抽象HILBERT空间中带线性等式约束或带凸约束的LQ最优控制

陈关荣

（计算机科学系）

Kalman首先就Euclid空间不带约束条件的LQ最优控制问题进行了研究[3,4]；随后，Lukes和Russell、Datko相继讨论了Hilbert空间这种无约束LQ最优控制问题[5-8]；Daniel[9]对于在Hilbert空间求解非线性和凸约束最优控制问题给出了一种Ritz-Galerkin逼近；Barbu[10]则对Hilbert空间仅带关于状态变量x的凸约束并具有凸代价指标的线性控制过程给出了使(x,u)成为最优解的一种充分必要条件。

本文通过所论最优控制问题与Hilbert空间样条函数之间的一种等价性证明，给出了一类实抽象Hilbert空间对状态变量x和控制变量u(分别或同时)带有线性等式约束或带有凸约束，并具有二次型代价指标的、有限时域线性控制过程最优解(x^*,u^*)的存在唯一性定理和特征性定理。

§1 主要结果

问题 I

求最优控制u^*及最佳轨迹x^*使满足线性动态方程

$$\mathfrak{L}x=Bu,\quad x\in\hat{X}=L_2[I;X],\quad u\in\hat{V}=L_2[I;V];\tag{1}$$

及线性连续满射算子$\lambda:\hat{X}\to H$的等式约束

$$\lambda[Gx+Cu]=r,\quad r\in H;\tag{2}$$

并使二次型代价指标

$$J=\int_I\{\langle x,Qx\rangle_X+\langle u,Ru\rangle_V\}\,dt\tag{3}$$

成为极小。其中

$\mathfrak{L}$是任意阶的(常、偏)线性微分算子(阵)；I为正实线上的有界区间集；连续线性算子$B:\hat{V}\to\hat{V}$，$G:\hat{X}\to\hat{X}$，$C:\hat{V}\to\hat{X}$(G、C不全为零算子θ)；连续线性自共轭正算子$Q:\hat{X}\to\hat{X}$[注1]，$R:\hat{V}\to\hat{V}$；X、V、H为一类适当的实抽象Hilbert空间（使得线性算子$\mathfrak{L}$

[注1] 对$Q=\theta$即极小能控制情形，以下推导仍可同样进行，只是最后结果有所区别。

成为连续〔注2〕），$\hat{X}=L_2[I;X]$表示定义于I而取值于X且满足$\int_I\langle x(t),x(t)\rangle_X\,dt<\infty$的函数空间，其范数定义为$\|\cdot\|_X=(\int_I\langle\cdot,\cdot\rangle_X dt)^{1/2}$。

注意，在本文中我们总假定算子B有有界逆B^{-1}〔注3〕。若假定问题$\mathfrak{L}x=Bu$，$x(o)=x_0$存在唯一解，则B有逆的条件可以取消（见附录）。

现在，把(1)式改写成

$$u=B^{-1}\mathfrak{L}x; \tag{4}$$

把正算子Q、R分别分解为两个唯一的自共轭算子之积

$$Q=\widetilde{Q}^*\widetilde{Q},\ R=\widetilde{R}^*\widetilde{R}; \tag{5}$$

然后再把(4)(5)式代入(3)式便得

$$J=\int_I\{\langle\widetilde{Q}x,\ \widetilde{Q}x\rangle_X+\langle\widetilde{R}B^{-1}\mathfrak{L}x,\ \widetilde{R}B^{-1}\mathfrak{L}x\rangle_V\}\,dt$$

$$=\int_I\langle\widetilde{x},\widetilde{x}\rangle_X dt+\int_I\langle L\widetilde{x},\ L\widetilde{x}\rangle_V td=\|\widetilde{x}\|^2_{\hat{X}}+\|L\widetilde{x}\|^2_{\hat{V}}; \tag{6}$$

其中$\widetilde{x}=\widetilde{Q}x$；$L=\widetilde{R}B^{-1}\mathfrak{L}\widetilde{Q}^{-1}$；$L:\hat{X}\to\hat{V}$。注意，在上述变换

$$x=\widetilde{Q}^{-1}\ \widetilde{x} \tag{7}$$

之下，(4)式可改写成

$$u=\widetilde{R}^{-1}L\widetilde{x}; \tag{8}$$

从而约束条件(2)也可以改写成

$$\widetilde{\lambda}[\widetilde{x}]=\lambda[G\widetilde{Q}^{-1}+C\widetilde{R}^{-1}L]\ \widetilde{x}=r; \tag{9}$$

现在，因上述线性连续算子$L:\hat{X}\to\hat{V}$，记

$$I_r=\{\ \widetilde{x}\epsilon\hat{X}\,|\,\widetilde{x}[\widetilde{x}]=r\ \}; \tag{10}$$

并引进一个新的Hilbert空间$\hat{Z}=\hat{X}\times\hat{V}$，其内积定义为

$$\langle z_1,z_2\rangle_Z=\langle\widetilde{x}_1,\ \widetilde{x}_2\rangle_X+\langle L\widetilde{x}_1,L\widetilde{x}_2\rangle_V; \tag{11}$$

而其范数定义为$\|\cdot\|_{\hat{Z}}=(\int_I\langle\cdot,\cdot\rangle_Z dt)^{1/2}$且

$$z_1=[\widetilde{x}_1,\ L\widetilde{x}_1]\epsilon\hat{Z};$$

$$z_2=[\widetilde{x}_2,\ L\widetilde{x}_2]\epsilon\hat{Z};$$

再定义线性连续算子$\widetilde{L}:\hat{X}\to\hat{Z}$为

$$\widetilde{L}\ \widetilde{x}=[\widetilde{x},\ L\widetilde{x}]; \tag{12}$$

则可见

〔注2〕 例如，（常、偏）微分算子在满足系数和边界的适当的正则性条件时是Sobolev 空间之间的连续算子。

〔注3〕 对于形如(1)的系统，此假定常能满足(包括了所有单输入单输出系统和能化成(1)式的那些向量形式的系统，及某些大规模并联系统[15])。

$$\|\widetilde{L}\widetilde{x}\|^2_{\hat{Z}} = \int_I \langle \widetilde{L}\widetilde{x}, \widetilde{L}\widetilde{x} \rangle_Z dt$$

$$= \int_I \langle \widetilde{x}, \widetilde{x} \rangle_X dt + \int_I \langle L\widetilde{x}, L\widetilde{x} \rangle_V dt \quad = \|\widetilde{x}\|^2_{\hat{X}} + \|L\widetilde{x}\|^2_{\hat{V}};$$

与(6)式比较，即知问题Ⅰ与下述Hilbert空间中的插值样条问题等价。

问题Ⅱ

求$\widetilde{x}^* \in I_r$使满足

$$\|\widetilde{L}\widetilde{x}^*\|_{\hat{Z}} = \min_{\widetilde{x} \in I_r} \|\widetilde{L}\widetilde{x}\|_{\hat{Z}}. \tag{14}$$

由问题Ⅱ的解通过(7)、(8)两式即可给出问题Ⅰ的解.这样，我们便给出了 Hilbert 空间中的插值样条与带线性等式约束的LQ最优控制问题之间的一个有意义的联系。

同样，可以证明下述带凸约束的LQ最优控制（问题Ⅲ）与凸集上的样条函数(问题Ⅳ)等价。

问题Ⅲ

求最优控制u^*及最佳轨迹x^*使满足线性动态方程

$$\mathfrak{L}x = Bu, \quad x \in \hat{X} = L_2[I; X]; \ u \in \hat{V} = L_2[I; V]; \tag{15}$$

及线性连续满射算子$\lambda: \hat{X} \to H$的凸约束

$$\lambda[Gx + Cu] \in \Gamma \subset H; \tag{16}$$

并使二次型代价指标

$$J = \int_I \{ \langle x, Qx \rangle_X + \langle u, Ru \rangle_V \} dt \tag{17}$$

成为极小。其中

Γ为凸闭集；其余符号同问题Ⅰ；此外对有关注意问题的说明亦同前述。

问题Ⅳ

求$\widetilde{x}^* \in \widetilde{\Omega}$使

$$\|\widetilde{L}\widetilde{x}^*\|_{\hat{Z}} = \min_{\widetilde{x} \in \widetilde{\Omega}} \|\widetilde{L}\widetilde{x}\|_{\hat{Z}}; \tag{18}$$

其中

$$\widetilde{\Omega} = \{ \widetilde{x} \in \hat{\chi} \mid \widetilde{\lambda}[\widetilde{x}] \in \Gamma \}; \tag{18.1}$$

$$\widetilde{\lambda}[\widetilde{x}] = \lambda[G\widetilde{Q}^{-1} + C\widetilde{R}^{-1}L] \ \widetilde{x} \in \Gamma \subset H; \tag{18.2}$$

其余符号同问题Ⅱ.

由前面建立的这种等价性，我们看到，只要能求出问题Ⅱ（或问题Ⅳ）的样条函数解$\widetilde{x}^*$，就能通过(7)、(8)两式求出问题Ⅰ（或问题Ⅲ）的最优解（u^*、x^*）．也就是

说，两种情形下的最优控制u^*和最佳轨迹x^*实际上都是Hilbert空间中的样条函数（插值样条或凸集上的样条）。

对于这些作为最优解的样条函数的具体构造方法和数值例子，将另文介绍。

§2　带线性等式约束情形的若干定理

由§1给出的等价性，使我们能通过问题Ⅱ的相应结果来给出问题Ⅰ的解的存在唯一性定理和特征性定理。

定理2.1（存在唯一性）

问题Ⅰ存在唯一解的充分必要条件是

$$N(\overline{\lambda})=\overline{N(\overline{\lambda})};\tag{19}$$

其中$\overline{N}$为N的闭包；$N(\overline{\lambda})=\{x\in\hat{X}\mid\overline{\lambda}[x]=\theta\}$；$\overline{\lambda}[\cdot]=\widetilde{\lambda}\widetilde{Q}[\cdot]=\lambda[G+C\widetilde{R}^{-1}L\widetilde{Q}][\cdot]$.

证　因为问题Ⅱ存在唯一解的充分必要条件是[1,2]

$$N(\widetilde{L})+N(\widetilde{\lambda})=\overline{N(\widetilde{L})+N(\widetilde{\lambda})};$$

$$N(\widetilde{L})\cap N(\widetilde{\lambda})=\{\theta\};$$

其中$N(\widetilde{L})=\{x\in\hat{X}\mid\widetilde{L}x=\theta\}$，而由$\widetilde{L}$的定义(12)可见有$N(\widetilde{L})=\{\theta\}$，且显然$\theta\in N(\widetilde{\lambda})$即$N(\widetilde{\lambda})\neq\phi$，故得知问题Ⅰ存在唯一解的充要条件为$N(\widetilde{\lambda})=\overline{N(\widetilde{\lambda})}$。又令算子$\overline{\lambda}=\widetilde{\lambda}\widetilde{Q}$，则由

$$N(\widetilde{\lambda})=\{\widetilde{x}\in\hat{X}\mid\widetilde{\lambda}[\widetilde{x}]=\theta\},$$

得

$$N(\overline{\lambda})=\{x\in\hat{X}\mid\overline{\lambda}[x]=\theta\};$$

其中$\overline{\lambda}=\widetilde{\lambda}\widetilde{Q}=\lambda[G+C\widetilde{R}^{-1}L\widetilde{Q}]$；证毕。

定理2.2（特征性质）

设$\overline{x}\in\hat{X}$，$\overline{u}\in\hat{V}$且满足约束条件(2)，则$\overline{x}$及$\overline{u}$是问题Ⅰ的最优解的充分必要条件是对一切满足对应的齐约束条件

$$\lambda[Gx+Cu]=\theta\tag{20}$$

的$x\in\hat{X}$和$u\in\hat{V}$都有

$$\int_I\{\langle\overline{x},Qx\rangle_X+\langle\overline{u},Ru\rangle_V\}\,dt=0.\tag{21}$$

证　因为$\overline{\widetilde{x}}\in I_r$是问题Ⅱ的解的充要条件是[1,2]对一切的$\widetilde{x}\in I_0=N(\widetilde{\lambda})$都有

$$\int_I\langle\widetilde{L}\overline{\widetilde{x}},\widetilde{L}\widetilde{x}\rangle_Z dt=0;$$

而条件$\overline{\widetilde{x}}\in I_r$相当于

$$\lambda[G\widetilde{Q}^{-1}+C\,\widetilde{R}^{-1}L]\,\widetilde{Q}\,\bar{x}=r,$$

即

$$\lambda[G\bar{x}+C\bar{u}]=r;$$

同样，条件$\widetilde{x}\epsilon I_0$相当于

$$\lambda[Gx+Cu]=\theta;$$

再由(11)式知

$$\langle\widetilde{L}\,\widetilde{\bar{x}},\widetilde{L}\,\widetilde{x}\rangle_Z=\langle\widetilde{\bar{x}},\widetilde{x}\rangle_X+\langle L\widetilde{\bar{x}},L\widetilde{x}\rangle_V=\langle\bar{x},Qx\rangle_X+\langle\bar{u},Ru\rangle_V$$

故得所证。

定义 2.3

称空间$\hat{X}\times\hat{V}$中的子空间$S_1\times S_2$为样条函数空间：

$$S_1\times S_2=\{[s_1,s_2]\epsilon\hat{X}\times\hat{V}\mid\int_I\{\langle s_1,Qx\rangle_X+\langle s_2,Ru\rangle_V\}\,dt=0$$

$$\text{对一切满足(20)的}[x,u]\epsilon\hat{X}\times\hat{V}\}.\tag{22}$$

定理 2.4

对任一$r\epsilon H$，存在唯一的$[s_1,s_2]\epsilon S_1\times S_2$满足

$$\lambda[Gs_1+Cs_2]=r.\tag{23}$$

证 因为对任一$r\epsilon H$，存在唯一的$s\epsilon S$（样条函数空间）[1,2]：

$$S=\{s\epsilon\hat{X}\mid\int_I\langle\widetilde{L}s,\widetilde{L}\,\widetilde{x}\rangle_Z dt=0,\text{对一切}\widetilde{x}\epsilon I_0\}\tag{24}$$

满足

$$\widetilde{\lambda}[s]=r;\tag{25}$$

所以，由(11)式知

$$\int_I\langle\widetilde{L}s,\widetilde{L}\,\widetilde{x}\rangle_Z dt=\int_I\langle s,\widetilde{x}\rangle_X dt+\int_I\langle Ls,L\widetilde{x}\rangle_V dt$$

$$=\int_I\langle s_1,Qx\rangle_X\,dt+\int_I\langle s_2,Ru\rangle_V dt=0;$$

其中

$$s_1=\widetilde{Q}^{-1}s;\tag{26}$$

$$s_2=\widetilde{R}^{-1}Ls;\tag{27}$$

从而由$s\epsilon S$的存在唯一性即对应得$[s_1,s_2]\epsilon S_1\times S_2$的存在唯一性；又由(9)式知

$$\widetilde{\lambda}[s]=\lambda[G\widetilde{Q}^{-1}+C\widetilde{R}^{-1}L]s=\lambda[Gs_1+Cs_2];$$

故得所证。

定理 2.5

设$r\epsilon H$为任一给定值，$[s_1,s_2]\epsilon S_1\times S_2$为唯一满足(25)式的元素，则

(i) $$\int_I\{\langle s_1-x,Q(s_1-x)\rangle_X+\langle s_2-u,R(s_2-u)\rangle_V\}\,dt$$

$$= \min_{[\widetilde{s_1},\widetilde{s_2}]\in S_1\times S_2} \int_I \{\langle \widetilde{s_1}-x, Q(\widetilde{s_1}-x)\rangle_X + \langle \widetilde{s_2}-u, R(\widetilde{s_2}-u)\rangle_V\} dt; \quad (28)$$

对任意满足(2)式的(x,u)成立；且$[s_1,s_2]$是$S_1\times S_2$中唯一具有此性质的元素

(ii)
$$\int_I \{\langle s_1-\widetilde{s_1}, Q(s_1-\widetilde{s_1})\rangle_X + \langle s_2-\widetilde{s_2}, R(s_2-\widetilde{s_2})\rangle_V\} dt$$
$$= \min_{(x,u)\text{满足}(2)} \int_I \{\langle x-\widetilde{s_1}, Q(x-\widetilde{s_1})\rangle_X + \langle u-\widetilde{s_2}, R(u-\widetilde{s_2})\rangle_V\} dt; \quad (29)$$

对任意$[\widetilde{s_1},\widetilde{s_2}]\in S_1\times S_2$成立，且$[s_1,s_2]$是满足(2)式的唯一具有此性质的元素。

证　因为若设$r\in H$为任一给定值，$s\in S$为任一满足(9)式的元素，则有[1,2]

(i)
$$\|\widetilde{L}(s-\widetilde{x})\|_{\hat{Z}} = \min_{\widetilde{s}\in S}\|\widetilde{L}(\widetilde{s}-\widetilde{x})\|_{\hat{Z}}$$

对任意$\widetilde{x}\in I_r$成立，且若尚有$\hat{s}\in S$具有此性质，则$\hat{s}-s\in N(\widetilde{L})$。

(ii)
$$\|\widetilde{L}(s-\widetilde{s})\|_{\hat{Z}} = \min_{\widetilde{x}\in I_r}\|\widetilde{L}(\widetilde{x}-\widetilde{s})\|_{\hat{Z}}$$

对任意$\widetilde{s}\in S$成立，且s是I_r中唯一具有此性质的元素。

所以，由(11)式知

$$\|\widetilde{L}(s-\widetilde{x})\|^2_{\hat{Z}} = \int_I \{\langle s-\widetilde{x}, s-\widetilde{x}\rangle_X + \langle L(s-\widetilde{x}), L(s-\widetilde{x})\rangle_V\} dt$$
$$= \int_I \{\langle s_1-x, Q(s_1-x)\rangle_X + \langle s_2-u, R(s_2-u)\rangle_V\} dt$$

从而可得(28)式。又注意到$N(\widetilde{L})=\{\theta\}$，便得唯一性；这即证明了(i)。关于(ii)的证明则完全类似。定理证毕。

§3　带凸约束情形的若干定理

同样，由§1给出的等价性，使我们能通过问题Ⅳ的相应结果来给出问题Ⅲ的解的存在唯一性定理和特征性定理。

定理 3.1（存在性）

若$\Omega+\{\theta\}$为闭集，则问题Ⅲ至少存在一组最优解(x^*,u^*)。其中

$$\Omega = \{[x,u]\in\hat{X}\times\hat{V} \mid \lambda[Gx+Cu]\in\Gamma\subset H\}. \quad (30)$$

证　因为问题Ⅳ当$N(\widetilde{L})+\widetilde{\Omega}$为闭集时至少存在一个解，其中$\widetilde{\Omega}$由(18.1)定义[1]。但由$\widetilde{L}$的定义(12)式可见，$N(\widetilde{L})=\{\theta\}$；又由$\widetilde{\Omega}$的定义和$\widetilde{\lambda}$的定义(18.2)以及(7)、(8)式即知(30)式成立。证毕。

定理 3.2（唯一性）

设现在

$$\Omega=\{[x,u]\in\hat{X}\times\hat{V}\mid\int_I\langle e,Gx+Cu\rangle_X dt\leqslant h(e),\ \forall e\in\hat{E}\};\tag{31}$$

其中h是$\hat{E}$上的连续泛函，$\hat{E}$是$\hat{X}$中不含零元的列紧子集，且

1）当X为无穷维空间时，$\hat{E}$在$\hat{X}$中稠密；

2）当X为n维空间时，$\hat{E}$中至少有n个线性无关的元素；

这样，问题Ⅲ如果有解，其解必唯一。

证　因为按Ω现在的定义

$$\int_I\langle e,Gx+Cu\rangle_X dt=\lambda[Gx+Cu]=\lambda[\bar{x}]=\int_I\langle e,\bar{x}\rangle_X dt$$

其中$\bar{x}=[G\widetilde{Q}^{-1}+C\widetilde{R}L]\tilde{x}=[Gx+Cu]$，故此按$\widetilde{\Omega}$的定义知现在

$$\widetilde{\Omega}=\{\bar{x}\in\hat{X}\mid\int_I\langle e,\bar{x}\rangle_X dt\leqslant h(e),\ \forall e\in\hat{E}\};\tag{32}$$

下面只须证在此凸约束条件下，问题Ⅳ如果有解，其解必唯一，从而定理便得证。

假定问题Ⅳ有解$\bar{x}_1$和$\bar{x}_2$。我们取$\bar{x}_0=\frac{1}{2}(\bar{x}_1+\bar{x}_2)$并记

$$F(\bar{x}_1)=\{e\in\hat{E}\mid\int_I\langle e,\bar{x}_1\rangle_X dt=h(e)\};$$

$$F(\bar{x}_2)=\{e\in\hat{E}\mid\int_I\langle e,\bar{x}_2\rangle_X dt=h(e)\};$$

$$F(\bar{x}_0)=\{e\in\hat{E}\mid\int_I\langle e,\bar{x}_0\rangle_X dt=h(e)\};$$

先来证明对任意$e\in F(\bar{x}_0)$都有$e\in F(\bar{x}_1)$，$e\in F(\bar{x}_2)$。因为这时由

$$\int_I\langle e,\bar{x}_0\rangle_X dt=\int_I\frac{1}{2}\langle e,\bar{x}_1\rangle_X dt+\int_I\frac{1}{2}\langle e,\bar{x}_2\rangle_X dt=h(e)$$

可推得

$$\int_I\langle e,\bar{x}_1\rangle_X dt=\int_I\langle e,\bar{x}_2\rangle_X dt=h(e);\tag{33}$$

假若不然，设$\int_I\langle e,\bar{x}_1\rangle_X dt>h(e)$，则由凸集$\widetilde{\Omega}$的定义(32)却有$\int_I\langle e,\bar{x}_1\rangle_X dt\leqslant h(e)$，矛盾；又设$\int_I\langle e,\bar{x}_1\rangle_X dt<h(e)$，则有$\int_I\langle e,\bar{x}_2\rangle_X dt>h(e)$，亦矛盾，故(33)式必成立，从而对任意$e\in F(\bar{x}_0)$都有$e\in F(\bar{x}_1)$、$e\in F(\bar{x}_2)$即

$$F(\bar{x}_0)\subset F(\bar{x}_1),\ F(\bar{x}_0)\subset F(\bar{x}_2);$$

再任取$\bar{e}\in F(\bar{x}_0)$，则

$$\int_I\langle\bar{e},\bar{x}_1-\bar{x}_2\rangle_X dt=\int_I\langle\bar{e},\bar{x}_1\rangle_X dt-\int_I\langle\bar{e},\bar{x}_2\rangle_X dt$$

$$=h(\bar{e})-h(\bar{e})=0;$$

当$\hat{X}$为无穷维空间时，由假设1)有$\bar{x}_1-\bar{x}_2=\theta$；当$\hat{X}$为$n$维空间时，由假设2) 亦有$\bar{x}_1-\bar{x}_2=\theta$；总之有$x_1=x_2$，证毕。

定理 3.3（特征性质1）

如果(x^*,u^*)是问题Ⅲ的最优解，则

$$\int_I \{\langle x^*,Qx\rangle_X+\langle u^*,Ru\rangle_V\}\,dt=0 \tag{34}$$

对所有满足

$$\lambda[Gx+Cu]=\theta \tag{35}$$

的 $x\in\hat{X}$、$u\in\hat{V}$成立。

证　由(18)式可见，元素$\tilde{y}=\tilde{L}\tilde{x}$是零元$\theta_{\hat{Z}}$在凸集$\tilde{\Omega}$上的最佳逼近元素，故有

$$\langle\tilde{y},\tilde{y}-y\rangle_{\hat{Z}}\leqslant 0,\quad \forall y\in\tilde{L}(\tilde{\Omega});$$

即

$$\langle\tilde{L}\tilde{x}^*,\ \tilde{L}\tilde{x}^*-\tilde{L}\sigma\rangle_{\hat{Z}}\leqslant 0,\quad \forall\sigma\in\tilde{\Omega}; \tag{36}$$

任取$\tilde{x}\in N(\tilde{\lambda})$，因$\tilde{x}\in\tilde{\Omega}$，故

$$\tilde{\lambda}[\tilde{x}^*-\tilde{x}]=\tilde{\lambda}[\tilde{x}^*]-\lambda[\tilde{x}]=\tilde{\lambda}[\tilde{x}^*]\in\Gamma;$$

从而$\tilde{x}^*-\tilde{x}\in\tilde{\Omega}$。令$\sigma=\tilde{x}^*-\tilde{x}$，由(36)式得

$$\langle\tilde{L}\tilde{x}^*,\ \tilde{L}\tilde{x}^*-\tilde{L}(\tilde{x}^*-\tilde{x})\rangle_{\hat{Z}}\leqslant 0;$$

即

$$\langle\tilde{L}\tilde{x}^*,\ \tilde{L}\tilde{x}\rangle_{\hat{Z}}\leqslant 0,\quad \forall\tilde{x}\in N(\tilde{\lambda});$$

特别，取$-\tilde{x}\in N(\tilde{\lambda})$，又有

$$\langle\tilde{L}\tilde{x}^*,\ \tilde{L}(-\tilde{x})\rangle_{\hat{Z}}\leqslant 0,$$

即

$$\langle\tilde{L}\tilde{x}^*,\ \tilde{L}\tilde{x}\rangle_{\hat{Z}}\geqslant 0;$$

故有

$$\langle\tilde{L}\tilde{x}^*,\ \tilde{L}\tilde{x}\rangle_{\hat{Z}}=0,\quad \forall\tilde{x}\in N(\tilde{\lambda}). \tag{37}$$

现在利用(37)式的结果便可以获得我们的结论。这只须注意到条件$\tilde{x}\in N(\tilde{\lambda})$相当于条件(35)。且由(11)式知

$$\langle\tilde{L}\tilde{x}^*,\ \tilde{L}\tilde{x}\rangle_{\hat{Z}}=\int_I\{\langle\tilde{x}^*,\ \tilde{x}\rangle_X+\langle\widetilde{Lx^*},\ \widetilde{Lx}\rangle_V\}\,dt$$

$$=\int_I \{ \langle x^*, Qx\rangle_X + \langle u^*, Ru\rangle_V \} dt;$$

于是便得所证。

定理 3.4 （特征性质2）

设Ω如(31)所示且其内部非空，则(x^*,u^*)是问题Ⅱ的解当且仅当它们满足(4)式且

$$-(L^*L+I)\widetilde{Q}\ x^*\epsilon\overline{CC}\ (F(\widetilde{Q}x^*)); \tag{38}$$

其中$F(x)=\{ e\epsilon\hat{E} \mid \int_I \langle e,x\rangle_X dt = h(e)\}$，$\hat{E}$是$\hat{X}$中的列紧子集，$h$是$\hat{E}$上的连续泛函；$\overline{C}C(A)$是$A$的以零元为顶点包含$A$的最小闭凸锥（闭凸锥包）。

证 因为$\widetilde{x^*}$是问题Ⅳ的解[1]当且仅当

$$-\widetilde{L}^*\widetilde{L}\widetilde{x}^*\epsilon\ \overline{C}C(F(\widetilde{x^*}))$$

其中$\widetilde{\Omega}$如(32)所示且其内部非空．故注意到(11)式有

$$\langle \widetilde{L}\widetilde{x},\widetilde{L}\widetilde{x}\rangle_Z = \langle\widetilde{x},\widetilde{x}\rangle_X + \langle L\widetilde{x},\ L\widetilde{x}\rangle_V$$

$$\langle \widetilde{L}^*\widetilde{L}\widetilde{x},\widetilde{x}\rangle_X = \langle\widetilde{x},\widetilde{x}\rangle_X + \langle L^*L\widetilde{x},\widetilde{x}\rangle_X = \langle (L^*L+I)\widetilde{x},\widetilde{x}\rangle_X$$

即得所证。

推论 3.5

设现在

$$\Omega=\{ [x,u]\epsilon\hat{X}\times\hat{V} \mid \alpha_j \leqslant \int_I \langle e_j, Gx+Cu\rangle_X dt \leqslant \beta_j,$$

$$\alpha_j<\beta_j,\ j=1,\cdots,N\}; \tag{39}$$

则(x^*,u^*)是问题Ⅱ的解当且仅当

$$(L^*L+I)\widetilde{Q}x^* = \sum_{j=1}^{N}\xi_j e_j; \tag{40}$$

其中

$$\xi_j\leqslant 0,\ \text{如果}\int_I \langle e_j, Gx^*+Cu^*\rangle_X dt=\beta_j;$$

$$\xi_j\geqslant 0,\ \text{如果}\int_I \langle e_j, Gx^*+Cu^*\rangle_X dt=\alpha_j;$$

$$\xi_j=0,\ \text{如果}\alpha_j<\int_I \langle e_j, Gx^*+Cu^*\rangle_X dt<\beta_j;$$

证 由(39)式可知现在$\hat{E}=\{e_1,\cdots,e_N;-e_1,\cdots,-e_N\}$，其中

$$\left.\begin{array}{l}\int_I \langle e_j, Gx+Cu\rangle_X dt=\beta_j,\\ \int_I \langle -e_j, Gx+Cu\rangle_X dt=\alpha_j,\end{array}\right. \quad j=1,\cdots,N;$$

$$h(e_j)=\beta_j,\ h(-e_j)=-\alpha_j,\quad j=1,\cdots,N;$$

由定理3.4，把$\hat{E}$的元素重排为三组，即

$$\int_I \langle e_j, Gx^* + Cu^* \rangle_X dt = \beta_j, \quad j = 1, \cdots, m_1;$$

$$\int_I \langle -e_j, Gx^* + Cu^* \rangle_X dt = -\alpha_j, \quad j = m_1 + 1, \cdots, m_2;$$

$$\alpha_j < \int_I \langle e_j, Gx^* + Cu^* \rangle_X dt < \beta_j, \quad j = m_2 + 1, \cdots, N;$$

则这时$F(\widetilde{Q}x^*) = \{e_1, \cdots, e_{m_1}, -e_{m_1+1}, \cdots, -e_{m_2}\}$从而$\overline{CC}\ (F(\widetilde{Q}x^*))$可以写成

$$\sum_{j=1}^{m_1} \rho_j e_j + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} \rho_j(-e_j), \ \forall \rho_j \geqslant 0, \ j = 1, \cdots, m_2;$$

因为

$$-(L^*L + I)\widetilde{Q}x^* \in \overline{CC}\ (F(\widetilde{Q}x^*))$$

所以

$$-(L^*L + I)\widetilde{Q}x^* = \sum_{j=1}^{m_1} \mu_j e_j + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} \mu_j(-e_j), \ \mu_j \geqslant 0;$$

$$(L^*L + I)\widetilde{Q}x^* = \sum_{j=1}^{m_1} (-\mu_j) e_j + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} \mu_j e_j, \ \mu_j \geqslant 0;$$

令$\lambda_j = -\mu_j$，$j = 1, \cdots, m_1$；$\lambda_j = \mu_j$，$j = m_1 + 1, \cdots, m_2$；$\lambda_j = 0$，$j = m_2 + 1, \cdots, N$；则

$$(L^*L + I)\widetilde{Q}x^* = \sum_{j=1}^{m_2} \lambda_j e_j = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j e_j.$$

证毕。

本文的全部结论对一般分布参数系统和集中参数系统都是成立的。

附　录

若假定算子$\mathfrak{L}$有逆$\mathfrak{L}^{-1}$，则由(1)解出

$$x = \mathfrak{L}^{-1} B u$$

后代入(3)得$(Q \neq \theta)$

$$J = \|L\widetilde{u}\|^2_{\hat{X}} + \|\widetilde{u}\|^2_{\hat{V}}.$$

其中$\widetilde{u} = \widetilde{R}u, L = \widetilde{Q}\mathfrak{L}^{-1}B\widetilde{R}^{-1}$，完全类似地可证明问题 I 与下述插值样条问题等价：

问题 I′

求$\widetilde{u}^* \in \mathrm{I}_r$使满足

$$\|\widetilde{L}\widetilde{u}^*\|_{\hat{Z}} = \min_{\widetilde{u} \in \mathrm{I}_r} \|\widetilde{L}\widetilde{u}\|_{\hat{Z}}.$$

其中$\mathrm{I}_r = \{\widetilde{u} \in \hat{V} \mid \widetilde{\lambda}[\widetilde{u}] = r\}$；$\widetilde{\lambda} = \lambda[G\widetilde{Q}^{-1}L + C\widetilde{R}^{-1}]$；$\widetilde{L}\widetilde{u} = [L\widetilde{u}, \widetilde{u}] \in \hat{Z} = \hat{X} \times \hat{V}$.

由问题 I′求得$\widetilde{u}^*$后，由$u = \widetilde{R}^{-1}\widetilde{u}$及$x = \widetilde{Q}^{-1}L\widetilde{u}$即得原问题的最优解$(x^*, u^*)$。

由此等价性而得到的一系列存在唯一性定理和特征性定理，除个别符号的含义要作相应的改变外，形式上是完全一样的。这里并不要求算子B有逆，且是先确定控制$\widetilde{u}^*$再由之而确定状态，故更符合工程习惯.但这里要求$\mathfrak{Z}$可逆且$Q\neq\theta$(即不适合于极小能控制)。

参考文献

〔1〕P.—J. Laurent, *Approximation et Opetimisation*, Hermann, Paris, 1972. 俄译本：П.-Ж. Лоран, Аппроксимация и Оптимизация, Издательство МИР, Москва, 1975.

〔2〕李岳生，样条与插值，上海科学技术出版社.

〔3〕R.E.Kalman, Contributions to the theory of optimal control, *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 5 (1960), 102—119.

〔4〕E.B.Lee and L. Markus, *Foundations of Optimal Control Theory*, John Wiley, Now York, 1967.

〔5〕D.L.Lukes and D.L.Russell, The quadratic criterion for distributed systems, *SIAM J. Control*, 7 (1969), 1, 101—121.

〔6〕R. Datko, A linear control problem in an abstract Hilbert space, *J. of Differential Equations*, 9 (1971), 346—359.

〔7〕R. Datko, Unconstrained control problem with quadratic cost, *SIAM J. Control*, 11 (1973), 1, 32—52.

〔8〕A.V.Balakrishnan, *Applied Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1976.

〔9〕J.W.Daniel, The Ritz-Galerkin method for abstract optimal control problems, *SIAM J, Control*, 11 (1973), 1, 53—63.

〔10〕V.Barbu, Constrained control problems with convex cost in Hilbert space, *J. Math. Anal. Appl.*, 56 (1976), 1, 502—528.

〔11〕M.A. 纳依玛克，线性微分算子，科学出版社，1964.

〔12〕N. Dunford and J. Schwartz, *Linear Operators*, Part I, Interscience, New York. 1958.

〔13〕R. S. Varga, *Functional Analysis and Approximation Theory in Numerical Analysis*, England, 1971.

〔14〕O. L. Mangasarian and L. L. Schumaker, Splines via optimal control, Approximations with special emphasis on spline functions, I. J. Schoenberg ed., Academic Press, New York, London, (1969), 119—156.

〔15〕陈关荣，最优控制计算中的样条函数方法，应用数学与计算数学，1981年第5期,17—25.

LQ Optimal Control Problems with Linear Equality (or Convex) Constraints in Abstract Hilbert Spaces

Chen Guanrong

Abstract

Our purpose in present paper is to research the optimal solutions that arise in linear control processes with both the state variable x and the control variable u being obliged to linear equality (or convex) constraints and with a quadratic cost criteria in a class of abstract Hilbert spaces. In both cases, the theorems on existence, uniqueness and characteristic of the optimal solutions (x^*, u^*) are given and the optimal solutions are proved to be spline functions in Hilbert spaces.