隐格式二次样条插值余项估计*

梁君度

（计算机科学系）

1974年，Marsden提出了一类隐格式二次周期插值样条[1]，并得到误差估计的上界。但对隐式插值的余项还未得到误差的最佳系数．A·Hall[2]、李岳生[3]对三次、二次样条插值误差的最佳系数分别进行了研究。本文提出了估计误差的另一种方法，即从估计一类泛函的界出发，得到优于Marsden的结果，并证明了其中$\|f(x)-s(x)\|_\infty$的估计系数是最佳的。

设π为区间〔0，1〕上的一个分划，$\pi: 0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$，$h_i=x_i-x_{i-1}$，$f(x)$是被插函数，$f(x),f'(x),f''(x)$及$f'''(x)$在〔0，1〕上连续，且以1为周期．$s(x)$是以$\{x_i\}_{i=0}^n$为结点的二次周期样条，以$x_{i+\frac{1}{2}}=x_i+h_i/2$为插值点，满足$s(x_{i+\frac{1}{2}})=f(x_{i+\frac{1}{2}})$，$s(0)=s(1)$，$s'(0)=s'(1)$。则$R_i=R(x_i)=f(x_i)-s(x_i)$，$R_i'=R'(x_i)=f'(x_i)-s'(x_i)$满足：

$$\left\{\begin{aligned}&\lambda_iR_{i-1}+3R_i+\mu_iR_{i+1}=L_i^{(1)}f, \quad &(1)\\ &\mu_iR'_{i-1}+3R'_i+\lambda_iR'_{i+1}=L_i^{(2)}f, \quad i=0,1,2,\cdots,n &(2)\\ &L_i^{(1)}f=\lambda_if(x_{i-1})+3f(x_i)+\mu_if(x_{i+1})-4[\lambda_if(x_{i-\frac{1}{2}})+\mu_if(x_{i+\frac{1}{2}})],\\ &L_i^{(2)}f=\mu_if'(x_{i-1})+3f'(x_i)+\lambda_if'(x_{i+1})-8[f(x_{i+\frac{1}{2}})-f(x_{i-\frac{1}{2}})]/(h_i+h_{i+1}),\end{aligned}\right.$$

此处$\lambda_i=h_{i+1}/(h_i+h_{i+1})$，$\mu_i=1-\lambda_i$．

容易验证$L_i^{(j)}x^k=0$，$k=0,1,2$；$j=1,2$．在〔x_{i-1},x_{i+1}〕上用Peano核定理可得到

$$|L_i^{(1)}f|\leqslant\frac{1}{12}h^3\|f'''\|_\infty,\quad |L_i^{(2)}f|\leqslant\frac{1}{3}h^2\|f'''\|_\infty.$$

设 $|R(x_j)|=\max\limits_i|R(x_i)|$，$|R'(x_k)|=\max\limits_i|R'(x_i)|$利用(1)、(2)估得

$$|R(x_j)|\leqslant\frac{1}{24}h^3\|f'''\|_\infty,\quad |R'(x_k)|\leqslant\frac{1}{6}h^2\|f'''\|_\infty.$$

---

*本工作得到黄友谦付教授的指导

运用拉氏插值 $R(x)=(1-2\xi)(1-\xi)R(x_i)+\xi(2\xi-1)R(x_{i+1})+\frac{h^3_{i+1}}{12}R'''(\eta)$ $\cdot\xi(2\xi-1)(\xi-1)$，其中 $\xi=\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$，$\eta\in(x_i,x_{i+1})$ 得

$$|R(x)|\leqslant\frac{1}{24}h^3\|f'''\|_\infty,$$

再用$R'(x_i)$，$R'(x_{i+1})$对$R'(x)$作线性插值，类似上式有

$$|R'(x)|\leqslant\frac{1}{6}h^2\|f'''\|_\infty.$$

取π为〔0,1〕上的等距分划$x_i=ih$, $h=\frac{1}{2m}$, $i=0,1,\cdots,2m$，m为任意正整数，令

$$f_N(x)=\begin{cases}-\frac{N}{24h}(x_{2i}-x)^4+\frac{h}{4}(1-\frac{1}{N})(x_{2j}-x)^2-\frac{h^3}{24}+\frac{h^3}{12N^2}-\frac{h^3}{24N^3}, & x_{2i}\leqslant x\leqslant x_{2i}+\frac{h}{N};\\ \frac{1}{6}(x_{2i+1}-x)^3-\frac{h}{4}(x_{2i+1}-x)^2+\frac{h^2}{6N^2}(x_{2i+1}-x)+\frac{h^3}{24}-\frac{h^3}{12N^2}, & x_{2i}+\frac{h}{N}\leqslant x\leqslant x_{2i+1}-\frac{h}{N};\\ \frac{N}{24h}(x-x_{2i+1})^4-\frac{h}{4}(1-\frac{1}{N})(x-x_{2i+1})^2+\frac{h^3}{24}-\frac{h^3}{12N^2}+\frac{h^3}{24N^3}, & x_{2i+1}-\frac{h}{N}\leqslant x\leqslant x_{2i+1}+\frac{h}{N};\\ \frac{1}{6}(x-x_{2i+1})^3-\frac{h}{4}(x-x_{2i+1})^2+\frac{h^2}{6N^2}(x-x_{2i+1})+\frac{h^3}{24}-\frac{h^3}{12N^2}, & x_{2i+1}+\frac{h}{N}\leqslant x\leqslant x_{2i+2}-\frac{h}{N};\\ -\frac{N}{24h}(x_{2i+2}-x)^4+\frac{h}{4}(1-\frac{1}{N})(x_{2i+2}-x)^2-\frac{h^3}{24}+\frac{h^3}{12N^2}-\frac{h^3}{24N^3}, & x_{2i+2}-\frac{h}{N}\leqslant x\leqslant x_{2i+2}.\end{cases}$$

易知$f_N(x)$对一切$N\geqslant3$满足$f(x)$，$f'(x)$，$f''(x)$及$f'''(x)$为〔0，1〕上以1为周期的连续函数，不难验证：

$$\frac{\|f_N(x)-s(x)\|_\infty}{\|f'''_N\|_\infty h^3}=\frac{1}{24}-\frac{1}{12N^2}+\frac{1}{24N^3},$$

所以对$R(x)$的估计是不能改进的。〔1〕中对$R'(x_i)$，$R(x)$，$R'(x_i)$、$R'(x)$的估计分别为

$|R(x_i)|\leqslant\frac{1}{8}h^3\|f'''\|_\infty$，$|R(x)|\leqslant\frac{11}{48}h^3\|f'''\|_\infty$，$|R'(x_i)|\leqslant\frac{1}{3}h^2\|f'''\|_\infty$，$|R'(x)|\leqslant\frac{11}{24}h^2\|f'''\|_\infty$。

因而本文结果优于文〔1〕。且对$R(x_i)$，$R(x)$的估计为最佳，运用上述方法，还可改进〔1〕中其他一些结果，此外这种方法可应用于其他插值样条的误差估计。

参 考 文 献

〔1〕 M.J.Marsden, Quadrtic Spline Interpolation, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 80 (1974), 903—906.

〔2〕 Charles A, Hall and W, Weston Meyer, Optimal Error Bounds for Cubic Spline Interpolation, *Journal of Approximation theory*, 16 (1976), 105—122.

〔3〕 李岳生，二次样条插值余项估计的订正和改进，中山大学学报，(1981)，2.

The Estimation of Remainder Term about Implicit Quadratic Interpolational Splines

Liang Junduo

Abstract

In present paper, estimating bounds of a class of functionals we improved the results of paper 〔3〕 and proved that a estimation coefficient $\|f(x)-s(x)\|_\infty$ is most optimal.