Hilbert空间中带多点平滑约束的LQ最优控制*

陈　关　荣

（计算机科学系）

本文继续文〔1〕的工作，考虑一种带多点平滑约束的LQ最优控制，这是常见的两端约束情形的推广。其中，由于多点测量数据$\{r_i\}_1^n$带有误差，从而不要求被控对象的状态x严格满足这些点的(插值)约束：$x(t_i)=r_i, i=1,\cdots,n$;而只要求满足一定的逼近性约束：$\sum\limits_{i=1}^{n}[x(t_i)-r_i]^2=\min$。

本文将证明这种问题的最优解是Hilbert空间中的光顺样条函数，并由此给出这种问题最优解的存在唯一性定理和特征性定理。由于论证方法与文〔1〕类似，本文仅给出证明的提示。

§1　主　要　结　果

问题Ⅰ　求最优控制u^*及最佳轨迹x^*使满足线性动态方程

$$\mathbf{L}x=Bu,\quad x\in\widehat{X}=L_2[I;X];\ u\in\widehat{U}=L_2[I;U];\ t\in I=[t_0,T]; \tag{1a}$$

$$x(t_0)=x_0; \tag{1b}$$

并使二次型平滑指标

$$J=p\sum_{i=1}^{n}[x(t_i)-r_i]^2+\int_{t_0}^{T}\{\langle x,Qx\rangle_X+\langle u,Ru\rangle_U\}\,dt \tag{2}$$

成为极小(当$n=1$且$t_1=T$时，它是一种熟知的情形)。其中

$\mathbf{L}$：$\widehat{X}\to\widehat{U}$是任意阶的(常、偏)微分算子(阵)；线性连续算子$B$：$\widehat{U}\to\widehat{U}$，线性连续自共轭正算子$Q$：$\widehat{X}\to\widehat{X}$，$R$:$\widehat{U}\to\widehat{U}$($R$可以是零算子$\theta$)；$\widehat{X}=L_2[I;X]$表示定义于$I$而取值于$X$且满足$\int_I\langle x,x\rangle_X dt<\infty$的函数空间，其范数定义为$\|\cdot\|_{\widehat{X}}=(\int_I\langle\cdot,\cdot\rangle_X dt)^{1/2}$；而$X$、$U$为一类适当的实Hilbert空间(例如一类Sobolev空间)，使得线性微分算子$\mathbf{L}$成为连续；正实常数p是权因子；$t_0<t_1<\cdots<t_n\leqslant T$。

---

* 本文于1981年12月收到

本文中假定算子$\mathbf{L}$有有界逆(这一条件可以换为假定算子B有有界逆，见文[1])。因而由(1)式解出

$$x=\mathbf{L}^{-1}Bu \tag{3}$$

然后代入(2)式，并把Q、R分别分解为：$Q=\widetilde{Q}^*\widetilde{Q}$、$R=\widetilde{R}^*\widetilde{R}$，使得

$$J=p\sum_{i=1}^{n}[x(t_i)-r_i]^2+\int_{t_0}^{T}\{\langle\widetilde{Q}\mathbf{L}^{-1}Bu,\widetilde{Q}\mathbf{L}^{-1}Bu\rangle_X+\langle\widetilde{R}u,\widetilde{R}u\rangle_U\}dt; \tag{4}$$

记插值算子λ：$\widehat{X}\to H$为$\lambda(x)=[x(t_1),\cdots,x(t_n)]$，又记$h=[r_1,\cdots,r_n]\in H$，这里$H$是具有$l_2$模的$n$重$R^1$的乘积空间；再令$\widetilde{\lambda}=\lambda\mathbf{L}^{-1}B\widetilde{R}^{-1}$，$L=\widetilde{Q}\mathbf{L}^{-1}B\widetilde{R}^{-1}$，$\widetilde{u}=\widetilde{R}u$，则(4)式变为

$$J=p\|\widetilde{\lambda}\widetilde{u}-h\|_H^2+\int_{t_0}^{T}\{\langle L\widetilde{u},L\widetilde{u}\rangle_X+\langle\widetilde{u},\widetilde{u}\rangle_U\}dt. \tag{5}$$

现在引入一个新的Hilbert空间$\widehat{Z}=H\times\widehat{X}\times\widehat{U}$，其内积定义为

$$\langle z_1,z_2\rangle_{\widehat{Z}}=\langle h_1,h_2\rangle_H+\int_{t_0}^{T}\{\langle L\widetilde{u}_1,L\widetilde{u}_2\rangle_X+\langle\widetilde{u}_1,\widetilde{u}_2\rangle_U\}dt; \tag{6}$$

而范数定义为

$$\|\cdot\|_{\widehat{Z}}=\sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle_{\widehat{Z}}}; \tag{7}$$

其中

$$z_i=[h_i,L\widetilde{u}_i,\widetilde{u}_i]\in\widehat{Z},\quad i=1,2; \tag{8}$$

再定义线性连续算子$\widetilde{L}$：$\widehat{U}\to\widehat{Z}$为

$$\widetilde{L}(\widetilde{u})=[\widetilde{\lambda}\widetilde{u},L\widetilde{u},\widetilde{u}]\in\widehat{Z}; \tag{9}$$

又记$\widetilde{h}=[h,o,o]\in\widehat{Z}$，则原问题I等价于下述一种Hilbert空间中的光顺样条函数问题：

问题Ⅱ　求$\widetilde{u}^*\in\widehat{U}$使满足

$$\|\widetilde{L}\widetilde{u}^*-\widetilde{h}\|_{\widehat{Z}}^2=\min_{\widetilde{u}\in\widehat{U}}\|\widetilde{L}\widetilde{u}-\widetilde{h}\|_{\widehat{Z}}^2. \tag{10}$$

由问题Ⅱ的样条函数解$\widetilde{u}^*$通过

$$u=\widetilde{R}^{-1}\widetilde{u}; \tag{11}$$

$$x=\mathbf{L}^{-1}B\widetilde{R}^{-1}\widetilde{u}; \tag{12}$$

两式便可以给出问题I的最优解。

§2　若　干　定　理

定理2.1　(存在唯一性)问题I存在唯一解的充分必要条件是

$$N(\widetilde{\lambda})=\overline{N}(\widetilde{\lambda}); \tag{13}$$

其中$\overline{N}$为N的闭包；$N(\widetilde{\lambda})$为算子$\widetilde{\lambda}=\lambda\mathbf{L}^{-1}B\widetilde{R}^{-1}$的零空间。

证 因为问题Ⅱ存在唯一解的充要条件是[2]

$$N(\overline{L})+N(\widetilde{\lambda})=\overline{N(\overline{L})+N(\widetilde{\lambda})};$$

$$N(\overline{L})\cap N(\widetilde{\lambda})=\{\theta\};$$

其中算子$\overline{L}=[L,I]:\widehat{U}\to\widehat{X}\times\widehat{U}$。显然$N(\overline{L})=\{0\}$且$\theta\in N(\widetilde{\lambda})$即$N(\widetilde{\lambda})\neq\phi$。故可知现在的问题Ⅱ存在唯一解的充要条件成为$N(\widetilde{\lambda})=\overline{N(\widetilde{\lambda})}$。定理得证。

定理2.2 （特征性）$\overline{x}\in\widehat{X}$，$\overline{u}\in\widehat{U}$是问题Ⅰ的最优解的充分必要条件是

$$p\sum_{i=1}^{n}[\overline{x}(t_i)-r_i]x(t_i)+\int_{t_0}^{T}\{\langle\overline{x},Qx\rangle_X+\langle\overline{u},Ru\rangle_U\}dt=0,$$

$$\forall x\in\widehat{X},u\in\widehat{U}. \tag{14}$$

证 因为$\widetilde{\overline{u}}$是问题Ⅱ的最优解的充要条件是[2]

$$p\langle\widetilde{\lambda}\widetilde{\overline{u}}-h,\widetilde{\lambda}\widetilde{u}\rangle_H+\int_{t_0}^{T}\{\langle L\widetilde{\overline{u}},L\widetilde{u}\rangle_X+\langle\widetilde{\overline{u}},\widetilde{u}\rangle_U\}dt=0,\ \forall\widetilde{u}\in\widehat{U}; \tag{15}$$

根据前面的符号可知，此即(14)式。从(15)式取共轭立得

推论2.3 $\overline{x}\in\widehat{X}$，$\overline{u}\in\widehat{U}$是问题Ⅰ的最优解的充分必要条件是

$$p\widetilde{\lambda}^{*}\lambda\overline{x}+\int_{t_0}^{T}(L^{*}\widetilde{Q}\overline{x}+\widetilde{R}\overline{u})dt=p\widetilde{\lambda}^{*}h. \tag{16}$$

稍加整理，又得

推论2.4 $\overline{x}\in\widehat{X}$，$\overline{u}\in\widehat{U}$是问题Ⅰ的最优解的充分必要条件是存在$q\in H$满足

$$\int_{t_0}^{T}(L^{*}\widetilde{Q}\overline{x}+\widetilde{R}\overline{u})dt=\widetilde{\lambda}^{*}q. \tag{17}$$

且

$$q=p(h-\lambda\overline{x}). \tag{18}$$

定义2.5 称空间$\widehat{X}\times\widehat{U}$中的子空间$S_1\times S_2$为样条函数空间：

$$S_1\times S_2=\{[s_1,s_2]\in\widehat{X}\times\widehat{U}\,\Big|\int_I\{\langle s_1,Qx\rangle_X+\langle s_2,Ru\rangle_U\}dt=0,$$

$$\forall u\in N(\widetilde{\lambda}),\quad x=L^{-1}Bu\}. \tag{19}$$

定理2.6 对任何$h\in H$，存在唯一的$[s_1,s_2]\in S_1\times S_2$满足

$$\lambda s_1+\frac{1}{p}\widetilde{\lambda}^{*-1}\int_{t_0}^{T}(L^{*}\widetilde{Q}s_1+\widetilde{R}s_2)dt=h. \tag{20}$$

证 这是Hilbert空间中最佳逼近元素的存在唯一性定理(例如，见[2,Th.2.1.2])和前面推论2.3的一个直接推论。其中线性连续算子$\widetilde{\lambda}^{*}$有逆是因为：插值算子$\widetilde{\lambda}$为满射算子，其值域$R(\widetilde{\lambda})=H$，$\widetilde{\lambda}:\widehat{X}\to H$，故$N(\widetilde{\lambda}^{*})=R(\widetilde{\lambda})^{\perp}=\{o\}$。从而$\widetilde{\lambda}^{*}$构成$H$与$\widehat{X}$间的一一对应，于是由逆算子定理知$\widetilde{\lambda}^{*}$有逆，且是线性连续的。

定理2.7　设任意给定$h\in H$且对应地存在唯一的$[s_1,s_2]\in S_1\times S_2$满足(20)式，则有

$$(\mathrm{i})\ p\|\lambda x-h+\frac{1}{p}\mu(s_1,s_2)\|_H^2+\int_{t_0}^{T}\{\langle s_1-x,Q(s_1-x)\rangle_X+\langle s_2-u,R(s_2-u)\rangle_U\}dt$$

$$=\min_{[\widetilde{s_1},\widetilde{s_2}]\in S_1\times S_2}\{p\|\lambda x-h+\frac{1}{p}\mu(\widetilde{s_1},\widetilde{s_2})\|_H^2+\int_{t_0}^{T}\{\langle\widetilde{s_1}-x,Q(\widetilde{s_1}-x)\rangle_X$$

$$+\langle\widetilde{s_2}-u,R(\widetilde{s_2}-u)\rangle_U\}dt \tag{21}$$

对任意$u\in\widehat{U}$, $x=L^{-1}Bu$成立。

$$(\mathrm{ii})\ p\|\lambda s_1-h+\frac{1}{p}\mu(\widetilde{s_1},\widetilde{s_2})\|_H^2+\int_{t_0}^{T}\{\langle s_1-\widetilde{s_1},Q(s_1-\widetilde{s_1})\rangle_X+\langle s_2-\widetilde{s_2},R(s_2-\widetilde{s_2})\rangle_U\}dt$$

$$=\min_{\substack{u\in\widehat{U}\\ x=L^{-1}Bu}}\{p\|\lambda x-h+\frac{1}{p}\mu(\widetilde{s_1},\widetilde{s_2})\|_H^2+\int_{t_0}^{T}\{\langle x-\widetilde{s_1},Q(x-\widetilde{s_1})\rangle_X$$

$$+\langle u-\widetilde{s_2},R(u-\widetilde{s_2})\rangle_U\}dt \tag{22}$$

对任意$[\widetilde{s_1},\widetilde{s_2}]\in S_1\times S_2$成立，且$[s_1,s_2]$是$\widehat{X}\times\widehat{U}$中唯一具有此性质的元素。其中

$$\mu(s_1,s_2)=\widetilde{\lambda}^{*-1}\int_{t_0}^{T}(L^*\widetilde{Q}s_1+\widetilde{R}s_2)dt. \tag{23}$$

证　由光顺样条的最佳逼近性质(见[2,Th.4.6.8])立得。

本文的全部结论对一般集中参数系统和分布参数系统都是成立的。

参 考 文 献

[1] 陈关荣，抽象Hilbert空间中带线性等式约束或带凸约束的LQ最优控制，中山大学学报（自然科学版），(1981)，4，78-88.

[2] P.-J.Laurent, *Approximation et Optimisation*, Hermann. Paris, (1972).

LQ Optimal Control Problems with Smoothing Constraints of Multipoints in Hilbert Spaces

Chen Guanrong

Abstract

This paper is a continuation of author's [1]. The optimal solutions that arise in linear control processes with a quadratic smoothing constraints of multi-points in Hilbert spaces is researched. The theorems on existence, uniqueness and characteristics of the optimal solutions (x^*,u^*) are given.