多维拟左連续局部鞅的可选表示性

周 健 伟

（数学力学系）

本文定义了k维可选过程对k维拟左连续局部鞅的随机积分，然后建立了k维拟左连续局部鞅的可选表示性基本定理，这推广了一维情形下严加安、Yoeurp〔1〕中的相应结果。

设$(\Omega,\mathbf{F},\mathbf{P})$为完备概率空间，$(\mathbf{F}_t)_{t\geq 0}$为$\mathbf{F}$的子$\sigma$域族，满足通常条件。本文采用如下记号：$\mathbf{M}_0^b$—零初值有界鞅空间，$\mathbf{L}_0$—零初值局部鞅空间，$\mathbf{H}^1$—$\mathbf{H}^1$鞅空间，$\mathbf{H}_0^1$—零初值$\mathbf{H}^1$鞅空间。本文中随机过程符号右上角的数字都是附标，若要表示幂次，则加括号后再写上幂次。

若$M^1,M^2,\cdots,M^k$为拟左连续局部鞅，则称$M=(M^1,M^2,\cdots,M^k)$为k维拟左连续局部鞅。下一引理中的随机积分$f^i.M^i$是严加安〔2〕中已定义的。

引理1 设$M=(M^1,M^2,\cdots,M^k)$为k维拟左连续局部鞅，且$[M^i,M^j]=0$，凡$i\neq j$。则下列断言等价：

1）任一$N\epsilon\mathbf{L}_0$可表为$N=\sum_{i=1}^{k}f^i.M^i$，其中f^i为可选过程，$i=1,2,\cdots,k$；

2）任一$N\epsilon\mathbf{M}_0^b$可表为$N=\sum_{i=1}^{k}f^i.M^i$，其中f^i为可选过程，$i=1,2,\cdots,k$；

3）设$L\epsilon\mathbf{L}_0$，且$[L,M^i]=0$，$i=1,2,\cdots,k$。则$L=0$；

4）设$L\epsilon\mathbf{M}_0^b$，且$[L,M^i]=0$，$i=1,2,\cdots,k$。则$L=0$。

证 2)⇒1)：设$N\epsilon\mathbf{L}_0$，由〔3〕定理9.27，N可分解为$N=f^1.M^1+L^1$，其中f^1为可选过程，$L^1\epsilon\mathbf{L}_0$且$[L^1,M^1]=0$。但L^1又可分解为$L^1=f^2.M^2+L^2$，其中f^2为可选过程，$L^2\epsilon\mathbf{L}_0$且$[L^2,M^2]=0$，由计算易知$[L^2,M^1]=0$。如此继续，N可分解为

$$N=\sum_{i=1}^{k}f^i.M^i+L^k \tag{1}$$

其中f^i为可选过程$(i=1,2,\cdots,k)$，$L^k\epsilon\mathbf{L}_0$且$[L^k,M^i]=0(i=1,2,\cdots,k)$。

往证$L^k=0$。不妨设$L^k\epsilon\mathbf{H}_0^1$，由于$\mathbf{M}_0^b$在$\mathbf{H}_0^1$中稠密(参见〔3〕定理11.5)，故存在一列$N^n\epsilon\mathbf{M}_0^b$，使$\lim\limits_{n\to\infty}\|N^n-L^k\|_{H^1}=0$。但由2)有

$$N^n=\sum_{i=1}^{k}f^{in}\cdot M^i \tag{2}$$

其中f^{in}为可选过程（$i=1,2,\cdots,k$; $n=1,2,\cdots$）。故

$$[N^n,L^k]=\sum_{i=1}^{k}f^{in}\cdot[M^i,L^k]=0 \qquad (n=1,2,\cdots).$$

从而$\mathbf{E}\sqrt{[L^k,L^k]_\infty}\leqslant\mathbf{E}\sqrt{[N^n,N^n]_\infty+[L^k,L^k]_\infty}=\|N^n-L^k\|_{H^1}$，因此$\mathbf{E}\sqrt{[L^k,L^k]_\infty}=0$，即$L^k=0$。故由（1）式得$N=\sum_{i=1}^{k}f^i\cdot M^i$

1)⇒3)：设$L\in\mathbf{L}_0$，且$[L,M^i]=0$，$i=1,2,\cdots,k$。由1），$L=\sum_{i=1}^{k}f^i\cdot M^i$，其中$f^i$为可选过程（$i=1,2,\cdots,k$）。那么$[L,L]=\sum_{i=1}^{k}f^i\cdot[L,M^i]=0$，故$L=0$。

3)⇒4)：显然。

4)⇒2)：设 $N\in\mathbf{M}_0^b$，重复使用[3]定理9.27得$N=\sum_{i=1}^{k}f^i\cdot M^i+L^k$。其中$f^i$为可选过程（$i=1,2,\cdots,k$）。$L^k$为零初值局部有界鞅，且$[L^k,M^i]=0$，$i=1,2,\cdots,k$。由4）易证$L^k=0$。从而$N=\sum_{i=1}^{k}f^i\cdot M^i$。引理证毕。

设$M=(M^1,M^2,\cdots,M^k)$为k维拟左连续局部鞅，$f=(f^1,f^2,\cdots,f^k)$为k维可选过程（指每个分量为可选过程）。下面要定义f对M的随机积分$f\cdot M'$（M'表示M的转置）。这是Jacod[4]中定义的随机积分（f为k维可料过程，M为k维局部鞅）的类似物。

令

$$L^0(M)=\{f: f\text{可选},\ \mathbf{E}\sqrt{(f^i)^2\cdot[M^i,M^i]_\infty}<\infty,\ i=1,2,\cdots,k\} \tag{3}$$

这里$(f^i)^2\cdot[M^i,M^i]_\infty$表示$((f^i)^2\cdot[M^i,M^i])_\infty$（以后出现的类似记号也有类似的含义）。对$f\in L^0(M)$，由[2]定理3，可定义随机积分$f^i\cdot M^i\in\mathbf{H}_0^1(i=1,2,\cdots,k)$，从而可定义$f\cdot M'$为和式$\sum_{i=1}^{k}f^i\cdot M^i\in\mathbf{H}_0^1$，且对任何局部鞅$N$，有

$$[f\cdot M',N]=\sum_{i=1}^{k}f^i\cdot[M^i,N] \tag{4}$$

特别有

$$[f\cdot M',f\cdot M']=\sum_{i,j=1}^{k}f^if^j\cdot[M^i,M^j] \tag{5}$$

现设法扩张$f\cdot M'$的定义范围。由Kunita—Watanabe不等式易知，存在零初值局部可积适应增过程A，使对几乎所有ω，$\mathbf{R}_+=[0,\infty)$上的σ有限测度$|d[M^i,M^j]_\cdot(\omega)|$关于$\sigma$有限测度$dA_\cdot(\omega)$绝对连续（例如可取$A=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}[M^i,M^i]}$）。由[3]定理6.18，存在

可选过程G^{ij}，使对几乎所有ω，对一切$t\in\mathbf{R}_+$有

$$[M^i,M^j]_t(\omega)=\int_{[0,t]}G_s^{ij}(\omega)dA_s(\omega) \tag{6}$$

$G=(G^{ij})_{i,j=\overline{1,k}}$为非负定对称矩阵。令

$$\|f\|_{L(M)}=\mathbf{E}\sqrt{\left(\sum_{i,j=1}^{k}f^if^jG^{ij}\right).A_\infty} \tag{7}$$

它是拟范数（其定义可参见[5]2.4）.再令

$$L(M)=\{f:f\text{可选},\ \|f\|_{L(M)}<\infty\} \tag{8}$$

利用Kunita—Watanabe不等式，$\sqrt{\sum|a_i|}\leqslant\sum\sqrt{|a_i|}$和$\sqrt{|ab|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{2}$，不难证明$L^0(M)\subset L(M)$。

引理2　在拟范数$\|\cdot\|_{L(M)}$下，$L^0(M)$在$L(M)$中稠密。

证　设$f\in L(M)$。对每个$i(1\leqslant i\leqslant k)$，存在停时列$T_n^i\uparrow\infty\quad a.s.$，

使$\mathbf{E}\sqrt{[M^i,M^i]_{T_n^i}}<\infty$。令

$$B(n)=\bigcap_{i=1}^{k}([\![0,T_n^i]\!]\cap\{|f^i|\leqslant n\}) \tag{9}$$

和$f_n=fI_{B(n)}$，这里I是示性函数符号。则f_n为k维可选过程，且

$$\mathbf{E}\sqrt{(f_n^i)^2.[M^i,M^i]_\infty}=\mathbf{E}\sqrt{(f^i)^2I_{B(n)}.[M^i,M^i]_\infty}\leqslant n\,\mathbf{E}\sqrt{[M^i,M^i]_{T_n^i}}<\infty$$

故$f_n\in L^0(M)$。由$f\in L(M)$和控制收敛定理易知当$n\to\infty$时，

$\|f-f_n\|_{L(M)}=\mathbf{E}\sqrt{\left(\sum_{i,j=1}^{k}f^if^jG^{ij}I_{B(n)^c}\right).A_\infty}\to0$，其中$B(n)^c$表示$B(n)$的余集。证毕。

对$f\in L^0(M)$，由(5)和(6)式可知

$$[f.M',f.M']=\left(\sum_{i,j=1}^{k}f^if^jG^{ij}\right).A \tag{10}$$

$$\mathbf{E}\sqrt{[f.M',f.M']_\infty}=\mathbf{E}\sqrt{\left(\sum_{i,j=1}^{k}f^if^jG^{ij}\right).A_\infty} \tag{11}$$

故映射$f\mapsto f.M'$是$L^0(M)$到$\mathbf{H}_0^1$中保持拟范数不变的线性映射.由引理2易证此映射可唯一地扩张为$L(M)$到$\mathbf{H}_0^1$中的保持拟范数不变的线性映射，将f的象仍记为$f.M'$（注意单独的$f^i.M^i$未必有定义）。这时(11)式对$f\in L(M)$仍然成立。

对$f\in L^0(M)$和任意停时T，由[2]定理3有

$$fI_{[\![0,T]\!]}.M'=(f.M')^T \tag{12}$$

还可证明(12)式对$f\in L(M)$仍然成立。事实上，取$B(n)$如(9)式中那样，则$fI_{B(n)}\in L^0(M)$，

对它用(12)得$fI_{B(n)}I_{[0,T]}.M'=(fI_{B(n)}.M')^T$。令$n\to\infty$，取$H^1$模下的极限即得(12)。

令

$$L_{loc}(M)=\{f:f\text{可选，存在停时列}T_n\uparrow\infty,\ a.s.\text{使对一切}n,\ fI_{[0,T_n]}\in L(M)\} \tag{13}$$

现设法将$f.M'$扩张定义于$L_{loc}(M)$上。对$f\in L_{loc}(M)$，存在停时列$T_n\uparrow\infty$ $a.s.$，使对一切n，$fI_{[0,T_n]}\in L(M)$，于是可定义$fI_{[0,T_n]}.M'$。由(12)得$(fI_{[0,T_{n+1}]}.M')^{T_n}$ $=fI_{[0,T_{n+1}]}I_{[0,T_n]}.M'=fI_{[0,T_n]}.M'$.故存在$L\in\mathbf{L}_0$,使对一切$n$有$L^{T_n}=fI_{[0,T_n]}.M'$

我们就定义$f.M'$为L。于是

$$(f.M')_{T_n}=fI_{[0,T_n]}.M' \tag{14}$$

易知这样的定义不依赖于停时列(T_n)的选择。

定义 设M为k维拟左连续局部鞅。若任一零初值（$\mathbf{F}_t$）局部鞅N可表为随机积分$f.M'$,其中$f\in L_{loc}(M)$，则称M有可选表示性。

对k维拟左连续局部鞅M，归纳地定义$\overline{M^1},\overline{M^2},\cdots,\overline{M^k}$如下：令$\overline{M^1}=M^1$，对每个$i(2\leqslant i\leqslant k)$可象引理1证明中那样，将$M^i$分解为$M^i=\sum_{j=1}^{i-1}f^{ij}.\overline{M^j}+\overline{M^i}$，其中$f^{ij}$为可选过程，$\overline{M^i}\in\mathbf{L}_0$，且$[\overline{M^i},\overline{M^j}]=0$ $(j=1,2,\cdots,i-1)$。这样得到的$\overline{M^1},\overline{M^2},\cdots,\overline{M^k}$当然满足条件$[\overline{M^i},\overline{M^j}]=0$，凡$i\neq j$。由于对一维拟左连续局部鞅的随机积分仍为拟左连续，故$\overline{M}=(\overline{M^1},\overline{M^2},\cdots,\overline{M^k})$仍为$k$维拟左连续局部鞅。

下述定理推广了[1]的定理3（或参见[3]定理15.1）。

定理 设$M=(M^1,M^2,\cdots,M^k)$为k维拟左连续局部鞅，则下列断言等价：

1）M有可选表示性；

2）任一$N\in\mathbf{M}_0^b$可表为$N=f.M'$，其中$f\in L_{loc}(M)$；

3）设$L\in\mathbf{L}_0$，且$[L,M^i]=0$，$i=1,2,\cdots,k$，则$L=0$；

4）设$L\in\mathbf{M}_0^b$，且$[L,M^i]=0$，$i=1,2,\cdots,k$，则$L=0$。

证 引进$\overline{M}$，将引理1四个断言中的M换为$\overline{M}$，f^i换为$\overline{f^i}(i=1,2,\cdots,k)$，分别记为断言$\overline{1}$),$\overline{2}$),$\overline{3}$)和$\overline{4}$)。由引理1知$\overline{1}$),$\overline{2}$),$\overline{3}$),$\overline{4}$)等价。

$\overline{3}$)$\Rightarrow$3)：设$L\in\mathbf{L}_0$，$[L,M^i]=0$，$i=1,2,\cdots,k$。由计算可知$[L,\overline{M^i}]=0$，$i=1,2,\cdots,k$。由$\overline{3}$)，$L=0$。

3)$\Rightarrow$4)：显然。

4)$\Rightarrow$$\overline{4}$)：设$L\in\mathbf{M}_0^b$，且$[L,\overline{M^i}]=0$，$i=1,2,\cdots,k$。由计算可知$[L,M^i]=0$，$i=1,2,\cdots,k$。由4)，$L=0$。

1)$\Rightarrow$2)：显然。

2)$\Rightarrow$4)：设$L\in\mathbf{M}_0^b$,且$[L,M^i]=0$，$i=1,2,\cdots,k$.由2),$L=f.M'$,其中$f\in L_{loc}(M)$，

故存在停时列$T_n\uparrow\infty$ $a.s.$，使对一切n，$fI_{[0,T_n]}\in L(M)$。由(14)，$L^{T_n}=fI_{[0,T_n]}\cdot M'$。故由(11)，$\mathbf{E}\sqrt{[L,L]_{T_n}}=\mathbf{E}\sqrt{(\sum_{i,j=1}^k f^if^jI_{[0,T_n]}G^{ij})\cdot A_\infty}$。令$n\to\infty$，由单调收敛定理得

$\mathbf{E}\sqrt{[L,L]_\infty}=\mathbf{E}\sqrt{(\sum_{i,j=1}^k f^if^jG^{ij})\cdot A_\infty}$。由$L\in\mathbf{M}_0^b$得$f\in L(M)$。

取$B(n)$如(9)式中那样，则$fI_{B(n)}\in L^0(M)$。令$L^n=fI_{B(n)}\cdot M'$，则由(4)式和假设得

$$[L^n,L]=\sum_{i=1}^k f^iI_{B(n)}\cdot[M^i,L]=0.$$

由上式和(11)得

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\sqrt{[L,L]_\infty}&\leqslant\mathbf{E}\sqrt{[L,L]_\infty+[L^n,L^n]_\infty}=\mathbf{E}\sqrt{[L-L^n,L-L^n]_\infty}\\&=\mathbf{E}\sqrt{(\sum_{i,j=1}^k f^if^jI_{B(n)^c}G^{ij})\cdot A_\infty}\end{aligned}$$

由$f\in L(M)$和控制收敛定理知$n\to\infty$时上式右边趋于零，故$L=0$。

$\overline{1})\Rightarrow1)$：先设$N\in\mathbf{H}_0^1$，由$\overline{1})$可表为$N=\overline{f}\cdot\overline{M}'=\sum_{i=1}^k\overline{f}^i\cdot\overline{M}^i$，其中$\overline{f}$可选。因为

$\mathbf{E}\sqrt{\sum_{i=1}^k(\overline{f}^i)^2\cdot[\overline{M}^i,\overline{M}^i]_\infty}=\mathbf{E}\sqrt{[N,N]_\infty}<\infty$，故$\overline{f}\in L^0(\overline{M})$（$L^0(\overline{M})$的定义类似于(3)式）。

令
$$F^{ij}=\begin{cases}0, & 当i<j\\ 1, & 当i=j\\ f^{ij}, & 当i>j\end{cases}\qquad(i,j=1,2,\cdots,k)$$

$$F=(F^{ij})_{i,j=\overline{1,k}}.$$

则由$\overline{M}^i$的构造法得$M^i=\sum_{n=1}^k F^{in}\cdot\overline{M}^n$，$i=1,2,\cdots,k$。因此

$$[M^i,M^j]=[\sum_{n=1}^k F^{in}\cdot\overline{M}^n,\sum_{m=1}^k F^{jm}\cdot\overline{M}^m]=\sum_{n=1}^k F^{in}F^{jn}\cdot[\overline{M}^n,\overline{M}^n],\quad i,j=1,2,\cdots,k.$$

故若类似于(6)式那样定义$\overline{G}^{ij}$和$\overline{G}=(\overline{G}^{ij})_{i,j=\overline{1,k}}$，则可取$G^{ij}=\sum_{n=1}^k F^{in}F^{jn}\overline{G}^{nn}$，$i,j=1,2,\cdots,k$。即

$$G=F\overline{G}F' \tag{15}$$

又
$$\begin{aligned}[M^i,\overline{M}^j]&=[\sum_{n=1}^k F^{in}\cdot\overline{M}^n,\overline{M}^j]=\sum_{n=1}^k F^{in}\cdot[\overline{M}^n,\overline{M}^j]\\&=(\sum_{n=1}^k F^{in}\overline{G}^{nj})\cdot A=(F\overline{G})^{ij}\cdot A\end{aligned}\tag{16}$$

由于$|F|=1$，F的逆矩阵存在，记为H。利用(15)，

$$\|\bar{f}H\|_{L(M)}=\mathbf{E}\sqrt{(\bar{f}HGH'\bar{f}').A_\infty}=\mathbf{E}\sqrt{(\bar{f}HF\bar{G}F'H'\bar{f}').A_\infty}$$

$$=\mathbf{E}\sqrt{(\bar{f}\bar{G}\bar{f}').A_\infty}=\|\bar{f}\|_{L(\bar{M})}<\infty$$

其中$\|\cdot\|_{L(\bar{M})}$的定义类似于(7)式。故$\bar{f}H\epsilon L(M)$，$\bar{f}H.M'$存在且属于$\mathbf{H}_0^1$。

令$L=\bar{f}H.M'-\bar{f}.\bar{M}'$。往证$L=0$。对每个$i(1\leqslant i\leqslant k)$，存在停时列$T_n^i\uparrow\infty$ $a.s$，使$\mathbf{E}\sqrt{[M^i,M^i]_{T_n^i}}<\infty$。令

$$C(n)=\{\bigcap_{i=1}^{k}([\![0,T_n^i]\!]\cap[|\bar{f}^i|\leqslant n])\}\cap\{\bigcap_{i,j=1}^{k}[|f^{ij}|\leqslant n]\}$$

和 $$L^n=\bar{f}HI_{C(n)}.M'-\bar{f}I_{C(n)}.\bar{M}'$$

注意到$|F|=1$，H等于F的伴随矩阵及F的定义，易知一切$|f^{ij}|\leqslant n$蕴含$|H^{ij}|\leqslant(k-1)^2n^{k-1}<k^2n^{k-1}$。于是

$$\mathbf{E}\sqrt{(\sum_{i=1}^{k}\bar{f}^iH^{ij})^2I_{C(n)}.[M^j,M^j]_\infty}\leqslant k^3n^k\mathbf{E}\sqrt{[M^j,M^j]_{T_n^j}}<\infty$$

故 $\bar{f}HI_{C(n)}\epsilon L^0(M)$。由(4)，(16)和(15)式，

$$[L^n,L^n]=[\bar{f}HI_{C(n)}.M',\bar{f}HI_{C(n)}.M']$$
$$-2[\bar{f}HI_{C(n)}.M',\bar{f}I_{C(n)}.\bar{M}']+[\bar{f}I_{C(n)}.\bar{M}',\bar{f}I_{C(n)}.\bar{M}']$$
$$=\bar{f}HGH'\bar{f}'I_{C(n)}.A-2\bar{f}HF\bar{G}\bar{f}'I_{C(n)}.A+\bar{f}\bar{G}\bar{f}'I_{C(n)}.A=0.$$

但是 $$\|\bar{f}HI_{C(n)}.M'-\bar{f}H.M'\|_{H^1}=\|\bar{f}HI_{C(n)}-\bar{f}H\|_{L(M)}\to0,$$

及 $$\|\bar{f}I_{C(n)}.\bar{M}'-\bar{f}.\bar{M}'\|_{H^1}=\|\bar{f}I_{C(n)}-\bar{f}\|_{L(\bar{M})}\to0.$$

故L^n按$\mathbf{H}^1$模收敛于L，从而$L=0$。因此$N=\bar{f}.\bar{M}'=\bar{f}H.M'$，其中$\bar{f}H\epsilon L(M)$。

转而考虑一般的$N\epsilon\mathbf{L}_0$，这时存在停时列$T_n\uparrow\infty$ $a.s.$，使对一切n，$N^{T_n}\epsilon\mathbf{H}_0^1$。由上面所证，$N^{T_n}$可表为$N^{T_n}=g^n.M'$，其中$g^n\epsilon L(M)$。两边用$T_n$截，利用(12)得

$$N^{T_n}=g^nI_{[\![0,T_n]\!]}.M' \tag{17}$$

两边再用T_{n-1}截，并用(12)得

$$N^{T_{n-1}}=g^nI_{[\![0,T_{n-1}]\!]}.M' \tag{18}$$

在(17)中改n为$(n-1)$并与(18)比较得

$$g^{n-1}I_{[\![0,T_{n-1}]\!]}.M'=g^nI_{[\![0,T_{n-1}]\!]}.M' \tag{19}$$

令 $$g=\sum_{n=1}^{\infty}g^nI_{]\!]T_{n-1},T_n]\!]}\text{ ，其中}T_0=0 \tag{20}$$

则
$$gI_{[0,T_l]} = \sum_{n=1}^{l} g^n I_{]T_{n-1},T_n]} \in L(M) \tag{21}$$

$g\in L_{loc}(M)$，因而可定义 $\overline{N}=g.M'$，且由(14)，(21)和(19)得

$$\overline{N}^{T_l} = gI_{[0,T_l]} . M' = \sum_{n=1}^{l}(g^n I_{[0,T_n]} - g^n I_{[0,T_{n-1}]}).M'$$
$$= \sum_{n=1}^{l}(g^n I_{[0,T_n]} - g^{n-1} I_{[0,T_{n-1}]}).M' = g^l I_{[0,T_l]} .M' \tag{22}$$

比较(17)和(22)得 $N^{T_l}=\overline{N}^{T_l}$，故 $N=\overline{N}=g.M'$，其中$g\in L_{loc}(M)$，即M有可选表示性，定理证毕。

参考文献

〔1〕Yen, K. A., Yoeurp, Ch., Reprêsentation des Martingales Comme Intégrales Stochastiques des Processus Optionnels, Sém. Probab., X, Lect. Notes in Math., 511, Springer—Verlag, (1976), 422—431.
〔2〕严加安，可测过程对局部鞅的随机积分，数学学报，21 (1978)，1，18—25.
〔3〕严加安，鞅与随机积分引论，上海科学技术出版社，(1981).
〔4〕Jacod, J., Sous—espaces Stables de Martingales, Z.W., 44 (1978), 2, 103—115.
〔5〕关肇直、张恭庆、冯德兴，线性泛函分析入门，上海科学技术出版社，(1979).

The Property of Optional Representation for Multidimensional Quasi—left Continuous Local Martingales

Zhou Jianwei

Abstract

In this paper a fundamental theorem on property of optional representation for k—dimensional quasi—left continuous local martingales is established. This theorem is an extension of the known result for k = 1 in 〔1〕.