关于递归可枚举集派生集定理的一点注记

王　洁

（计算机科学系）

在文献〔1,2〕及具有相同体系的著作中，有不少牵涉到代数方面的定理，其中有一条关于递归可枚举集派生集的定理：设V是任意一个递归可枚举集，则由V用有限原始递归函数系列$F_i(x_1,x_2,\cdots,x_{m_i})(i=1,2,\cdots s,)$派生出来的自然数集$V^g$是递归可枚举集。

这里派生集V^g是指包含V且关于运算$F_1,F_2,\cdots,F_s$封闭的最小集合，即以V为定义域，相对于$F_i(i=1,2,\cdots,s)$封闭的集合的交集与V的并集。

直接给V^g的元素编号，就获得了〔1〕的证明，但用在此却使证明过于冗长和复杂，下面我们从另外的角度给出该定理的一个简短证明。首先有如下两个熟知的结论[1,2]：

(1) A为递归可枚举集$\Longleftrightarrow(\exists f)$($f$为单元原始递归函数)：$A=\text{range}f$。

(2) 有限个递归可枚举集的并集和交集都是递归可枚举集。

我们可以把结论(1)推广为：

(1)′ A为递归可枚举集$\Longleftrightarrow(\exists g)$($g$为$m$元原始递归函数)：$A=\text{range}g$。

证明　我们知道，存在着N^m到N的原始递归的1——1映射——Cantor编号C^m（这里N为非负整数集，$N^m=\overbrace{N\times N\times\cdots\times N}^{m\text{个}}$），即对任$x\epsilon N$,有唯一的$\langle x_1,x_2,\cdots,x_m\rangle\epsilon N^m$，使$C^m(x_1,x_2,\cdots,x_m)=x$,反之亦然。

由(1)，A是递归可枚举集$\Longleftrightarrow(\exists f)$($f$为单元原始递归函数)：$A=\text{range}f$。令$f(x)=f(C^m(x_1,x_2,\cdots,x_m))=g(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，则$f(x)$为单元原始递归函数$\Longleftrightarrow g(x_1,x_2,\cdots,x_m)$为$m$元原始递归函数。〔证毕〕

定理的证明　我们用$F(f,f,\cdots,f)(x_1,x_2,\cdots,x_m)$表示$m$元函数$F(f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m))$。显然，如果$F$和$f$都是原始递归的，则$F(f,f,\cdots,f)$亦是原始递归的。

因为V是递归可枚举集，故存在单元原始递归函数f,使$V=\text{range}f$,依定义，

$$V^g=\left[\bigcup_{i=1}^{s}\text{range}F_i\overbrace{(f,f,\cdots,f)}^{m_i\text{个}}\right]\cup V.$$

由(1)′及(2)应知V^g是递归可枚举集。〔证毕〕

参 考 文 献

〔1〕 А.И. Мальцев, Алгоритмы и рекурсивные фукции, Изд. 《Наука》, 1965.

〔2〕 Ю. Л. Ершов, Теория нумераций, Изд. 《Наука》,1977.