级数(1.7)绝对收敛, 因而有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

即假设(1.9)蕴含级数(1.7)的收敛性. 又由等式

$$\frac{(\Delta \hat{x}_n)^2}{\Delta^2 x_{n-1} d_{n+1}} = \frac{\frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n-1}}}{\left(\frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n-1}} - 1\right) \frac{d_{n+1}}{\Delta x_n}}$$

可知, 为了证明(1.5), 只须证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n-1}}}{\left(\frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n-1}} - 1\right) \frac{d_{n+1}}{\Delta x_n}} = 1$$

即只须证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{n+1}}{\Delta x_n} = \frac{c}{c-1} \quad (1.10)$$

下面通过二个引理来完成(1.10)的证明, 从而定理得证.

引理1 若(1.9)成立, 且 $c > 0$, 则(1.10)成立.

事实上, 给定

$$0 < \varepsilon < \min \left\{ c, \frac{1}{2}(1-c) \right\}$$

由引理的假设, 存在 N , 使当 $n \geq N$ 时, 有

$$0 < c - \varepsilon < \frac{\Delta x_{n+i}}{\Delta x_{n+i-1}} < c + \varepsilon < 1, \quad i = 1, 2, \dots$$

于是, 当 $n \geq N$ 时, 对于 $i = 1, 2, \dots$, 有

$$0 < (c - \varepsilon)^i < \frac{\Delta x_{n+i}}{\Delta x_n} < (c + \varepsilon)^i < (c + \varepsilon) < 1$$

对 i 迭加这个不等式得, 当 $n \geq N$ 时, 有

$$\frac{c - \varepsilon}{1 - c + \varepsilon} < \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_{n+i}}{\Delta x_n} < \frac{c + \varepsilon}{1 - c - \varepsilon}$$

从不等式中减去 $\frac{c}{1-c}$ 得: 当 $n \geq N$ 时,

$$\frac{-\varepsilon}{(1-c)(1-c+\varepsilon)} < \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_{n+i}}{\Delta x_n} - \frac{c}{1-c} < \frac{\varepsilon}{(1-c)(1-c-\varepsilon)}$$

注意到 ε 的选取可知, 当 $n \geq N$ 时, 有

$$\frac{-2\varepsilon}{(1-c)^2} < \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_{n+i}}{\Delta x_n} - \frac{c}{1-c} < \frac{2\varepsilon}{(1-c)^2}$$

由于

$$d_{n+1} = - \sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_{n+i}$$

引理1得证.

引理2 若(1.9)成立, 且 $c < 0$, 则(1.10)也成立.

事实上, 给定

$$0 < \varepsilon < \min \left\{ -c, \frac{1}{2}(1+c) \right\},$$

那么存在 N , 使当 $n \geq N$ 时, 对于 $i = 1, 2, \dots$, 有

$$-1 < c - \varepsilon < \frac{\Delta x_{n+i+1}}{\Delta x_{n+i}} < c + \varepsilon < 0.$$

于是, 当 $2n \geq N$ 时, 对于 $i = 1, 2, \dots$, 我们有

$$\begin{cases} (c - \varepsilon)^{2i-1} < \frac{\Delta x_{2(n+i)-1}}{\Delta x_{2n}} < (c + \varepsilon)^{2i-1}, \\ (c + \varepsilon)^{2i} < \frac{\Delta x_{2(n+i)}}{\Delta x_{2n}} < (c - \varepsilon)^{2i}, \end{cases}$$

及

$$\begin{cases} (c + \varepsilon)^{2i} < \frac{\Delta x_{2(n+i)+1}}{\Delta x_{2n+1}} < (c - \varepsilon)^{2i}, \\ (c - \varepsilon)^{2i-1} < \frac{\Delta x_{2(n+i)}}{\Delta x_{2n+1}} < (c + \varepsilon)^{2i-1}. \end{cases}$$

迭加这二组不等式都得, 当 $n \geq N$ 时, 有

$$\frac{c-\varepsilon}{1-(c-\varepsilon)^2} + \frac{(c+\varepsilon)^2}{1-(c+\varepsilon)^2} < \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_{n+i}}{\Delta x_n} < \frac{c+\varepsilon}{1-(c+\varepsilon)^2} + \frac{(c-\varepsilon)^2}{1-(c-\varepsilon)^2}$$

于是我们有

$$\begin{aligned} \frac{c-\varepsilon}{1-(c-\varepsilon)^2} + \frac{(c+\varepsilon)^2}{1-(c+\varepsilon)^2} &\leq \lim_n \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_{n+i}}{\Delta x_n} \\ &\leq \lim_n \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_{n+i}}{\Delta x_n} \leq \frac{c+\varepsilon}{1-(c+\varepsilon)^2} + \frac{(c-\varepsilon)^2}{1-(c-\varepsilon)^2} \end{aligned}$$

再令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 取极即得

$$\frac{c}{1-c} \leq \lim_n \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_{n+i}}{\Delta x_n} \leq \lim_n \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_{n+i}}{\Delta x_n} \leq \frac{c}{1-c}$$

引理 2 得证.

由于引理 1、引理 2, 定理 2 得证.

对于极限 (1.9) 等于 ± 1 的一类级数, 下面给出序列 $\{\hat{x}_{n+1}\}$ 收敛于级数和 a 的充分条件.

定理 3 若级数 (1.7) 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n+1}} - 1 \right) = r > 1 \quad (1.11)$$

则 (1.4) 成立, 即 $\{\hat{x}_{n+1}\}$ 收敛于级数和 a , 并且有

$$0 \leq \lim_n \frac{\hat{d}_{n+1}}{d_{n+1}} \leq \lim_n \frac{\hat{d}_{n+1}}{d_{n+1}} \leq \frac{1}{r} \quad (1.12)$$

先证 2 个引理.

引理 3 在定理 3 的假定之下, 级数 (1.7) 收敛, 并且有

$$\lim_n \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_{n+i}}{n \Delta x_n} \leq \frac{1}{r-1} \quad (1.13)$$

事实上, 对任意的

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(r-1),$$

存在 N_1 , 使当 $n \geq N_1$ 时, 有

$$n \left(\frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n+1}} - 1 \right) > r - \varepsilon,$$

即当 $n \geq N_1$ 时, 有

$$\frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n+1}} > 1 + \frac{r - \varepsilon}{n}.$$

又因

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{r-2\varepsilon} - 1 \right] = r - 2\varepsilon,$$

故存在 $N > N_1$, 使当 $n \geq N$ 时, 有

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{r-2\varepsilon} < 1 + \frac{r - \varepsilon}{n} < \frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n+1}},$$

即当 $n \geq N$ 时, 有

$$\frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} < \frac{\frac{1}{(n+1)^{r-2\varepsilon}}}{\frac{1}{n^{r-2\varepsilon}}}$$

于是由 $r - 2\varepsilon > 1$ 知级数 (1.7) 收敛, 并且当 $n \geq N$ 时对于 $i = 1, 2, \dots$, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_{n+i}}{\Delta x_n} &< n^{r-2\varepsilon} \cdot \frac{1}{(n+i)^{r-2\varepsilon}} \\ &< \frac{n^{r-2\varepsilon}}{r-2\varepsilon-1} \left[\frac{1}{(n+i-1)^{r-2\varepsilon-1}} - \frac{1}{(n+i)^{r-2\varepsilon-1}} \right] \end{aligned}$$

对 i 迭加不等式得, 当 $n \geq N$ 时,

$$\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_{n+i}}{\Delta x_n} < \frac{n}{r-2\varepsilon-1}$$

于是

$$\lim_n \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_{n+i}}{n \Delta x_n} \leq \frac{1}{r-2\varepsilon-1},$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 取极限即得引理 3.

引理 4 在定理 3 的假定之下有

$$\lim_n \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_{n+i}}{n \Delta x_n} \geq \frac{1}{r} \tag{1.14}$$

事实上, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 使当 $n \geq N$ 时, 有

$$n \left(\frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n+1}} - 1 \right) < r + \varepsilon,$$

即

$$\frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} > \frac{n}{n+r+\varepsilon}.$$

于是, 当 $n \geq N$ 时, 对于 $i = 1, 2, \dots$, 我们有

$$\frac{\Delta x_{n+i}}{\Delta x_n} > \frac{n+i-1}{n+i-1+r+\varepsilon} \cdots \frac{n}{n+r+\varepsilon} > \left(\frac{n}{n+r+\varepsilon}\right)^i$$

对*i*迭加这不等式得, 当 $n \geq N$ 时, 有

$$\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_{n+i}}{\Delta x_n} > \frac{n}{r+\varepsilon},$$

从而

$$\lim_{\frac{1}{n}} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_{n+i}}{n \Delta x_n} \geq \frac{1}{r+\varepsilon}.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 取极限即得引理4.

定理3的证明. 由于

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{d}_{n+1}}{d_{n+1}} &= 1 - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_{n-1} d_{n+1}} = 1 - \frac{\frac{n-1}{n}}{\left[(n-1) \left(\frac{\Delta x_{n-1}}{\Delta x_n} - 1 \right) \right] \left[\frac{-d_{n+1}}{n \Delta x_n} \right]} \\ &= 1 - \frac{\frac{n-1}{n}}{\left[(n-1) \left(\frac{\Delta x_{n-1}}{\Delta x_n} - 1 \right) \right] \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_{n+i}}{n \Delta x_n}} \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} \lim_{\frac{1}{n}} \frac{\widehat{d}_{n+1}}{d_{n+1}} &= 1 - \frac{1}{r} \lim_{\frac{1}{n}} \frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_{n+i}}{n \Delta x_n}} = 1 - \frac{1}{r} \frac{1}{\lim_{\frac{1}{n}} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_{n+i}}{n \Delta x_n}} \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\frac{1}{n}} \frac{\widehat{d}_{n+1}}{d_{n+1}} &= 1 - \frac{1}{r} \lim_{\frac{1}{n}} \frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_{n+i}}{\Delta x_n}} = 1 - \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\lim_{\frac{1}{n}} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_{n+i}}{n \Delta x_n}} \\ &\leq \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

又由等式

$$\widehat{d}_{n+1} = d_{n+1} \cdot \frac{\widehat{d}_{n+1}}{d_{n+1}}$$

可得(1.4). 定理证毕.

不等式(1.12)说明, 对于这一类级数, 部分和 $\{x_n\}$ 经 δ^2 外推之后收敛速度略有加快, 并且将随 r 的增大而逐渐加快. 在极端情形, 即 $r = +\infty$ 时, $\{\widehat{x}_{n+1}\}$ 就比 $\{x_{n+1}\}$

更快地收敛于级数和 a 。

当(1.7)为交错级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i b_i \tag{1.7'}$$

时, 我们有

定理4 若级数(1.7)' 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) = S > 0, \tag{1.15}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b_n - b_{n+1}}{b_{n+2} - b_{n+3}} - 1 \right) = 2r > 2, \tag{1.16}$$

则序列 $\{\hat{x}_{n+1}\}$ 收敛于级数和 a , 并且有

$$\frac{s-r}{s} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{d}_{n+1}}{d_{n+1}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{d}_{n+1}}{d_{n+1}} \leq \frac{s+1-r}{s} \tag{1.17}$$

证明 由假设(1.15)知级数(1.7)' 收敛, 记其和为 a , 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = 1.$$

其次, 把假设(1.16)应用于序列 $\{y_n\}$:

$$y_n = \sum_{i=0}^{2n+1} (-1)^i b_i, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\Delta y_{n-1}}{\Delta y_n} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b_{2n} - b_{2n+1}}{b_{2n+2} - b_{2n+3}} - 1 \right) = r > 1$$

即序列 $\{y_n\}$ 满足假设(1.11), 于是由(1.13)、(1.14)得

$$\frac{\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i b_{2(n+1)+i}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i b_{2(n+1)+i}}{n(b_{2n} - b_{2n+1})}} \leq \frac{1}{r-1}, \quad \frac{\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i b_{2(n+1)+i}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i b_{2(n+1)+i}}{n(b_{2n} - b_{2n+1})}} \geq \frac{1}{r}.$$

又从 $\{x_n\}$ 的定义(1.8)有

$$\begin{aligned} \frac{\hat{d}_{2n+1}}{d_{2n+1}} &= 1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{\Delta x_{2n-1}}{\Delta x_{2n}}\right) \frac{d_{2n+1}}{\Delta x_{2n}}} \\ &= 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{b_{2n}}{b_{2n+1}}\right) n \left(\frac{b_{2n}}{b_{2n+1}} - 1\right) \frac{\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i b_{2(n+1)+i}}{n(b_{2n} - b_{2n+1})}}, \end{aligned}$$

从而得

$$\overline{\lim}_n \frac{\widehat{d}_{2n+1}}{d_{2n+1}} \leq 1 - \frac{1}{2 \cdot \frac{s}{2} \cdot \frac{1}{r-1}} = \frac{s+1-r}{s} .$$

$$\liminf_n \frac{\widehat{d}_{2n+1}}{d_{2n+1}} \geq 1 - \frac{1}{2 \cdot \frac{s}{2} \cdot \frac{1}{r}} = \frac{s-r}{s} .$$

类似可得

$$\overline{\lim}_n \frac{\widehat{a}_{2n+2}}{d_{2n+2}} \leq \frac{s+1-r}{s} , \quad \liminf_n \frac{\widehat{a}_{2n+2}}{d_{2n+2}} \geq \frac{s-r}{s} ,$$

定理因之得证。

不等式(1.17)说明,对于这一类级数,如比值 $\frac{r}{s}$ 随 s 的增大而趋近于1,则序列 $\{\widehat{x}_{n+1}\}$ 的收敛速度将会随 s 的增大而加快。在极端情形,即当 $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{r}{s} = 1$ 时, $\{\widehat{x}_{n+1}\}$ 就比 $\{x_{n+1}\}$ 更快地收敛于级数和 a 。一般说,当 $s \geq \frac{r}{2}$ 时,外推算法才有实际效果。

二、数值例子

求级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \tag{2.1}$$

之和 a 。这也是一个收敛很慢的级数。根据定理3, ($r=2$)其部分和 $\{x_n\}$ 的 δ^2 外推序列 $\{\widehat{x}_{n+1}\}$ 收敛于级数和。现取 $n=12$,我们有

$$x_{12} = 1.5649767$$

及外推值

$$\widehat{x}_{12} = 1.6015078$$

而准确值

$$a = \frac{\pi^2}{6} = 1.64493406 \dots$$

可见,计算结果与理论分析也吻合的。

对于这一类级数,也可继续进行外推,以不断改善级数的收敛性。或者先利用库麦尔(E. E. Kummer)变换[3],增大级数的 r 值,再行外推,以提高 $\{\widehat{x}_{n+1}\}$ 的收敛速度。或者运用积分近似公式增大级数的 r 值[2]。例如,对于级数(2.1),运用梯形法及辛浦生法后分别变为

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2(i+1)^2} \tag{2.2}$$

及

$$2 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2(4i-1)^2} \tag{2.3}$$

它们的 r 值依次为4及64。根据定理3,它们的部分和 $\{x_n\}$ 的 δ^2 外推序列的收敛速度将进一步得到改善。

参 考 文 献

- [1] D. C. Joyce, W. J. Thron, Survey of extrapolation Processes in numerical analysis, *SIAM Rev.*, 13 (1971), 435—490.
 [2] Г. С. Салехов, Вычисление Рядов, Москва, 1955.
 [3] Б. Л. Демидович, И. А. Марон, Основы Вычислительной Математики, Москва, 1960.

An Extrapolation Method Used to Accelerate Convergence Series

Huang Youqian Xie Pingmin

Abstract

In this paper several theorems are given to show that by using Aitken Extrapolation method the convergence of series may be accelerated.

Our contribution to give the proofs of theorems 3 and 4 which are stated as following

Theorem 3 If the series (1,7) satisfies

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n+1}} - 1 \right) = r > 1 \quad (1.11)$$

then

$$\text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{x}_{n+1} = a$$

$$\text{ii) } 0 \leq \liminf_n \frac{\hat{d}_{n+1}}{d_{n+1}} \leq \overline{\lim}_n \frac{\hat{d}_{n+1}}{d_{n+1}} \leq \frac{1}{r}.$$

Theorem 4 If the series (1,7)' satisfies

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) = s > 0 \quad (1.15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b_n - b_{n+1}}{b_{n+2} - b_{n+3}} - 1 \right) = 2r > 2 \quad (1.16)$$

then

$$\text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{x}_{n+1} = a$$

$$\text{ii) } \frac{s-r}{s} \leq \liminf_n \frac{\hat{d}_{n+1}}{d_{n+1}} \leq \overline{\lim}_n \frac{\hat{d}_{n+1}}{d_{n+1}} \leq \frac{s-r+1}{s}.$$