复多元正态分布的一个刻画

滕成业

（计算机科学系）

C. R. Rao在文〔2〕中（§8，问题19）曾讨论了复多元正态分布的定义及性质。设p-维复随机矢量

$$Z = X + iY$$

若对每一个复矢量$L\epsilon U^p$（U^p表示p维复数空间）

$$R.\ P.(L^*Z) \sim N_1(R.P.(L^*\mu), L^*QL)$$

其中$R.\ P.$表示实部，μ是复p-维常数矢量及Q是$P\times P$阶Hermitian 非负定阵，则称Z遵循复p-元正态分布，且记为$Z\sim CNp(\mu,\ Q)$。

令 $\mu = \mu_1 + i\mu_2$，　$Q = Q_1 + iQ_2$，　$\nu' = (\mu_1' \vdots\ \mu_2')$

及 $\Sigma = \begin{pmatrix} Q_1 & -Q_2 \\ Q_2 & Q_1 \end{pmatrix}$

其中Q_1是实对称，Q_2是实斜对称，那么

(i) $\begin{pmatrix} X \\ \cdots \\ Y \end{pmatrix} \sim N_{2p}(\nu,\ \Sigma)$.

(ii) $I.\ P.(L^*Z) \sim N_1(I.\ P.(L^*\mu),\ L^*QL)$　　$\forall L\epsilon U^p$.

(iii) $R.\ P.(L^*Z)$和$I.\ P.\ (L^*Z)$是相互独立的　　$\forall L\epsilon U^p$.

上述性质(i)和(ii)分别可作为复多元正态的等价定义[3,4]，而性质(iii)是复多元正态的必要条件，是否它也是充分条件呢？也就是说，条件(iii)是否刻画了a）变量Z的Gauss性[注]，b)变量Z的正态性。下面我们利用Darmois定理[1]来证明这结果。

定理　设P-维复随机矢量$Z = X + iY$，若对每一个P-维常数复矢量$L\epsilon U^p$，有$v = R.P.(L^*Z)$及$v = I.\ P.\ (L^*Z)$是相互独立的，那么$Z\sim CN_p(\mu,\ Q)$。

证明　对任意给定的复常数矢量$L\epsilon U^p$，

1982年10月收到．本文得到美国匹兹堡大学统计系C. R. Rao 教授及暨南大学数学系邓炜材副教授的指导和帮助．

〔注〕变量$Z = X + iY$的Gauss性，即

$$D(Z) = 2(Q_1 + iQ_2)\text{及}\ D\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 & -Q_2 \\ Q_2 & Q_1 \end{pmatrix},\qquad \text{其中} Q_1 = Q_1' \ \text{和}\ Q_2' = -Q_2.$$

令

$$W=L^*Z=u+iv,$$

按定理的条件知道u和v相互独立。又因为

$$(1+i)^*W=(u+v)+i(v-u)=(1+i)^*L^*Z=[(1+i)L]^*Z=L_0^*Z,$$

其中

$L_0=(1+i)L$ 也是一个P-维复矢量。同样按定理的假设有

$$v+u=R.\ P.\ (L_0^*Z),\qquad v-u=I.\ P.\ (L_0^*Z)$$

是相互独立的，这样按实正态律刻画法的Darmois定理的特例Kac定理：两个相互独立的随机变量，若它们的和、差还是两个相互独立随机变量，那么它们遵循正态分布，由此推知u和v是正态随机变量，自然它们的一阶矩和二阶矩存在。由于L的任意性，显然可以推出变量Z的每一个分量的实部和虚部同样具有有限均值及方差。不妨设

$$E\binom{X}{Y}=\binom{\mu_1}{\mu_2}=\nu,\qquad D\binom{X}{Y}=\begin{pmatrix}Q_{11}&Q_{12}\\Q_{21}&Q_{22}\end{pmatrix}=\Sigma.$$

即

$$\underset{p\times1}{E(X)=\mu_1},\qquad \underset{p\times1}{E(Y)=\mu_2},\tag{1}$$

$$\underset{p\times p}{D(X)=Q_{11}},\qquad \underset{p\times p}{D(Y)=Q_{22}},$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=Q_{12},\qquad \operatorname{cov}(Y,X)=Q_{21}=Q_{12}'.$$

现对任意给定的P-维复常数矢量$L=L_1+iL_2$，

有　$$L^*Z=(L_1'X+L_2'Y)+i(-L_2'X+L_1'Y)$$

即　$$u=R.P.(L^*Z)\binom{L_1}{L_2}'\binom{X}{Y},$$

$$v=I.P.(L^*Z)=\binom{-L_2}{L_1}\binom{X}{Y}.\tag{2}$$

按假设u和v相互独立，所以有

$$\operatorname{cov}(u,v)=\operatorname{cov}(L_1'X_1+L_2'Y,-L_2'X+L_1'Y)$$

$$=-L_1'Q_1L_2+L_2'Q_{22}L_1+L_1'Q_{12}L_1-L_2'Q_{21}L_2=0.\tag{3}$$

由于L的任意性，在(3)式中令$L_1=0$，则

$$L_2'Q_{21}L_2=0.\qquad \forall L_2\in R^p$$

由此可知Q_{21}是对角元为零的斜对称阵。我们记$Q_2=Q_{21}$，显然按(1)式有$Q_{12}=-Q_2$。

在(3)式中又令$L_1=L_2$，即得

$$L_1'Q_{11}L_1-L_1'Q_{22}L_1=L_1'(Q_{11}-Q_{22})L_1=0\qquad \forall L_1\in R^p$$

（注意到Q_2斜对称，所以 $L_1' Q_2 L_1 = 0$）。这样，$Q_{11} - Q_{22}$必须是对角元为零的斜对称阵，但是，Q_{11}和Q_{22}是对称阵，所以只有$Q_{11} = Q_{22} = Q_1$。这就证实变量Z的 Gauss 性，即

$$\Sigma = D\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 & -Q_2 \\ Q_2 & Q_1 \end{pmatrix}$$

其中Q_1是对称阵，Q_2是斜对称阵，自然$D(Z) = 2Q$，即 $Q = Q_1 + iQ_2$是 Hermitian 非负定阵。

最后，按(2)式经计算后我们有

$$E(u) = R.\ P.(L^*\mu), \qquad E(v) = I.\ P.(L^*\mu),$$
$$D(u) = L^*QL, \qquad D(v) = L^*QL.$$

前面已经证明了$u = R.\ P.\ (L^*Z)$是正态变量。所以

$$R.\ P.(L^*Z) \sim N_1(R.\ P.\ (L^*\mu),\ L^*QL),$$

即$Z \sim CN_p(\mu,\ Q)$证毕。

参考文献

〔1〕 Kagan A. M., Linik Yu. L., Rao C. R., *Characterigation Problems in Mathematical Statistics*, 1973, Wiley, New York.

〔2〕 Rao, C. R., *Linear Statistical Inference and its Applications*, 1973, Wiley, New York.

〔3〕 Wooding R. A., *The Multivariate Distribution of Complex Normal Variables*, Biometrika, 43 (1956), 212—215.

〔4〕 滕成业、杨维权，关于复多元正态分布，中山大学学报（自然科学版），1982,4.

A Characterization of the Complex Multivariate Normal Distribution

Teng Chengye

Abstract

Let a complex random p-vector $Z = X + iY$ ($X = \mathrm{Re}(Z)$ and $Y = \mathrm{Im}(X)$), if for every complex p-vector L, $\mathrm{Re}(L^*Z)$ and $\mathrm{Im}(L^*Z)$ are independently distributed, then $D(Z) = 2Q = 2(Q_1 + iQ_2)$、$D\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 & -Q_2 \\ Q_2 & Q_1 \end{pmatrix}$ and Z is complex multivariate normal variable.