一类非线性Schrödinger方程组初边值问题的有限差分法

吴 相 辉

(计算机科学系)

1.引言 我们考虑如下一类非线性Schrödinger 方程组的初边值问题：

$$iu_{1t}-u_{1xx}+\beta q(|u_1|^2+|u_2|^2)u_1+f_1(x)u_1=0 \tag{1}$$

$$iu_{2t}-u_{2xx}+\beta q(|u_1|^2+|u_2|^2)u_2+f_2(x)u_2=0 \tag{2}$$

$$u_j|_{t=0}=\overset{0}{u}_j(x) \qquad j=1,2; \qquad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{3}$$

$$u_j|_{x=0}=u_j|_{x=1}=0 \quad j=1,2; \qquad t\geqslant 0, \tag{4}$$

或者代替(4)为第二边值条件

$$u_{jx}|_{x=0}=u_{jx}|_{x=1}=0 \quad j=1,2; \qquad t\geqslant 0 \tag{4'}$$

其中$i=\sqrt{-1}$,$\beta>0$,$q(s)$为〔0,∞)上的连续实函数，$u_j(x,t)$为待求的复值函数。

文献〔1〕用有限差分法考虑了单个方程的情况。本文将证明相应于定解问题(1)—(4)(或(4′))的四点隐式和六点隐式格式的差分方程解的收敛性和稳定性。

2.记号 设$\overline{Q}=[0,1]\times[0,T]$为矩形区域，$Q$为其内部区域。$S_0(0\leqslant x\leqslant 1,\ t=0)$、$S_1(x=0,0\leqslant t\leqslant T)$、$S_2(x=1,0\leqslant t\leqslant T)$为其边界。以直线$x=nh,t=mk$ ($n=0,1,\cdots,N$; $m=0,1,\cdots,M$)分$\overline{Q}$为小网格，这里$h=1/N,k=T/M$。S_h^l ($l=0,1,2$)表示S_l上的格点集合。Q_h为Q上的格点集合，$\Omega(m)$表示$t=mk,0\leqslant x\leqslant 1$上的格点集合。记

$$\phi_x(x,t)=[\phi(x+h,t)-\phi(x,t)]/h=D_+\phi,$$
$$\phi_{\bar{x}}(x,t)=[\phi(x,t)-\phi(x-h,t)]/h,$$

同样还可以定义ϕ和$\phi_{\bar{t}}$。我们定义如下的离散模：

$$\|\phi\|^2_{\Omega(m)}=h\sum_{\Omega(m)}\phi^2(x,t),\quad \|\phi\|^2_{Qh}=kh\sum_{Qh}\phi^2(x,t),$$

$$\|\phi\|_{L\infty(\Omega)}=\sup_{x_i\in\Omega}|\phi(x_i)|,\ \|D^l_+\phi\|_{L\infty(\Omega)}=\sup_{x_i\in\Omega}|D^l_+\phi|,$$

$$\|\phi\|^2_{l,\Omega(m)}=\|\phi\|^2_{\Omega(m)}+\sum_{|s|<l}\|D^s_+\phi\|^2_{\Omega(m)}.$$

3．差分格式及其解的先验估计 考虑如下的四点隐式差分方程组的定解问题：

$$i\phi_{1\bar{t}} - \phi_{1x\bar{x}} + \beta q(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2)\phi_1 + f_1(x)\phi_1 = 0 \tag{5}$$

$$i\phi_{2\bar{t}} - \phi_{2x\bar{x}} + \beta q(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2)\phi_2 + f_2(x)\phi_2 = 0 \tag{6}$$

$$\phi j|_{S_h^0} = u_j^0(x) \quad j = 1,2 \tag{7}$$

$$\phi j|_{S_h^1} = \phi j|_{S_h^2} = 0 \quad j = 1,2 \tag{8}$$

或者 $$\phi j(h) - \phi j(o) = 0, \quad \phi j(1) - \phi j((N-1)h) = 0 \tag{8'}$$

对于(5)－(8)或者(5)－(8′)的解ϕ，我们有如下的估计：

引理1 设$u_j^0(x)\epsilon L_2(j = 1,2)$，则有

$$\|\phi_1\|^2_{Q(m)} + \|\phi_2\|^2_{Q(m)} \leqslant C_1 \tag{9}$$

这里C_1是不依赖于h的常数。

证明 类似〔1〕中引理7的证明，便得

$$\|\phi j\|^2_{Q(m)} \leqslant 2\|u_j^0\|^2_{L2}, \quad j = 1,2 \quad \text{取} C_1 = 2(\|u_1^0\|^2_{L2} + \|u_2^0\|^2_{L2}) \text{便得(9)。}$$

引理2 设(i)$u_j^0(x)\epsilon H^1$，(ii) $o \leqslant fj \leqslant F, j = 1,2$，(iii)$q(s) \geqslant 0, q'(s) \geqslant 0$且

$Q(|u_1^0|^2 + |u_2^0|^2)\epsilon L_1$，这里$Q(s) = \int_0^s q(Z)dZ$，则存在不依赖于$h$的常数$C_2$，使

$$\|\phi_{1x}\|^2 + \|\phi_{2x}\|^2 \leqslant C_2 . \tag{10}$$

证明 将(5)、(6)分别乘以$\overline{\phi}_{1\bar{t}}$和$\overline{\phi}_{2\bar{t}}$，则有

$$i|\phi_{j\bar{t}}|^2 - \overline{\phi}_{j\bar{t}}\,\phi_{jx\bar{x}} + \beta q(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2)\phi j\overline{\phi}_{j\bar{t}} + fj(x)\phi j\overline{\phi}_{j\bar{t}} = 0, j = 1,2 \tag{11}$$

$$\overline{\phi}_{j\bar{t}}\,\phi_{jx\bar{x}} = [\overline{\phi}_{j\bar{t}}(x+h)\phi jx]_{\bar{x}} - \phi jx\overline{\phi}_{jx\bar{t}} \qquad j = 1,2$$

由边界条件(8)或(8′)，有$\sum_{Qh}[\phi_{j\bar{t}}(x+h)\phi jx]_{\bar{x}} = 0$，故

$$Re(\phi jx\phi_{jx\bar{t}}) = \frac{1}{2}|\phi jx|^2_{\bar{t}} + \frac{k}{2}|\phi_{jx\bar{t}}|^2$$

又 $$Re(\phi j\overline{\phi}_{j\bar{t}}) = \frac{1}{2}|\phi j|^2_{\bar{t}} + \frac{k}{2}|\phi_{j\bar{t}}|^2$$

因此，将(11)对Q_h求和并取实部，然后将$j = 1,2$的两个式子相加便得

$$\frac{1}{2}\sum_{Qh}(|\phi_{1x}|^2_{\bar{t}} + |\phi_{2x}|^2_{\bar{t}}) + \sum_{Qh}\frac{\beta}{2}q(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2)(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2)_{\bar{t}}$$

$$+ \sum_{Qh}\frac{1}{2}(f_1(x)|\phi_1|^2_{\bar{t}} + f_2(x)|\phi_2|^2_{\bar{t}}) \leqslant 0 .$$

注意，由条件(iii)及Taylor展式可以得到

$$Q(|\phi_1|^2+|\phi_2|^2)_{\bar{t}}\leqslant q(|\phi_1|^2+\phi_2|^2)(|\phi_1|^2+|\phi_2|^2)_{\bar{t}}$$

由此得

$$\frac{h}{2}\sum_{\Omega(m)}(|\phi_{1x}|^2+|\phi_{2x}|^2)+\frac{\beta h}{2}\sum_{\Omega(m)}Q(|\phi_1|^2+|\phi_2|^2)$$

$$+\frac{h}{2}\sum_{\Omega(m)}(f_1(x)|\phi_1|^2+f_2(x)|\phi_2|^2)$$

$$\leqslant\frac{h}{2}\sum_{\Omega(0)}(|\phi_{1x}|^2+|\phi_{2x}|^2)+\frac{\beta h}{2}\sum_{\Omega(0)}Q(|\phi_1|^2+|\phi_2|^2)$$

$$+\frac{h}{2}\sum_{\Omega(0)}(f_1(x)|\phi_1|^2+f_2(x)|\phi_2|^2)$$

当$h\leqslant h_0$时，有

$$h\sum_{\Omega(0)}(|\phi_1|^2+|\phi_{2x}|^2)\leqslant 2\int_0^1(|u_{1x}(x)|^2+|u_{2x}(x)|^2)dx$$

$$h\sum_{\Omega(0)}Q(|\phi_1|^2+|\phi_2|^2)\leqslant 2\int_0^1 Q(|u_1{}^0|^2+|u_2{}^0|^2)dx$$

$$h\sum_{\Omega(0)}(f_1(x)|\phi_1|^2+f_2(x)|\phi_2|^2)\leqslant 2F\cdot(\|u_1^0\|_{L2}^2+\|u_2^0\|_{L2}^2)$$

因而便得(10)。

引理3 (差分算子Sobolev 不等式)给定$\varepsilon>0$，存在依赖于ε和n的常数C，使得

$$\begin{cases}\|D_+^l\phi\|_{L\infty(\Omega)}\leqslant\varepsilon\|\phi\|_{n,\Omega}+C\|\phi\|_\Omega & l<n\\ \|\phi\|_{l,n}\leqslant\varepsilon\|\phi\|_{n,\Omega}+C\|\phi\|_\Omega & l\leqslant n.\end{cases}$$

由引理2和引理3，即可得到

引理4 在引理2的条件下，定解问题(5)—(8)(或(5)—(8′))的解ϕ_1、ϕ_2有估计

$$\sup(\|\phi_1\|_{L\infty,\Omega(m)}+\|\phi_2\|_{L\infty,\Omega(m)})\leqslant C_3$$

其中C_3是不依赖于h的常数。

4. 差分格式的收敛性和稳定性

引理5 (离散的Gronwall 不等式)若对函数$u(t)$、$v(t)$ $0\leqslant v(t)\leqslant V$，存在正常数$C'$，有

$$u(t)\leqslant C'+\sum_{m=0}^{M}u(t_m)v(t_m)k\qquad(0\leqslant t\leqslant T)$$

则有 $u(t)\leqslant c'e^{VT}=C\qquad(0\leqslant t\leqslant T)$.

设$u_1(x,t)$、$u_2(x,t)$为定解问题(1)—(4)(或(4′))的光滑有界解，则有

定理1 在引理2的条件下，差分方程(5)—(8)的解$\phi j(x,t)$ $j=1,2$，成立

$$\|u_1-\phi_1\|_{\Omega(m)}+\|u_2-\phi_2\|_{\Omega(m)}=O(k+h^2)\tag{12}$$

而对差分方程(5)—(8′)的解$\phi_j(x,t)$，则成立

$$\|u_1-\phi_1\|_{\Omega(m)}+\|u_2-\phi_2\|_{\Omega(m)}=O(k+h)\;. \tag{12′}$$

证明　设$\varepsilon_j=u_j-\phi_j, j=1,2$，由通常的Taylor展开得

$$i\varepsilon_{j\bar t}-\varepsilon_{jx\bar x}+\beta[q(|u_1|^2+|u_2|^2)u_j-q(|\phi_1|^2+|\phi_2|^2)\phi_j]+f_j\varepsilon_j=O(k+h^2) \tag{13}$$

$$\varepsilon_j|_{s_h^0}=0 \tag{14}$$

$$\varepsilon_j|_{s_h^1}=\varepsilon_j|_{s_h^2}=0 \qquad j=1,2 \tag{15}$$

因为

$$\beta[q(|u_1|^2+|u_2|^2)u_j-q(|\phi_1|^2+|\phi_2|^2)\phi_j]$$
$$=\beta q(|u_1|^2+|u_2|^2)\varepsilon_j+\beta\phi_j q'(\theta)[(|u_1|+|\phi_1|)\varepsilon_1+(|u_2|+|\phi_2|)\varepsilon_2]$$

这里θ为$(|u_1|^2+|u_2|^2)$和$(|\phi_1|^2+|\phi_2|^2)$之间的值。又由(15)

$$-\sum_{Qh}\bar\varepsilon_j\varepsilon_{jx\bar x}=\sum_{Qh}|\varepsilon_{jx}|^2 \tag{16}$$

因此，(13)乘以$\bar\varepsilon_j kh$，在Q_h上求和并取虚部，然后将$j=1,2$的两个式子相加，便得

$$\|\varepsilon_1\|^2_{\Omega(M)}+\|\varepsilon_2\|^2_{\Omega(M)}\leqslant\|\varepsilon_2\|^2_{\Omega(0)}+\|\varepsilon_2\|^2_{\Omega(0)}+2\|O(k+a^2)\|^2_{Qh}$$
$$+C_4k\sum_{m=1}^{M}(\|\varepsilon_1\|^2_{\Omega(m)}+\|\varepsilon\|^2_{\Omega(m)}) \tag{17}$$

这里$C_4=1+2\beta\sup\limits_{1<m<M}[\|q'(\theta)\|_{L\infty,\Omega(m)}\cdot(\|\phi_1\|_{L\infty,\Omega(m)}+\|\phi_2\|_{L\infty,\Omega(m)})\;(\|u_1\|_{L\infty,\Omega(m)})$

$+\|u_2\|_{L\infty,\Omega(m)}+\|\phi_1\|_{L\infty,\Omega(m)}+\|\phi_2\|_{L\infty,\Omega(m)})]$，由初始条件(14)知

$\|\varepsilon_1\|^2_{\Omega(0)}=\|\varepsilon_2\|^2_{\Omega(0)}=0$，因此，由引理5便得

$$\|\varepsilon_1\|^2_{\Omega(m)}+\|\varepsilon_2\|^2_{\Omega(m)}\leqslant2\|O(k+k^2)\|^2_{Qh}e^{C_4T}$$

即证得(12)。而对于(5)—(8′)的解ϕ_j，$j=1,2$这时由于ε_j的边界条件(15)为

$$\varepsilon_j(h)-\varepsilon_j(o)=\varepsilon_j(1)-\varepsilon_j((N-1)h)=O(h) \tag{15′}$$

所以(16)就成为

$$-\sum_{Qh}\bar\varepsilon_j\varepsilon_{jx\bar x}=\sum_{Qh}|\varepsilon_{jx}|^2+O(h) \tag{16′}$$

因此，与前面一样便可证得(12′)。

定理2　差分定解问题(5)—(8)(或(8′))的解ϕ_1和ϕ_2关于初值按模$\|\cdot\|_{\Omega(m)}$是稳定的。

证明　设ϕ_1、ϕ_2为差分方程(5)—(8)(或(8′))的满足初值$\phi_j|_{sh}=v_j^0(x)(j=1,2)$的解。记$\varepsilon_j=\phi_j-\varphi_j(j=1,2)$。与定理1完全一样的证明，可以得到类似(17)的估计式，但这时由于(13)、(15)(或(15′))右端为0，而

$$\|e_j\|^2_{\Omega(0)}=\|u_j^0-v_j^0\|^2_{\Omega(0)}\qquad j=1,2$$

因此，由引理5便得

$$\|\phi_1-\phi_1\|^2_{\Omega(M)}+\|\phi_2-\phi_2\|^2_{\Omega(M)}\leqslant(\|u_1^0-v_1^0\|_{\Omega(0)}+\|u_2^0-v_2^0\|^2_{\Omega(0)})e^{c_4T}$$

即差分方程(5)—(8)(或(8′))按$\|\cdot\|_{\Omega(m)}$关于初值是稳定的。

对于六点对称格式(Crank—Nicolson格式)

$$i\phi_{j\bar{t}}-\frac{1}{2}[\phi_{jx\bar{x}}(t,x)+\phi_{jx\bar{x}}(t-k,x)]+\frac{\beta}{2}[q(|\phi_1(t,x)|^2+|\phi_2(t,x)|^2)$$

$$+q(|\phi_1(t-k,x)|^2+|\phi_2(t-k,x)|^2)]+\frac{1}{2}f_j(x)[\phi_j(t,x)-\phi_j(t-k,x)]=0$$

$$j=1,2$$

$$\phi_j|_{s_h^0}=u_j^0(x)$$

$$\phi_j|_{s_h^1}=\phi_j|_{s_h^2}=0\quad(\text{或}\phi_j(h)-\phi_j(0)=\phi_j(1)-\phi_j((N-1)h)=0)$$

同样可以有

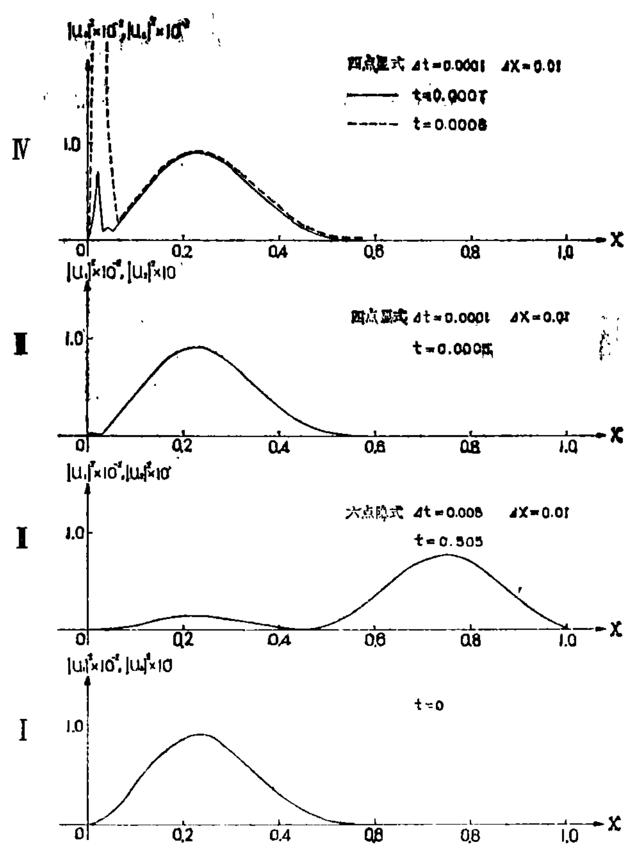
定理3　设$u(t,x)$、$\phi(t,x)$分别为定解问题(1)—(4)(或(4′))和(5)-(8)(或(8′))的解，则有

$$\|u_1-\phi_1\|_{\Omega(m)}+\|u_2-\phi_2\|_{\Omega(m)}=0(k^2+h^2)\quad(\text{或}0(k^2+h))$$

定理4　差分方程(5)-(8)(或(8′))按模$\|\cdot\|_{\Omega(m)}$关于初值是稳定的。

定理3、4的证明类似于定理1、2，故从略。

5．数值例子　本文曾对$\beta=2$，$f_j\equiv0$　$(j=1,2)$的简单方程组的情形进行过数值试验，初始函数取$u_j^0=(a_j+ib_j)x\cdot\exp(-1/(1-x)^2)(0<x<1)$这里$a_j,b_j$为任意实数。对$|u_1|^2\times10^{-2}$、$|u_2|^2\times10$作图(见附图)。对初始函数为附图Ⅰ的情形，利用六点隐式格式和矩阵追赶迭代，可以顺利地计算到该波到达右边界($x=1$)的情形(见附图Ⅱ)。对于精度为10^{-5}的情况下，一般迭代2次即可收敛。我们也



附　图

曾考虑过用块超松驰迭代法解代数方程组，但当松驰因子$\omega>1$时，迭代不收敛，$\omega=1$时，一般迭代12次，而当$\omega=0,5$时，则需24次。

注意，对于显式格式则是不稳定的。我们仍然对初始为附图Ⅰ的情形，利用四点显式格式进行计算，仍取时间步长$k=0.0001$，空间步长$h=0.01$，只计算了5排，左边便出现了不稳定现象(见附图Ⅲ)。此情况迅速增长，附图Ⅳ是$t=0.0007$和$t=0.0008$的情形，接着便产生溢出停机。

参考文献

〔1〕郭柏灵，一类非线性 Schrödinger方程及其方程组的数值计算问题，计算数学，(1981), 3.

〔2〕Guo Bo-ling, The Global solution and Its Asymptotic Aehavior in Time for Some Systems of Nonlinear Schrödinger Equatons, Preprint of Beijing Symposion on Diff. Geometry and P.D.E., (1980).

Finite Difference Method for Initial—Boundary Problem on a Class of Nonlinear Schrödinger Eqations

Wu Xianghui

Abstract

In this paper, the initial-boundary problem (1)—(4) 〔(or(4'))〕 of a class nonlinear Schrödinger equation system is considered by using finite difference method. It is proved that the four point implicit scheme and the six point implicit scheme for problem (1)—(4) 〔(or(4'))〕 are convegent and stable. Finally, a numerical example is given.