阻尼最小二乘法的目标函数分离形式 (II)

朱匀华　　　　陈志恬

（数学力学系）　　（计算中心）

摘　　要

本文继续文[1]，论述阻尼最小二乘法的目标函数分离形式的特有性质．

阻尼最小二乘法的目标函数分离形式与通常形式是互相联系的，只要在通常形式的目标函数

$$\Phi_k(x)=\sum_{i=1}^{m}w_i^{(k)}F_i^2(x) \tag{4.1}$$

中，当$i\in I_k$时，用$R\overline{w}_i^{(k)}$代替$w_i^{(k)}$，用$F_i(x)-F_i(x^{(k)})$代替$F_i(x)$，就得到分离形式的目标函数[1]

$$\Phi_k(x)=\Phi_{1k}(x)+R\Phi_{2k}(x), \tag{4.2}$$

因此分离形式有类似通常形式的迭代程序[2]

$$X^{(k+1)}=X^{(k)}-(SQ+A^TWA)^{-1}A^TWF, \tag{4.3}$$

自然它们的区别是前面提到的替换关系．

性质 6　目标函数(4.2)中的$\Phi_{2k}(x)$满足：

$$(1)\ \frac{\partial\Phi_{2k}(x^{(k)})}{\partial x_j}=0\quad(j=1,2,\cdots,n); \tag{4.4}$$

$$(2)\ \mathrm{grad}\Phi_{2k}(x^{(k)})=0. \tag{4.5}$$

性质 7　目标函数(4.2)满足：

$$(1)\ \frac{\partial\Phi_k(x^{(k)})}{\partial x_j}=\frac{\partial\Phi_{1k}(x^{(k)})}{\partial x_j}\ (j=1,2,\cdots,n); \tag{4.6}$$

$$(2)\ \mathrm{grad}\Phi_k(x^{(k)})=\mathrm{grad}\Phi_{1k}(x^{(k)}). \tag{4.7}$$

性质 8　假设$F_i(x)(i=1,2,\cdots,m)$在$D(\subset R^n)$中有一阶连续偏导数，而$w_i^{(k)}>0$ $(i\in\overline{I}_k)$、$\overline{w}_i^{(k)}>0$ $(i\in I_k)$、$q_j^{(k)}>0$ $(j=1,2,\cdots,n)$、$R>0$、$S>0$均为确定的常数；逆矩阵$(SQ+A^TWA)^{-1}$存在；又$x^{(k)}$是D的内点，$x^{(k+1)}$是阻尼函数

$$\Psi_k(x)=\sum_{i\in\overline{I}_k}w_i^{(k)}\tilde{F}_i^2(x)+R\sum_{i\in I_k}\overline{w}_i^{(k)}[\tilde{F}_i(x)-F_i(x^{(k)})]^2$$

本文1983年8月收到

$$+S\sum_{j=1}^{n} q_j^{(k)}(x_j - x_j^{(k)})^2 \tag{4.8}$$

的最小值点，则$x^{(k+1)}=x^{(k)}$的充分必要条件为：目标函数(4.2)中的$\Phi_{1k}(x)$满足

$$\mathrm{grad}\Phi_{1k}(x^{(k)})=0. \tag{4.9}$$

证明　注意到前面提到的替换关系以及[2]

$$A^tWF=\frac{1}{2}[\mathrm{grad}\Phi_k(x^{(k)})]^t,$$

因而根据迭代程序(4.3)和性质7得到

$$X^{(k+1)}=X^{(k)}-(SQ+A^TWA)^{-1}A^tWF$$
$$=X^{(k)}-\frac{1}{2}(SQ+A^TWA)^{-1}[\mathrm{grad}\Phi_{1k}(x^{(k)})]^t,$$

由此便知$x^{(k+1)}=x^{(k)}$的充分必要条件为

$$\mathrm{grad}\Phi_{1k}(x^{(k)})=0.$$

性质9　假设$F_i(x)(i=1,2,\cdots,m)$在D中有一阶连续偏导数；而$w_i^{(k)}>0(i\in \bar{I}_k)$、$\overline{w_i}^{(k)}>0\ (i\in I_k)$、$q_j^{(k)}>0\ (j=1,2,\cdots,n)$、$R>0$均为确定的常数；又$x^{(k)}$是$D$的内点，$x^{(k+1)}(s)$是阻尼函数(4.8)的最小值点。则目标函数(4.2)满足：

$$(1)\quad \Phi_k(x)-\Phi_{1k}(x)=o(\|x-x^{(k)}\|)\quad (x\to x^{(k)}); \tag{4.10}$$

$$(2)\quad \Phi_k(x^{(k+1)}(s))-\Phi_{1k}(x^{(k+1)}(s))$$
$$=o(\|x^{(k+1)}(s)-x^{(k)}\|)\quad (s\to+\infty). \tag{4.11}$$

证明　(1)　利用$\Phi_{2k}(x)$在点$x^{(k)}$的台劳展式，并由性质1和性质6便可推得。

(2)　由结论(1)并注意到[1]

$$x^{(k+1)}(s)\xrightarrow[s\to+\infty]{}x^{(k)}$$

便可推得。

性质10　假设$F_i(x)(i=1,2,\cdots,m)$在D中有一阶连续偏导数；而$w_i^{(k)}>0(i\in\bar{I}_k)$、$\overline{w_i}^{(k)}>0\ (i\in I_k)$、$q_i^{(k)}>0(j=1,2,\cdots,n)$均为确定的常数；又$x^{(k)}$是$D$的内点，且$\mathrm{grad}\Phi_{1k}(x)^{(k)}\neq0$，$x^{(k+1)}(R,S)$是阻尼函数(4.8)的最小值点。则对于每一个$R>0$都存在$S_0=S_0(R)>0$，使得

$$\sup_{S\geqslant S_0(R)}\{\Phi_{2k}(x^{(k+1)}(R,S))\}\xrightarrow[R\to+\infty]{}0, \tag{4.12}$$

其中上式左端是二元函数$\Phi_{2k}(x^{(k+1)}(R,S))$当$R$相对固定时在$S\geqslant S_0(R)$的范围内取上确界后所得的一元函数。

证明　由假设条件和(4.7)有

$$\mathrm{grad}\Phi_k(x^{(k)})=\mathrm{grad}\Phi_{1k}(x^{(k)})\neq0,$$

因此根据性质2，对每一个固定的$R>0$，都存在$S_0=S_0(R)>0$，使得$S\in[S_0(R),+\infty)$时目标函数满足

$$R\Phi_{2k}(x^{(k+1)}(R,S))\leqslant\Phi_k(x^{(k+1)}(R,S))<\Phi_k(x^{(k)})=\Phi_{1k}(x^{(k)}),$$

于是当$S\geqslant S_0(R)$时，有

$$\Phi_{2k}(x^{(k+1)}(R,S))<R^{-1}\Phi_{1k}(x^{(k)}),$$

所以当R固定时，在$S\geqslant S_0(R)$的范围内取上确界后得到

$$0\leqslant \sup_{S>S_0(R)}\{\Phi_{2k}(x^{(k+1)}(R,S))\}\leqslant R^{-1}\Phi_{1k}(x^{(k)}),$$

因而有

$$\sup_{S>S_0(R)}\{\Phi_{2k}(x^{(k+1)}(R,S))\}\xrightarrow[R\to+\infty]{}0.$$

推论 在性质10的条件下，对于每一个$R>0$，都存在$S_0(R)>0$，使得当$i\in I_k$时，有

$$\sup_{S>S_0(R)}|F_i(x^{(k+1)}(R,S))-F_i(x^{(k)})|\xrightarrow[R\to+\infty]{}0. \tag{4.13}$$

我们对 5～15阶的低通或高通滤波器进行了大量的设计计算，计算的方法是把阻尼最小二乘法中的目标函数分离形式应用于对阻带的控制，都取得较好的效果。其中对一个11阶的低通滤波器，在通带上和阻带上各取28个频率点，在6912机上计算，经过 6 次迭代（约 8 分钟），56个点全部满足要求。而用阻尼最小二乘法的通常形式迭代 6 次，结果只有46个点满足要求。

参 考 文 献

〔1〕朱匀华、陈志恬，中山大学学报(自然科学版),1983,1,65—71.
〔2〕王大麒、朱匀华、陈志恬，中山大学学报(自然科学版),1980,1,24—39.
〔3〕K·Levenberg, Quart. Appl. Math., 2(1944), 164.
〔4〕G·C·Temes & D·Y·F·Zai, IEEE Trans on Circuit Theory, May 16 (1969).

The Separated Form of Objective Function in the Method of Damped Least Squares (Ⅱ)

Zhu Yunhua　　Chen Zhitian

Abstract

This article continues to illuminate the theoretical and computational aspects of the separated form of objective function in the method of damped least squares.