临界点附近超导体热力学位的单圈近似

周义昌　刘金明

（物理学系）

摘　要

应用最陡下降法，在临界点附近同时考虑超导体的秩序参量和电磁势的涨落，在单圈近似得到超导体热力学位，由此预言超导相变是弱一级相变。

（一）

实验早已肯定，超导体在无外场时是二级连续相变，BCS理论和Ginzburg-Landau理论也证明是二级。在平均场意义上，关于超导体相变级别问题，理论与实验是一致的。近年来，理论上证明，平均场理论所忽略的涨落，对相变有重要的影响。然而，人们按Ginzburg判据认为，超导体的序参量的涨落是极不重要的。1973年，Halperin 等人[1]，首次越出平均场理论考虑涨落的效果。他们使用所谓广义平均场理论，不考虑超导序参量$|\Psi|$的涨落，而考虑电磁势$\vec{A}$的涨落到高斯近似，得到超导体相变具有一级的特征，但只在T_c附近$\Delta T\sim\mu K$数量级才表现出来(对第Ⅰ类超导体)．文献〔1〕还使用ϵ展开方法，在准到ϵ^1级证明递推关系没有不动点，因而也证明超导体相变是一级。文献〔2〕继续讨论这一问题，在ϵ^1级计算热力学函数和秩序参量的极化率χ及相应的有效指数，发现有效指数是非普适的。

本文在理论的更深层次上，即在单圈近似内同时考虑序参量$|\Psi|$和电磁势$\vec{A}$的涨落。计算方法采用Jackiw[3]使用过的泛函积分展开的最陡下降法，在计算单圈近似时使用文献〔4〕所提出的方法，即把序参量和电磁势各分量统一为一个秩序参量场，但把它推广到三维空间和有质量标量电动力学的情况。文献〔4〕处理了四维时空的无质量电动力学，而无外场下的超导体，在相变点附近，是一个在三维空间下的有质量电动力学问题。本文的定性结论与文献〔1〕是一致的。因为理论预言的一级相变特征只在$10^{-6}K$温度范围才表现出来，限于当前实验上温度测量的精确度，尚无法作出检验。但本工作还是有意义的。首先，它可以在更高的精度内从理论上理解超导相变的特征。其次，我们的方法可以应用于液晶相变的讨论。文献〔5〕指出，超导体及液晶都有序参量与它们各自的规范场耦合的特征，而液晶的一级相变特点显著。再其次，目前理论上计算超导体热

本文于1982年12月收到。

力学位，尚未曾计算过两圈图贡献。我们的方法，有可能去计算两圈图，我们正在作此尝试。

(二)

超导体的配分函数Z是序参量$\Psi(x)$与电磁势$\vec{A}(x)$的泛函积分

$$Z=\int[d\Psi(x)][d\vec{A}(x)]e^{-\beta H\{\psi(x),\vec{A}(x)\}}$$

$$=\int[d\Psi(x)][d\vec{A}(x)]e^{-I\{\psi(x),\vec{A}(x)\}} \tag{1}$$

式中$\beta H=I$ 是约化自由能泛函

$$I\{\Psi(x),\vec{A}(x)\}=\int d^3xF\{\Psi(x),\vec{A}(x)\} \tag{2}$$

式中

$$F\{\Psi(x),\vec{A}(x)\}=\frac{a}{2}|\Psi(x)|^2+\frac{b}{4}|\Psi(x)|^4+\frac{1}{8\pi}[\nabla\times\vec{A}(x)]^2$$

$$+\frac{\gamma}{2}|[\nabla-ie_0\vec{A}(x)]\Psi(x)|^2 \tag{3}$$

为自由能泛函密度，其中

$$a=a'(T-T_0)/T_0$$

a'、b及γ在临界点附近视为与温度无关的常数。以下使用规范$\nabla\cdot\vec{A}(x)=0$。序参量$\Psi(x)$通常是复数，即

$$\Psi(x)=\Phi_1(x)+i\Phi_2(x) \tag{4}$$

引进二分量矢量

$$\Phi=\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{pmatrix} \tag{5}$$

则(3)式改写为

$$F\{\Phi(x),\vec{A}(x)\}=\frac{a}{2}\Phi^2+\frac{b}{4}(\Phi^2)^2+\frac{1}{8\pi}(\nabla\times\vec{A})^2+\frac{\gamma}{2}(\nabla\Phi_1+e_0\vec{A}\Phi_2)$$

$$+\frac{\gamma}{2}(\nabla\Phi_2-e_0\vec{A}\Phi_1) \tag{6}$$

式中$\Phi^2\equiv\Phi_a\Phi_a\equiv\Phi_1^2+\Phi_2^2$，泛函积分$\int[d\Psi(x)]\longrightarrow\int[d\Phi(x)]$。类似文献[3]，作平移变换

$$\Phi(x)=\hat{\varphi}+\varphi(x) \tag{7}$$

使 $I\{\Phi(x),\vec{A}(x)\}$在$(\hat{\varphi},0)$作展开

$$I\{\Phi(x),\vec{A}(x)\}=I\{\hat{\varphi},0\}+$$

$$\int d^3xd^3y\{\varphi_a(x)\cdot\frac{1}{2}\frac{\delta^2I\{\Phi,0\}}{\delta\Phi_a(x)\delta\Phi_b(y)}\Big|_{\Phi=\hat{\varphi}}\cdot\varphi_b(y)+$$

$$+\varphi_a(x)\cdot\frac{\delta^2 I\{\Phi,\vec{A}\}}{\delta\Phi_a(x)\delta A_j(y)}\Bigg|_{\substack{\Phi=\hat{\varphi}\\ \vec{A}=0}}\cdot A_j(y)$$

$$+A_i(x)\cdot\frac{1}{2}\frac{\delta^2 I\{\hat{\varphi},\vec{A}\}}{\delta A_i(x)\delta A_j(y)}\Bigg|_{\vec{A}=0}\cdot A_j(y)\}+\hat{I}\{\hat{\varphi};\varphi(x),\vec{A}(x)\} \tag{8}$$

将(8)式代入(1)式，配分函数可表示为树图近似Z_0、单圈图近似Z_1和多圈图贡献$\hat{Z}$的乘积。

$$Z=Z_0 Z_1\hat{Z} \tag{9}$$

树图近似为

$$Z_0=exp\{-\int d^3x(\frac{a}{2}\hat{\varphi}^2+\frac{b}{4}\hat{\varphi}^4)\} \tag{10}$$

使用Z_0去计算系统的热力学性质，由热力学公式 $G=-\frac{1}{\beta}\ln Z$计算相应的热力学位

$$G_0=-\frac{1}{\beta}\ln Z_0=\frac{1}{\beta}\int d^3x(\frac{a}{2}\hat{\varphi}^2+\frac{b}{4}\hat{\varphi}^4)=\frac{V}{\beta}(\frac{a}{2}\hat{\varphi}^2+\frac{b}{4}\hat{\varphi}^4) \tag{11}$$

从(11)式可导出著名的Ginzburg-Landau方程，(11)式预言超导体相变是二级连续相变。

单圈近似为

$$Z_1=\int[d\varphi(x)][d\vec{A}(x)]exp\{-\int d^3xd^3y[\frac{1}{2}\varphi_a(x)D_{ab}^{-1}(\hat{\varphi};x,y)\varphi_b(y)+$$

$$+\frac{1}{2}A_i(x)\triangle_{ij}^{-1}(\hat{\varphi};x,y)A_j(y)+\varphi_a(x)M_{aj}(\hat{\varphi};x,y)A_j(y)] \tag{12}$$

其中

$$D_{ab}^{-1}(\hat{\varphi};x,y)\equiv\frac{\delta^2 I\{\Phi,0\}}{\delta\Phi_a(x)\delta\Phi_b(y)}\Bigg|_{\Phi=\hat{\varphi}} \tag{13a}$$

$$\triangle_{ij}^{-1}(\hat{\varphi};x,y)\equiv\frac{\delta^2 I\{\hat{\varphi},\vec{A}\}}{\delta A_i(x)\delta A_j(y)}\Bigg|_{\vec{A}=0} \tag{13b}$$

$$M_{aj}(\hat{\varphi};x,y)\equiv\frac{\delta^2 I\{\Phi,\vec{A}\}}{\delta\Phi_a(x)\delta A_j(y)}\Bigg|_{\substack{\Phi=\hat{\varphi}\\ \vec{A}=0}} \tag{13c}$$

类似文献[4]，将序参量$\varphi_a(x)$及电磁势$A_i(x)$看作一个五分量场，即

$$\Psi(x)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x)\\ \varphi_2(x)\\ A_1(x)\\ A_2(x)\\ A_3(x)\end{pmatrix} \tag{14}$$

又设5×5矩阵

$$\mathscr{D}^{-1}(\hat{\varphi};x,y)=\begin{pmatrix} D_{11}^{-1} & D_{12}^{-1} & M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ D_{21}^{-1} & D_{22}^{-1} & M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{11} & M_{21} & \Delta_{11}^{-1} & \Delta_{12}^{-1} & \Delta_{13}^{-1} \\ M_{12} & M_{22} & \Delta_{21}^{-1} & \Delta_{22}^{-1} & \Delta_{23}^{-1} \\ M_{13} & M_{23} & \Delta_{31}^{-1} & \Delta_{32}^{-1} & \Delta_{33} \end{pmatrix} \tag{15}$$

则配分函数的单圈近似

$$Z_1=\int[d\Psi(x)]exp\left\{-\int d^3xd^3y\frac{1}{2}\Psi_\alpha(x)\mathscr{D}_{\alpha\beta}^{-1}(\hat{\varphi};x,y)\Psi_\beta(y)\right\} \tag{16}$$

当$\mathscr{D}_{\alpha\beta}^{-1}(\hat{\varphi};x,y)=\mathscr{D}_{\alpha\beta}^{-1}(\hat{\varphi};x-y,0)$时，在$k$空间有

$$\int d^3xd^3y\frac{1}{2}\Psi_\alpha(x)\mathscr{D}_{\alpha\beta}^{-1}(\hat{\varphi};x,y)\Psi_\beta(y)=\frac{1}{2}\sum_k\Psi_\alpha(k)\mathscr{D}_{\alpha\beta}^{-1}(\hat{\varphi},k)\Psi_\beta(-k) \tag{17}$$

其中$\mathscr{D}_{\alpha\beta}^{-1}(\hat{\varphi},k)$为$\mathscr{D}_{\alpha\beta}^{-1}(\hat{\varphi},x-y,0)$的福里叶表示。不计及不重要的常系数，有

$$Z_1=\int[d\Psi(k)]exp\left\{-\sum_k\frac{1}{2}\Psi_\alpha(k)\mathscr{D}_{\alpha\beta}^{-1}(\hat{\varphi},k)\Psi_\beta(-k)\right\}$$

$$=\prod_k\left[\mathrm{Det}\mathscr{D}^{-1}(\hat{\varphi},k)\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{18}$$

多圈图贡献$\hat{Z}$决定于(8)式的$\hat{I}\{\hat{\varphi};\varphi(x),\vec{A}(x)\}$,本文不考虑它。

按热力学公式$G=-\frac{1}{\beta}\ln Z$,系统的热力学位

$$G=G_0+G_1+\hat{G} \tag{19}$$

树图近似热力学位G_0如前所述，$\hat{G}$为多圈贡献，单圈图热力学位

$$G_1=-\frac{1}{\beta}\ln Z_1 \tag{20}$$

用(18)式代入，得

$$G_1=\frac{1}{2\beta}\sum_k\ln Det\mathscr{D}^{-1}(\hat{\varphi},k)=\frac{1}{2\beta}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\ln\mathscr{D}^{-1}(\hat{\varphi},k) \tag{21}$$

(三)

使用(6)、(13a)—(13c),计算得

$$D_{11}^{-1}(\hat{\varphi};x,y)=(a+3b\hat{\varphi}_1^2+b\hat{\varphi}_2^2-r\nabla^2)\delta^3(x-y) \tag{22a}$$

$$D_{11}^{-1}(\hat{\varphi},k)=(a+3b\hat{\varphi}_1^2+b\hat{\varphi}_2^2+\gamma k^2) \tag{22b}$$

$$D_{12}^{-1}(\hat{\varphi};x,y)=D_{21}^{-1}(\hat{\varphi};x,y)=2b\hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_2\delta^3(x-y) \tag{23a}$$

$$D_{12}^{-1}(\hat{\varphi},k)=D_{21}^{-1}(\hat{\varphi},k)=2b\hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_2 \tag{23b}$$

$$D_{22}^{-1}(\hat{\varphi};x,y)=(a+3b\hat{\varphi}_2^2+b\hat{\varphi}_1^2-\gamma\nabla^2)\delta^3(x-y) \tag{24a}$$

$$D_{22}^{-1}(\hat{\varphi},k)=a+3b\hat{\varphi}_2^2+b\hat{\varphi}_1^2+\gamma k^2 \tag{24b}$$

$$\triangle_{ij}^{-1}(\hat{\varphi};x,y)=\delta_{ij}(\gamma e_0^2\hat{\varphi}^2-\frac{1}{4\pi}\nabla^2)\delta^3(x-y) \tag{25a}$$

$$\triangle_{ij}^{-1}(\hat{\varphi};k)=\delta_{ij}(\gamma e_0^2\hat{\varphi}^2+\frac{k^2}{4\pi}) \tag{25b}$$

$$M_{1}j(\hat{\varphi};x,y)=-\gamma e_0\hat{\varphi}_2\partial_i\delta^3(x-y) \tag{26a}$$

$$M_{1}j(\hat{\varphi},k)=i\gamma e_0\hat{\varphi}_2k_i \tag{26b}$$

$$M_{2}j(\hat{\varphi};x,y)=\gamma e_0\hat{\varphi}_1\partial_i\delta^3(x-y) \tag{27a}$$

$$M_{2}j(\hat{\varphi},k)=-i\gamma e_0\hat{\varphi}_1k_i \tag{27b}$$

使用这些表达式及$\mathscr{D}^{-1}(\hat{\varphi};x,y)$的定义(15)，可得到$\mathscr{D}^{-1}(\hat{\varphi},k)$的行列式值为

$$\begin{aligned}Det\mathscr{D}^{-1}(\hat{\varphi},k)=&(a+3b\hat{\varphi}^2+\gamma k^2)(\gamma e_0^2\hat{\varphi}^2+\frac{k^2}{4\pi})\cdot\\&\cdot[(a+b\hat{\varphi}^2+\gamma k^2)(\gamma e_0^2\hat{\varphi}^2+\frac{k^2}{4\pi})+\gamma^2e_0^2\hat{\varphi}^2k^2]\end{aligned} \tag{28}$$

在计算得到(28)的过程中，选择了特殊的内部空间坐标架，使

$$\hat{\varphi}=\begin{pmatrix}\hat{\varphi}\\0\end{pmatrix} \tag{29}$$

将(28)式代入(21)式进行积分，在临界温度附近，考虑$\hat{\varphi}^2$是小量，计算得

$$G_1=A\hat{\varphi}^2-\frac{(4\pi\gamma e_0^2)^{\frac{3}{2}}}{4\pi\beta}\hat{\varphi}^3+B\hat{\varphi}^4 \tag{30}$$

其中

$$A=\frac{8\pi}{\beta_0\gamma}(b+4\pi\gamma^2e_0^2)\Lambda-\frac{4\pi^2\sqrt{a}\,b}{\gamma\sqrt{\gamma}\,\beta_0}-\frac{4\pi^3\gamma e_0^2}{\beta_0\sqrt{\gamma}}\sqrt{a} \tag{31a}$$

$$B=\frac{-\pi^2}{4\beta\gamma\sqrt{\gamma a}}[10b^2+8\pi\gamma^2e_0^2b+5(4\pi^2\gamma^2e_0^2)^2] \tag{31b}$$

Λ为动量上限切断，当$\Lambda\to\infty$时，$A\to\infty$。因此，考虑单圈近似的热力学位，对树图近似的热力学位修正表现为三方面。

(1)有限的B引起自耦合作用项$\hat{\varphi}^4$系数的修正；

(2)正比于Λ'的A引起$\hat{\varphi}^2$项系数的重正化，使用众所周知的重正化手续，容易使$\hat{\varphi}^2$项为

$$\frac{1}{2}a' \cdot \frac{T-T_0}{T_0}\hat{\varphi}^2;$$

(3)值得注意的是，出现了 $\hat{\varphi}^3$ 项，并且这项的系数是负的，因而不可避免导致一级相变。

树图近似和单圈近似给出的热力学位，经过重正化之后为

$$G=\frac{1}{2}a'\left(\frac{T-T_0}{T_0}\right)\hat{\varphi}^2-\frac{1}{3}\cdot\frac{3(4\pi\gamma e_0^2)^{\frac{3}{2}}}{4\pi\beta_0}\hat{\varphi}^3+\frac{1}{4}b'\hat{\varphi}^4 \tag{32}$$

若然类似文献〔1〕定义一级相变的"大小"(size)ΔT 作为潜热与平均场理论所预言的比热跃变之比，按照(32)式计算得潜热

$$L=\frac{18\pi a'\gamma^3 e_0^6 T_0^2}{(b')^2} \tag{33}$$

若(32)式没有 $\hat{\varphi}^3$ 项，计算得比热跃变

$$\Delta C_p=\frac{(a')^2}{b'T_0} \tag{34}$$

从而得

$$\Delta T=\frac{18\pi\gamma^3 e_0^6 T_0^3}{a'b} \tag{35}$$

与文献〔1〕的(9)式为同一数量级，对第Ⅰ类超导体，$\Delta T \sim 10^{-6}$K．对第Ⅱ类超导体则更小。

参 考 文 献

〔1〕 B.I. Halperin, T.C. Lubensky and Shang-keng Ma, *Phys. Rev. Lett.*, 32(1974), 292.

〔2〕 Jing-Huei Chen, T.C. Lubensky and D.R. Nelson, *Phys. Rev.*, B17(1978), 4274.

〔3〕 R. Jackiw, *Phys. Rev.*, D9 (1974), 1686.

〔4〕 陈宗蕴、周义昌、黄念宁，物理学报，31(1982), 660.

〔5〕 B.I. Halperin and T.C. Lubensky, *Solid State Commun.*, 14(1974), 997.

One Loop Approximation of the Thermodynamic Potential of Superconductors near the Critical Point

Zhou Yichang *Liu Jinming*

Abstract

The Thermodynamic potential of the superconductions near the critical point is obtained by the steepest-descent method in the one loop diagram approximation, in which the effects of the intrinsic fluctuating electromagnetic potential as well as the fluctuating order parameter are taken into account. The superconducting phase transition is then predicted to be weak first order.