广义更新序列、半p函数及其F函数族*

黄 之 瑞

（数 学 力 学 系）

Kingman 首先提出再生现象及其p函数的理论[1,2]。1972年，他又提出广义更新序列和半p函数的概念，并得到若干重要的分析性质[3]。

本文用较一般的观点，把广义更新序列和半p函数的定义统一起来，研究了联系于它们的F函数族的性质，由此得到广义更新序列类和半p函数类对于点点相乘运算封闭这个新结果。

（一） F函数族及其某些性质

设T是一个加法半群，$\mathbf{P}_T$是定义在T上的实函数集合，它对点点相乘运算封闭，即对任何$p,q\in\mathbf{P}_T$，均有$pq\in\mathbf{P}_T$，其中pq被定义为对一切$t\in T$，$pq(t)=p(t)q(t)$。

定义1 给定$p\in\mathbf{P}_T$，对任何正整数n及$t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，定义

$$F_n(t_1,\cdots,t_n;p)=p(t_1+\cdots+t_n)-\sum_{1\leqslant i<n}p(t_1+\cdots+t_i)p(t_{i+1}+\cdots+t_n)+\sum_{1\leqslant i<j<n}p(t_1+\cdots+t_i)p(t_{i+1}+\cdots+t_j)p(t_{j+1}+\cdots+t_n)-\cdots+(-1)^{n-1}p(t_1)\cdots p(t_n) \tag{1}$$

则称$\{F_n(\cdot;p),n\geqslant 1\}$为联系于$p$的$F$函数族。

如果T是一个全序集，且对任$t_1,t_2\in T$，有$t_1+t_2>t_1$和t_2，又若$t_1>t_2$，则有$t_1-t_2\in T$使$t_2+(t_1-t_2)=t_1$，就称T是一个全序加法半群。

定义2 若T是一个全序加法半群，给定$p\in\mathbf{P}_T$，对任何正整数n及T中之$t_1<t_2<\cdots<t_n$，定义

$$F_n^*(t_1,\cdots,t_n;p)=p(t_n)-\sum_{1\leqslant i<n}p(t_i)p(t_n-t_i)+\sum_{1\leqslant i<j<n}p(t_i)p(t_j-t_i)p(t_n-t_j)-\cdots+(-1)^{n-1}p(t_1)p(t_2-t_1)\cdots p(t_n-t_{n-1}) \tag{2}$$

则称$\{F_n^*(\cdot;p),n\geqslant 1\}$为联系于$p$的$F^*$函数族。

易见若T是全序加法半群，则有关系：

* 本工作得到梁之舜教授的指导

$$F_n(t_1,\cdots,t_n;p)=F_n^*(t_1,t_1+t_2,\cdots,t_1+\cdots+t_n;p)$$

及对任$t_1<t_2<\cdots<t_n$，

$$F_n^*(t_1,\cdots,t_n;p)=F_n(t_1,t_2-t_1,\cdots,t_n-t_{n-1};p).$$

由此可见，用F^*函数族定义的p函数和半p函数[1,3]若换成用F函数族来定义是一致的。

从定义1知F函数族有对称性，即对$t_1,\cdots,t_n\in T$，

$$F_n(t_1,\cdots,t_n;p)=F_n(t_n,t_{n-1},\cdots,t_1;p) \tag{3}$$

易于验证如下重要关系：

$$\begin{aligned}F_n(t_1,\cdots,t_n;p)&=p(t_1+\cdots+t_n)-\sum_{i=1}^{n-1}p(t_1+\cdots+t_i)F_{n-i}(t_{i+1},\cdots,t_n;p)\\&=p(t_1+\cdots+t_n)-\sum_{i=1}^{n-1}F_i(t_1,\cdots,t_i;p)p(t_{i+1}+\cdots+t_n),\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}F_n(t_1,\cdots,t_n;p)&=F_{n-1}(t_1+t_2,t_3,\cdots,t_n;p)-p(t_1)F_{n-1}(t_2,\cdots t_n;p)\\&=F_{n-1}(t_1,\cdots,t_{n-2},t_{n-1}+t_n;p)-F_{n-1}(t_1,\cdots,t_{n-1};p)p(t_n)\end{aligned} \tag{5}$$

我们采用记号：当$p,q\in \mathbf{P}_T$和$t_1,\cdots,t_n\in T$，

$$H_1(t_1,\cdots,t_n;p,q)=F_n(t_1,\cdots,t_n;p)F_n(t_1,\cdots,t_n;q), \tag{6}$$

$$L_1(t_1,\cdots,t_n;p,q)=p(t_1)F_n(t_1,\cdots,t_n;q); \tag{7}$$

而在$k=2,3,\cdots,n$时，

$$\begin{aligned}H_k(t_1,\cdots,t_n;p,q)&=F_{n-k+1}(t_1+\cdots+t_k,t_{k+1},\cdots,t_n;p)F_{n-k+1}(t_1+\cdots+t_k,t_{k+1},\cdots,t_n;q)\\&-\sum_{r=1}^{k-1}F_r(t_1,\cdots,t_r;pq)F_{n-k+1}(t_{r+1}+\cdots+t_k,t_{k+1},\cdots t_n;p)F_{n-k+1}(t_{r+1}+\cdots\\&+t_k,t_{k+1},\cdots,t_n;q)\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}L_k(t_1,\cdots,t_n;p,q)&=p(t_1+\cdots+t_k)F_{n-k+1}(t_1+\cdots+t_k,t_{k+1},\cdots,t_n;q)\\&-\sum_{r=1}^{k-1}F_r(t_1\cdots,t_r;pq)p(t_{r+1}+\cdots+t_k)F_{n-k+1}(t_{r+1}+\cdots+t_k,t_{k+1}\cdots,t_n;q).\end{aligned} \tag{9}$$

它们显然有如下关系：

$$H_n(t_1,\cdots,t_n;p,q)=L_n(t_1,\cdots,t_n;p,q)=F_n(t_1,\cdots,t_n;pq). \tag{10}$$

由归纳法可以得到，当$k=1,2,\cdots,n$时，

$$H_1(t_1,\cdots,t_n;p,q)=H_k(t_1,\cdots t_n;p,q)-\sum_{r=1}^{k-1}\Big[L_r(t_1,\cdots,t_n;p,q)F_{n-r}(t_{r+1},\cdots,t_n;p)$$

$$+L_r(t_1,\cdots,t_n;q,p)F_{n-r}(t_{r+1},\cdots,t_n;q)\Big]. \tag{11}$$

特别地，当$k=n$时，

$$F_n(t_1,\cdots,t_n;p)F_n(t_1,\cdots,t_n;q)=F_n(t_1,\cdots t_n;pq)-\sum_{r=1}^{n-1}[L_r(t_1,\cdots,t_n;p,q)$$

$$\cdot F_{n-r}(t_{r+1},\cdots,t_n;p)+L_r(t_1,\cdots,t_n;q,p)F_{n-r}(t_{r+1},\cdots,t_n;q)] \tag{12}$$

为了推理方便，引进下面记号：$r=1,\cdots,k-2$,

$$L_r^*=L_r(t_1,\cdots,t_r,t_{r+1}+\cdots+t_k,t_{k+1},\cdots,t_n;p,q)\sum_{i=r+1}^{k-1}F_{i-r}(t_{r+1},\cdots,t_i;p)$$

$$\cdot p(t_{i+1}+\cdots+t_k),$$

$$L_r^{(1)}=p(t_1+\cdots+t_r)F_{n-k+2}(t_1+\cdots+t_r,t_{r+1}+\cdots+t_k,t_{k+1},\cdots,t_n;q)$$

$$\cdot\sum_{i=r+1}^{k-1}F_{i-r}(t_{r+1},\cdots,t_i;p)p(t_{i+1}+\cdots+t_k),$$

$$L_r^{(2)}=\sum_{i=1}^{r-1}F_i(t_1,\cdots,t_i;pq)p(t_{i+1}+\cdots+t_r)F_{n-k+2}(t_{i+1}+\cdots+t_r,t_{r+1}+\cdots$$

$$+t_k,t_{k+1},\cdots,t_n;q)\sum_{j=r+1}^{k-1}F_{j-r}(t_{r+1},\cdots,t_j;p)p(t_{i+1}+\cdots+t_k),$$

$$M_r=\sum_{j=r+1}^{k-1}p(t_1+\cdots+t_j)p(t_{j+1}+\cdots+t_k)F_{n-k+2}(t_1+\cdots+t_j,t_{j+1}+\cdots$$

$$+t_k,t_{k+1},\cdots,t_n;q)$$

$$M_r^{(1)}=p(t_1+\cdots+t_{r+1})p(t_{r+2}+\cdots+t_k)F_{n-k+2}(t_1+\cdots+t_{r+1},t_{r+2}+\cdots$$

$$+t_k,t_{k+1},\cdots t_n;q)$$

$$N_r=\sum_{j=r}^{k-2}p(t_1+\cdots+t_j)\sum_{i=j+1}^{k-1}\Big[F_{i-j}(t_{j+1},\cdots,t_i;p)F_{n-k+1}(t_1+\cdots+t_k,t_{k+1},\cdots,t_n;q)$$

$$-q(t_1+\cdots+t_j)F_{i-j}(t_{j+1},\cdots,t_i;pq)F_{n-k+1}(t_{i+1}+\cdots+t_k,t_{k+1},\cdots t_n;q)\Big]$$

$$\cdot p(t_{i+1}+\cdots,+t_k),$$

$$N_r^{(1)}=p(t_1+\cdots+t_r)\sum_{i=r+1}^{k-1}\Big[F_{i-r}(t_{r+1},\cdots,t_i;p)F_{n-k+1}(t_1+\cdots+t_k,t_{k+1},\cdots,t_n;q)$$

$$-q(t_1+\cdots+t_r)F_{i-r}(t_{r+1},\cdots,t_i;pq)F_{n-k+1}(t_{i+1}+\cdots+t_k,t_{k+1},\cdots,t_n;q)\Big]$$

$$\cdot p(t_{i+1}+\cdots+t_k),$$

$$S_r=\sum_{i=1}^{r-1}F_i(t_1,\cdots,t_i;pq)\sum_{j=r+1}^{k-1}\Big[F_{j-r+1}(t_{i+1}+\cdots+t_r,t_{r+1},\cdots,t_j;p)$$

$$\cdot F_{n-k+1}(t_{i+1}+\cdots+t_k,t_{k+1},\cdots,t_n;q)-F_{j-r+1}(t_{i+1}+\cdots+t_r,t_{r+1},\cdots,t_j;pq)$$

$$\cdot F_{n-k+1}(t_{j+1}+\cdots+t_k,t_{k+1},\cdots,t_n;q)\Big]p(t_{j+1}+\cdots+t_k),$$

$$S_r^{(1)}=\sum_{i=1}^{r-1}F_i(t_1,\cdots,t_i;pq)p(t_{i+1}+\cdots+t_{r+1})F_{n-k+2}(t_{i+1}+\cdots+t_{r+1},t_{r+2}+\cdots$$

$$+t_k,t_{k+1},\cdots,t_n;q)p(t_{r+2}+\cdots+t_k),$$

$$S_r^{(2)}=\sum_{i=1}^{r-1}F_i(t_1,\cdots,t_i;pq)p(t_{i+1}+\cdots+t_r)\sum_{j=r+1}^{k-1}\Big[F_{j-r}(t_{r+1},\cdots,t_j;p)$$

$$\cdot F_{n-k+1}(t_{i+1}+\cdots+t_k,t_{k+1},\cdots,t_n;q)-q(t_{i+1}+\cdots+t_r)F_{j-r}(t_{r+1},\cdots,t_j;pq)$$

$$\cdot F_{n-k+1}(t_{j+1}+\cdots+t_k,t_{k+1},\cdots,t_n;q)\Big]p(t_{j+1}+\cdots+t_k),$$

$$S_r^{(3)}=\sum_{i=1}^{r-1}Fi(t_1,\cdots,t_i;pq)\sum_{j=r+2}^{k-1}\Big[F_{j-r}(t_{i+1}+\cdots+t_{r+1},t_{r+2},\cdots,t_j;p)$$

$$\cdot F_{n-k+1}(t_{i+1}+\cdots+t_k,t_{k+1},\cdots,t_n;q)-F_{j-r}(t_{i+1}+\cdots+t_{r+1},t_{r+2},\cdots,t_j;pq)$$

$$\cdot F_{n-k+1}(t_{j+1}+\cdots+t_k,t_{k+1},\cdots,t_n;q)\Big]p(t_{j+1}+\cdots+t_k),$$

$$U_r^{(1)}=pq(t_1+\cdots+t_r)p(t_{r+1})F_{n-k+2}(t_{r+1},t_{r+2}+\cdots+t_k,t_{k+1},\cdots,t_n;q)p(t_{r+2}+\cdots+t_k),$$

$$U_r^{(2)}=pq(t_1+\cdots+t_r)\sum_{i=r+2}^{k-1}\Big[F_{i-r}(t_{r+1},\cdots,t_i;p)F_{n-k+1}(t_{r+1}+\cdots+t_k,t_{k+1},\cdots,t_n;q)$$

$$-F_{i-r}(t_{r+1},\cdots,t_i;pq)F_{n-k+1}(t_{i+1}+\cdots+t_k,t_{k+1},\cdots,t_n;q)\Big]p(t_{i+1}+\cdots+t_k),$$

$$V_r^{(1)}=\Big[\sum_{i=1}^{r-1}F_i(t_1,\cdots t_i;pq)pq(t_{i+1}+\cdots+t_r)\Big]p(t_{r+1})F_{n-k+2}(t_{r+1},t_{r+2}+\cdots$$

$$+t_k,t_{k+1},\cdots,t_n;q)p(t_{r+2}+\cdots+t_k),$$

$$V_r^{(2)}=\sum_{i=1}^{r-1}F_i(t_1,\cdots,t_i;pq)pq(t_{i+1}+\cdots+t_r)\sum_{j=r+2}^{k-1}\Big[F_{j-r}(t_{r+1},\cdots,t_j;p)$$

$$\cdot F_{n-k+1}(t_{r+1}+\cdots+t_k,t_{k+1},\cdots,t_n;q)-F_{j-r}(t_{r+1},\cdots,t_j;pq)$$

$$\cdot F_{n-k+1}(t_{j+1}+\cdots+t_k,t_{k+1},\cdots,t_n;q)\Big]p(t_{j+1}+\cdots+t_k).$$

可以验证它们有如下关系：

$$L_r^* = \begin{cases} L_1^{(1)} & r=1 \\ L_r^{(1)} - L_r^{(2)} & r=2,\cdots,k-2 \end{cases}$$

$$M_r = \begin{cases} M_r^{(1)} + M_{r+1} & r=1,2,\cdots,k-3 \\ M_{k-2}^{(1)}, & r=k-2 \end{cases}$$

$$N_r = \begin{cases} N_r^{(1)} + N_{r+1} & r=1,2,\cdots,k-3 \\ N_{k-2}^{(1)} & r=k-2 \end{cases}$$

$$S_r = \begin{cases} 0 & r=1 \\ S_r^{(1)} - S_r^{(2)} + S_r^{(3)} & r=2,\cdots,k-3 \\ S_{k-2}^{(1)} - S_{k-2}^{(2)} & r=k-2 \end{cases}$$

$$N_r^{(1)} - L_r^{(1)} = \begin{cases} U_r^{(1)} + U_r^{(2)} & r=1,\cdots,k-3 \\ U_{k-2}^{(1)} & r=k-2 \end{cases}$$

$$S_r^{(2)} - L_r^{(2)} = \begin{cases} 0 & r=1 \\ V_r^{(1)} + V_r^{(2)} & r=2,\cdots,k-3 \\ V_{k-2}^{(1)} & r=k-2 \end{cases}$$

$$M_r^{(1)} - \left[S_r^{(1)} + \left(U_r^{(1)} - V_r^{(1)} \right) \right] = L_{r+1}(t_1,\cdots,t_{r+1},t_{r+2}+\cdots$$
$$+t_k,t_{k+1},\cdots,t_n;p,q)p(t_{r+2}+\cdots+t_k),$$

$$S_{r+1} = \begin{cases} U_1^{(2)} & r=1 \\ S_r^{(3)} + \left(U_r^{(2)} - V_r^{(2)} \right) & r=2,\cdots,k-3. \end{cases}$$

由此即可得到：当$r=1,2,\cdots,k-3$时，

$$L_r^* + M_r - N_r - S_r = L_{r+1}(t_1,\cdots,t_{r+1},t_{r+2}+\cdots+t_k,t_{k+1},\cdots,t_n;p,q)$$
$$\cdot p(t_{r+2}+\cdots+t_k) + M_{r+1} - N_{r+1} - S_{r+1} \tag{13}$$

$$L_{k-2}^* + M_{k-2} - N_{k-2} - S_{k-2} = L_{k-1}(t_1,\cdots,t_n;p,q)p(t_k) \tag{14}$$

考虑如下函数类：对任$n\geqslant 1$，记

$$\mathbf{F}_n^T=\left\{p:p\in\mathbf{P}_T,\forall k\leqslant n,t_1,\cdots,t_k\in T,F_k(t_1\cdots,t_k;p)\geqslant 0\right\},$$

$$\mathbf{F}^T=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathbf{F}_n^T$$

显见$\mathbf{F}_1{}^T\supset\mathbf{F}_2{}^T\supset\cdots\supset\mathbf{F}_n{}^T\supset\mathbf{F}^T$。以及$p\in\mathbf{F}^T$当且仅当对任何$n$和$t_1,\cdots,t_n\in T$都有

$$F_n(t_1,\cdots,t_n;p)\geqslant 0, \tag{15}$$

因此　$\mathbf{F}^T=\{p:p\in\mathbf{P}_T,\ \forall n,\ t_1,\cdots,t_n\in T,\ F_n(t_1,\cdots,t_n;p)\geqslant 0\}$。

命题1　若$p,q\in\mathbf{F}_n{}^T$，$t_1,\cdots,t_n\in T$，则对任何$k=2,3,\cdots,n$，有

$$L_k(t_1,\cdots,t_n;p,q)\geqslant L_{k-1}(t_1,\cdots,t_n;p,q)p(t_k), \tag{16}$$

因此也有

$$L_k(t_1,\cdots,t_n;p,q)\geqslant p(t_1)\cdots p(t_k)F_n(t_1,\cdots,t_n;q) \tag{17}$$

证明　当$n=2,3$时，可直接验证（16）成立。当$n>3$时，假设对一切$m<n$，当$k=2,\cdots,m$时，（16）成立，此时$L_r(t_1,\cdots,t_m;p,q)\geqslant 0$。今往证当$n$时（16）仍成立。

当$k=2,3<n$时，可直接验证。当$3<k\leqslant n$时，由于$p\in\mathbf{F}_n{}^T$，有$p(t_1+\cdots+t_k)\geqslant\sum_{r=1}^{k-1}F_r(t_1,\cdots,t_r;p)p(t_{r+1}+\cdots+t_k)$，由此

$$L_k(t_1,\cdots,t_n;p,q)\geqslant L_1(t_1,t_2+\cdots+t_k,t_{k+1},\cdots,t_n;p,q)p(t_2+\cdots+t_k)+M_1-N_1.$$

由$L_1\geqslant 0$及$p(t_2+\cdots+t_k)\geqslant\sum_{i=2}^{k-1}F_{i-1}(t_2,\cdots,t_i;p)p(t_{i+1}+\cdots+t_k)$，故

$$L_k(t_1,\cdots,t_n;p,q)\geqslant L_1{}^*+M_1-N_1. \tag{18}$$

可用归纳法证明当$r=2,\cdots,k-2$时有

$$\begin{aligned}L_k(t_1,\cdots,t_n;p,q)\geqslant &L_r(t_1,\cdots,t_r,t_{r+1}+\cdots+t_k,t_{k+1},\cdots,t_n;p,q)\\&\cdot p(t_{r+1}+\cdots+t_k)+M_r-N_r-S_r.\end{aligned} \tag{19}$$

事实上，由（18）和（13）知，当$r=2$时，(19)成立。今假设当$r<k-2$时成立，由$p(t_{r+1}+\cdots+t_k)\geqslant\sum_{i=r+1}^{k-1}F_{i-r}(t_{r+1},\cdots,t_i;p)p(t_{i+1}+\cdots+t_k)$及$L_r\geqslant 0$，由（19）得到

$$L_k(t_1,\cdots t_n;p,q)\geqslant L_r{}^*+M_r-N_r-S_r,$$

由（13）得到当$r+1$时（19）仍成立。故（19）的真确性获证。在（19）中取$r=k-2$，由$p(t_{k-1}+t_k)\geqslant p(t_{k-1})p(t_k)$及$L_{k-2}\geqslant 0$，得

$$L_k(t_1,\cdots,t_n;p,q)\geqslant L_{k-2}{}^*+M_{k-2}-N_{k-2}-S_{k-2}.$$

由（14）即得（16），从而得到（17）。命题证毕。

命题2　若$p,q\in\mathbf{F}_n{}^T$，$t_1,\cdots,t_n\in T$，则有

$$F_n(t_1,\cdots,t_n;pq)\geqslant p(t_1)\cdots p(t_n)F_n(t_1,\cdots,t_n;q) \tag{20}$$

$$F_n(t_1,\cdots,t_n;pq)\geqslant F_n(t_1,\cdots,t_n;p)F_n(t_1,\cdots,t_n;q)$$

$$+\sum_{r=1}^{n-1}[p(t_1)\cdots p(t_r)F_{n-r}(t_{r+1},\cdots,t_n;p)F_n(t_1,\cdots,t_n;q)$$

$$+q(t_1)\cdots q(t_r)F_{n-r}(t_{r+1},\cdots,t_n;q)F_n(t_1,\cdots,t_n;p)]。\tag{21}$$

证明　在（17）中令$k=n$，由（10）即得（20）。由（17）和（12）即得（21）。证毕。

定理1　若$p,q\in\mathbf{F}^T$，则$pq\in\mathbf{F}^T$。

证明　对任一正整数n，都有$p,q\in\mathbf{F}_n{}^T$，由（20）得到$pq\in\mathbf{F}_n{}^T$，因此$pq\in\mathbf{F}^T$。

（二）广义更新序列

考察$T=I=\{1,2,\cdots\}$则$p\in\mathbf{P}_I$是一个实序列。如果$p\in\mathbf{F}^I$，则称p为**广义更新序列**。为与通用记号[3]一致，本节改写$p(n)$为u_n，p为u，$\mathbf{F}^I$为$\mathbf{R}$。

Kingman[3]提出的广义更新序列u的定义是存在一个实序列f，对一切$n\in I$，满足(注)

$$f_n\geqslant 0,\tag{22}$$

$$u_n=f_n+\sum_{i=1}^{n-1}f_iu_{n-i}\ .\tag{23}$$

下面将证明上述两种定义是等价的。

引理1　若$u,f\in\mathbf{P}_I$，满足关系式（23），则对任一正整数n，有

$$u_n=\sum_{s=1}^{n}\sum_{i_1+\cdots+i_s=k}f_{i_1}\cdot f_{i_2}\cdots f_{i_s}。\tag{24}$$

（24）已由侯振挺[4]对u是更新序列证明了，实际上对于任二个满足（23）的序列u和f都成立。下面来推广这个结果，得到u的F函数族用f序列的显式表示。

引理2　若u和$f\in\mathbf{p}_I$且满足（23），则对任一正整数k，有

$$F_k(n,\cdots,n_k;u)=\sum_{s=1}^{n_1+\cdots+n_k-k+1}\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_s=n_1+\cdots n_k\\ i_1+\cdots+i_t\neq n_1+\cdots+n_r\\ 1\leqslant t<s,\ 1\leqslant r<k}}f_{i_1}f_{i_2}\cdots f_{i_s}\tag{25}$$

证明　当$k=1$时，由(24)可见(25)成立。假设对$k-1$(25)成立，则当k时，对任何$n_1,\cdots n_k\in I$，由(5)及下式

$$u_{n_1}F_{k-1}(n_2,\cdots,n_k;u)=$$

$$=\sum_{s=1}^{n_1}\sum_{i_1+\cdots+i_s=n_1}f_{i_1}\cdots f_{i_s}\sum_{s=1}^{n_2+\cdots+n_k-k+2}\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_s=n_2+\cdots+n_k\\ i_1+\cdots+i_t\neq n_2+\cdots+n_r\\ 1\leqslant t<s,2\leqslant r<k}}f_{i_1}\cdots f_{i_s}$$

（注）：[3]还规定$u_0=1$，此处弃去并无损大局。

$$= \sum_{s=1}^{n_1+\cdots+n_k-k+2} \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_s=n_1+\cdots+n_k \\ i_1+\cdots+i_t=n_1,\ t=1,\cdots,n_1 \\ i_1+\cdots+i_r\neq n_1+\cdots+n_e \\ t<r<s,\ 2<e<k}} f_{i_1}\ f_{i_2}\ \ldots f_{i_s}$$

$$\therefore\quad F_k(n_1,\cdots,n_k;u)=F_{k-1}(n_1+n_2,n_3,\cdots,n_k;u)-u_{n_1}F_{k-1}(n_2\cdots n_k;\ u).$$

$$= \sum_{s=1}^{n_1+\cdots+n_k-k+2} \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_s=n_1+\cdots+n_k \\ i_1+\cdots i_t\neq n_1+\cdots+n_r \\ 1<t<s,\ 2<r<k}} f_{i_1}\cdots f_{i_s} - \sum_{s=1}^{n_1+\cdots+n_k-k+2} \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_s=n_1+\cdots+n_k \\ i_1+\cdots+i_t=n_1,\ 1<t<n_1 \\ i_1+\cdots+i_r\neq n_1+\cdots+n_e \\ t<r<s,\ 2<e<k}} f_{i_1}\cdots f_{i_s}$$

$$= \sum_{s=1}^{n_1+\cdots+n_k-k+1} \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_s=n_1+\cdots+n_k \\ i_1+\cdots+i_t\neq n_1+\cdots+n_r \\ 1<t<s,\ 1<r<k}} f_{i_1}f_{i_2}\cdots f_{i_s}$$

上式求和范围减1，是因$i_1=1$，$i_2=1,\cdots,i_{n_1}=1$的项在相减中消去。证毕。

引理3　设$u\in\mathbf{P}_I$，其F函数族是$\{F_n(\cdot,u),n\geq 1\}$。对任一$n\geq 1$定义

$$f_n=F_n(1,\cdots,1;u) \tag{26}$$

则所得$f\in\mathbf{P}_I$与u有关系(23)。

上述引理乃是(4)的直接结果。

定理2　$u\in\mathbf{P}_I$是一个广义更新序列当且仅当存在一个$f\in\mathbf{P}_I$，使一切$n\in I$满足(22)和(23)。

证明　必要性由引理3得到；充分性由引理2得到。

定理3　若u和v都是广义更新序列，则$w=uv$仍是一个广义更新序列。

本定理只是定理1的一种特殊情况。

（三）半P函数

考察$T=(0,\infty)$，则$p\in\mathbf{P}_{(0,\infty)}$是$(0,\infty)$上的一个实函数。如果$p\in\mathbf{F}^{(0,\infty)}$，则称$p$为**半P函数**；如果半$p$函数$p$还满足

$$\lim_{t\downarrow 0} p(t)=1 \tag{27}$$

则称它是**标准的**。以后把半p函数类$\mathbf{F}^{(0,\infty)}$简记为$\mathbf{F}$，标准半p函数类记为$\widetilde{P}$。同时，把$\mathbf{F}_n^{(0,\infty)}$简记为$\mathbf{F}_n$。显然$\widetilde{\mathbf{P}}\subset\mathbf{F}\subset\mathbf{F}_n$(对任$n$)。

我们记$e\in\mathbf{P}_{(0,\infty)}$为对一切$t\in(0,\infty)$，

$$e(t)=1 \tag{28}$$

显然它是$\mathbf{P}_{(0,\infty)}$的**么元素**。而且，对任一正整数n和$t_1,\cdots t_n\in(0,\infty)$，有

$$F_n(t_1,\cdots t_n;e)=\begin{cases}1 & \text{当}n=1. \\ 0, & \text{当}n>1.\end{cases}$$

同时满足条件（27）。因此$e\in\widetilde{\mathbf{P}}$。

由定理1直接推得

定理4 半p函数类F或标准半p函数类$\widetilde{\mathbf{P}}$都是一个含么元素的可交换半群。

参 考 文 献

〔1〕. J.F.C.Kingman, The Stochastic Theory of Regenerative Event, Z.Wahrsch' theorie, 2 (1964), 180—224.

〔2〕. J.F.C.Kingman, Regenerative Phenomena, Wiley, London, (1973).

〔3〕. J.F.C.Kingman, Semi—p—Function, Trans. Amer. Math. Soc., 174 (1972).

〔4〕. 侯振挺，更新序列对于圈乘运标的封闭性，中国科学，A辑，(1982)，1.

Generalised Renewal Sequences, Semi—P—Functions and their F—Function Clusters

Huang Zhirui

Abstract

In this paper the author, using a more general point of view, unifies the definition of generalised renewal sequences with that of semi-p-functions, and studies the properties of F-function clusters associated with them. Thus an essential proposition that both the class of generalised renewal sequences and the class of semi-p-functions are closed under pointwise multiplication is firstly proved.