关于非负广义置换矩阵

陈 继 承

（计算机科学系）

§1 定义及记号

我们用$M_n(R)$表示全体n阶实方阵所成之集合。设$A=(a_{ij})\epsilon M_n(R)$，记号$A\geqslant 0$表示$a_{ij}\geqslant 0$，$i,j=1,2,\cdots,n$，即$A$为非负方阵。

定义 1 设$P\epsilon M_n(R)$且P的每一行和每一列都恰好有一个元素为一个正的实数而其余元素全为 0，则称P为一个n阶正的广义置换矩阵。

全体n阶正的广义置换矩阵所成之集合记为$P_n^+(R)$。

类似地可定义一个n阶非负广义置换矩阵并用记号$P_n(R)$表示全体n阶非负广义置换矩阵所成之集合。

设 $P\epsilon P_n^+(R)$，则置换

$$\sigma_P=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \alpha(1) & \cdots & \alpha(n) \end{pmatrix} \tag{1}$$

由P唯一确定，其中$p_{i\alpha(i)}>0$为P中第i行的那个正的元素。称σ_P为由P所确定的置换。

设S_n是一个n元置换群。我们定义一个从$P_n^+(R)$ 到S_n的映射Φ为

$$\Phi: \ P\to\sigma_P \tag{2}$$

设 $P\epsilon R_n^+(R)$且由P所确定的置换σ_P如(1)所示，则我们有时将P写成$P=P_{\alpha(1)\cdots\alpha(n)}$。

§2 主要结果

对于集合$P_n(R)$和$R_n^+(R)$，取定矩阵乘法作为定义在它们当中任一个之上的一个二元运算。

易知有如下的引理成立。

引理 1 $P_n(R)$是一个半群。

引理 2 设$P\epsilon P_n^+(R)$，则P的转置$P^T\epsilon P_n^+(R)$，且在映射Φ之下，$P^T\to(\sigma_P)^{-1}$。

引理 3 设 $P\epsilon P_n^+(R)$，则$D_1=P^TP$与$D_2=PP^T$均为对角矩阵，且D_1、D_2的对角元素均

为正的实数。在映射Φ之下，D_1与D_2的像均为S_n中的恒等置换。

引理 4 $P_n^+(R)$对于矩阵乘法是封闭的。

引理 5 设$P=(p_{ij})\in P_n^+(R)$，则P^{-1}存在且$P^{-1}\in P_n^+(R)$。事实上，P^{-1}的第k列，$k=1,2,\cdots,n$，有且仅有一个非零元素$x_{\alpha(k)k}=(p_{k\alpha(k)})^{-1}>0$。

故有

定理 1 集合$P_n^+(R)$对于矩阵乘法构成一个群。

推论 设T是从$M_n(R)$到$M_n(R)$的一个线性变换。T能将任一n阶非负方阵映射为一个n阶非负方阵并保持它的谱不变的充分必要条件是存在一个$P\in P_n^+(R)$，使对所有的$A\in Mn(R)$，$T(A)$可以表示为

$$T(A)=P^{-1}AP$$

或

$$T(A)=P^{-1}A^TP$$

这个推论将H.Minc在[1]中证明的一个定理（必要条件定理）扩充成为充分必要条件。

设$A\in Mn(R)$且$A\geqslant 0$。若A可逆且$A^{-1}=A$，则称A是能自逆的非负方阵。

如下形状的一阶和二阶方阵称为能自逆的非负方阵的基本子块：

$$(1)\quad,\quad\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad,\quad\begin{pmatrix}0&a\\a^{-1}&0\end{pmatrix}$$

其中实数$a>0$。

定理 2 设$A\in P_n^+(R)$。则A能自逆的充分必要条件是存在n阶置换矩阵P使PAP^T是一些基本子块的直接和。

证明 设$A=(a_{ij})=A_{\alpha(1)\cdots\alpha(n)}\in P_n^+(R)$。易知$A$能自逆的充分必要条件是$a_{i\alpha(i)}=(a_{\alpha(i)i})^{-1}$，$i=1,2,\cdots,n$。

(i) 充分性

设存在n阶置换矩阵P使PAP^T有如下形状

$$PAP^T=\begin{pmatrix}A_{11}&&&\\&A_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&A_{kk}\end{pmatrix}$$

其中A_{ii}，$i=1,2,\cdots,k$是一些基本子块。则PAP^T是能自逆的非负方阵。但PAP^T与A同时能自逆或同时不能自逆。充分性得证。

(ii) 必要性 我们先指出如下事实：设$A\in P_n^+(R)$能自逆。则当n为奇数时，A的对角线上有奇数个非零元素；当n为偶数时，A的对角线上有偶数个（0算作偶数）非零元

素。分别对n为奇数和n为偶数两种情形对n施行数学归纳法可以证明必要性。具体证明从略。

参考文献

〔1〕 H.Minc, Linear Transformations On Nonnegative Matrices, Linear Algebra and Its Applications,9(1974), Winter.

〔2〕 甘特马赫尔，（柯召译），《矩阵论》.

On Generalized Permutation Matrices

Chen Jicheng

Abstract

By examinning the algebraic structure of $P_n(R)$, the set of generalized permutation matrices, we characterize those linear transformations that preserve the nonnegativity and the spectrum of a matrix. We also discuss the properties of those generalized permutation matrices that equal to their inverses.