鲁里叶型非线性控制系统的绝对稳定性

朱思铭

（数学力学系）

摘　　要

本文中§1 对文〔9〕给出的直接控制系统绝对稳定性的不等式条件，取消了 $\beta>0$ 的限制；§2 给出了取 Popov型V函数的间接控制系统的判别准则；§3、§4则将方法应用于讨论Лурье型泛函微分方程的绝对稳定性问题，改正了Somolinos〔10〕的一个错误结果。

Летов[1]、Айзерман和Гантмахер[2]、Lefschetz[3]等曾用Ляпунов函数

$$V=x^{\mathrm{T}}Bx+\beta\int_0^{\sigma}\phi(\sigma)d\sigma, \qquad (B^{\mathrm{T}}=B) \tag{*}$$

研究Лурье型非线性控制系统

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+b\phi(\sigma) & (A\text{稳定})\\ \dot{\xi}=\phi(\sigma), \quad \sigma=c^{\mathrm{T}}x-\gamma\xi\end{cases} \tag{**}$$

的绝对稳定性。

对$\gamma\neq0$的间接控制情形，取$\beta=1$时得到了系统(**)在角$(0,\infty)$绝对稳定的条件是成立不等式

$$\gamma-d^{\mathrm{T}}G^{-1}d-c^{\mathrm{T}}b>0$$

这里 $d=Bb+\frac{1}{2}A^{\mathrm{T}}c$，$A^{\mathrm{T}}B+BA=-G$，$G^{\mathrm{T}}=G>0$

对$\gamma=0$的直接控制情形[4~8]，本文作者曾在文〔9〕中给出了相应的不等式条件，证明了，系统(**)在角$[0,k]$内绝对稳定的条件是成立不等式

$$\frac{1}{k}-c^{\mathrm{T}}G^{-1}d>0$$

$$\frac{1}{c^{\mathrm{T}}G^{-1}c}\left(\frac{1}{k}-c^{\mathrm{T}}G^{-1}d\right)^2-d^{\mathrm{T}}G^{-1}d-\beta c^{\mathrm{T}}b>0$$

这里 $d=Bb+\frac{1}{2}BA^{\mathrm{T}}c$，$A^{\mathrm{T}}B+BA=-G$，$G^{\mathrm{T}}=G>0,\beta>0$。

在文〔9〕中所采用的Ляпунов函数(*)要求$\beta>0$。本文继续文〔9〕的工作进一步取消了$\beta>0$这个限制条件。并讨论取Popov型V函数的间接控制系统的判别准则，取消了

1983年1月收到。本文曾在1980年4月全国第三次微分方程会议上报告过，发表时作了一些删改。

对参数α的要求。最后还将上述方法应用于讨论Лурье型泛函微分方程的绝对稳定性问题，改正了Somolinos[10]的一个错误结果。

§ 1

首先研究$\gamma=0$的直接控制系统(**)，它可以简化为

$$\dot{x}=Ax+b\phi(\sigma),\quad \sigma=c^{T}x \tag{1.1}$$

这里$n\times n$阶矩阵A的特征值均具负实部，$\phi(\sigma)$是σ的实连续函数，$\phi(0)=0$，当$\sigma\neq0$时满足条件

$$0\leqslant\sigma\phi(\sigma)\leqslant k\sigma^{2} \tag{1.2}$$

文〔9〕中证明了：$\beta>0$时，用二次型加积分项的Ляпунов函数

$$V(x)=x^{T}Bx+2\beta\int_{0}^{\sigma}\phi(\sigma)d\sigma,\ (B^{T}=B) \tag{1.3}$$

判别系统(1.1)在角〔0,k〕内绝对稳定的条件是成立不等式

$$\frac{1}{k}-c^{T}G^{-1}d>0 \qquad (a)$$

$$\frac{1}{c^{T}G^{-1}c}\left(\frac{1}{k}-c^{T}G^{-1}d\right)^{2}-d^{T}G^{-1}d-2\beta c^{T}b>0 \qquad (b) \tag{1.4}$$

这里$G^{T}=G>0$且

$$d=Bb+\beta A^{T}c \tag{1.5}$$

$$A^{T}B+BA=-G \tag{1.6}$$

如果取$\phi=k\sigma$则满足条件(1.2)且此时相应的(1.1)变为线性微分方程组。于是系统(1.1)绝对稳定的必要条件是矩阵$(A+kbc^{T})$的特征值均具负实部：

$$(A+kbc^{T})<0 \tag{1.7}$$

可以证明取消$\beta>0$限制的定理：

定理1 存在(1.3)型Ляпунов函数$V(x)$保证直接控制系统(1.1)在角〔0,k〕内绝对稳定的条件是(1.7)成立且存在定正对称矩阵G及实数β满足不等式(1.4)。

证 在文〔9〕中已对$\beta>0$的情形在不必假设条件(1.7)成立的情况下作了证明。当$\beta\leqslant0$时在〔9〕中证明$\dot{V}$定负的结论仍成立，只是必须补充证明V是无限大定正函数。

取$\phi=k\sigma$ 则(1.3)变为

$$V(x)=x^{T}(B+2\beta kcc^{T})x \tag{1.8}$$

而相应的(1.1)变为线性微分方程组

$$\dot{x}=(A+kbc^{T})x \tag{1.9}$$

因为$\dot{V}$定负，因此$V(x)$必须定正，否则与由于(1.7)成立因而(1.9)的零解渐近稳定相矛盾。于是矩阵$B+2\beta kcc^{T}$是定正的。

对于系统(1.1)，当$\beta\leqslant0$时，(1.3)可改写为

$$V(x)=x^{T}(B+2\beta kcc^{T})x-2\beta\int_{0}^{\sigma}(k\sigma-\phi(\sigma))d\sigma$$

因为$\beta\leqslant 0$及条件(1.2)有

$$-2\beta\int_0^\sigma (k\sigma-\phi(\sigma))d\sigma\geqslant 0$$

而$B+2\beta kcc^T$是定正矩阵，因此，$V(x)$是无限大定正函数。定理得证。

对不等式(1.4)还可以进一步进行分析，以确定β的存在条件，从而仅需确定定正对称矩阵G即可判断系统(1.1)的绝对稳定性。

对条件(1.4a)，将(1.5)式代入得

$$\beta c^TG^{-1}A^Tc<\frac{1}{k}-c^TG^{-1}Bb \tag{1.20}$$

于是

$$\beta\begin{cases}<(\frac{1}{k}-c^TG^{-1}Bb)/(c^TG^{-1}A^Tc) & \text{当}c^TG^{-1}A^Tc>0\text{时}\\ >(\frac{1}{k}-c^TG^{-1}Bb)/(c^TG^{-1}A^Tc) & \text{当}c^TG^{-1}A^Tc<0\text{时}\end{cases} \qquad (1.20)_*$$

对条件(1.4b)，将(1.5)式代入后可以化为

$$N\beta^2-2M\beta+F>0 \tag{1.21}$$

这里记

$$N=(c^TG^{-1}A^Tc)^2-c^TG^{-1}c\cdot c^TAG^{-1}A^Tc \qquad (a)$$

$$M=c^Tb\cdot c^TG^{-1}c+c^TG^{-1}A^Tc\ (\frac{1}{k}-c^TG^{-1}Bb)+c^TG^{-1}c\cdot c^TAG^{-1}Bb \qquad (b) \qquad (1.22)$$

$$F=(\frac{1}{k}-c^TG^{-1}Bb)^2-c^TG^{-1}c\cdot c^TBG^{-1}A^Tc \qquad (c)$$

由(1.21)可以确定β的存在范围是

$N>0,M^2<NF$时　β可取任意值；　(a)

$N>0$，$M^2=NF$时　β可取除M/N外的任意值；　(b)

$N>0,M^2>NF$时　β可取满足下列不等式的任意值：

$$\beta>\frac{1}{N}\left(M+\sqrt{M^2-NF}\right)\text{或}\beta<\frac{1}{N}\left(M-\sqrt{M^2-NF}\right); \qquad (c) \qquad (1.21)_*$$

$N<0$，$M^2>NF$时　β可取满足下列不等式的任意值：

$$\frac{1}{N}\left(M-\sqrt{M^2-NF}\right)<\beta<\frac{1}{N}\left(M+\sqrt{M^2-NF}\right). \qquad (d)$$

于是定理1可改写为

定理1* 存在(1.3)型Ляпунов 函数$V(x)$保证直接控制系统(1.1)在角[0,k]内绝对稳定的条件是(1.7)成立且存在定正对称矩阵G使满足不等式(1.20)和(1.21)的β区间有交集。其共同区间中的任β值均能使(1.3)为Ляпунов函数。

注　亦可以通过证明不要求$\beta>0$限制的不等式(1.4)与Popov频率条件[2]的等价性来证明定理1。

对于控制系统(1.1)在角[0,k)及角[0，∞)内的绝对稳定性，亦可得到取消$\beta>0$限制的类似的结论。

§ 2

考虑间接控制系统（**），$\gamma\neq 0$。它等价于系统

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+b\phi(\sigma)\\ \dot{\sigma}=c^TAx-\rho\,\phi\,(\sigma),\ \rho=\gamma-c^Tb\end{cases}\tag{2.1}$$

假设$n\times n$阶矩阵A的特征值均具负实部，$\phi(\sigma)$是σ的实连续函数且满足条件

$$\phi(0)=0;\quad 0<\sigma\phi(\sigma)\leqslant k\sigma^2\quad(\sigma\neq 0)\tag{2.2a}$$

$$\lim_{|\sigma|\to\infty}\int_0^{\sigma}\phi(\sigma)d\sigma=\infty\tag{2.2b}$$

并设$\gamma>0$（这是系统（2.1）绝对稳定的必要条件）

取Popov型Ляпунов函数

$$V(x,\sigma)=x^T B\,x+\alpha(\sigma-c^Tx)^2+2\,\beta\int_0^{\sigma}\phi(\sigma)d\sigma\tag{2.3}$$

则有

定理2 对间接控制系统（2.1），如果存在正定对称矩阵G和实数$\beta>0$，则当$2\beta\rho>d^TG^{-1}d$时系统（2.1）是在角（0，∞）内绝对稳定的；当$2\beta\rho\leqslant d^TG^{-1}d$且满足条件

$$\frac{1}{k}-c^TG^{-1}d>0\tag{2.4a}$$

$$\frac{1}{c^TG^{-1}c}\left(\frac{1}{k}-c^TG^{-1}d\right)^2-d^TG^{-1}d+\rho>0\tag{2.4b}$$

时系统（2.1）是在角（0，k）内绝对稳定的。

这里对称矩阵B和向量d由下列关系式确定

$$A^TB+BA=-G\tag{2.5}$$

$$d=Bb+\beta A^Tc\tag{2.6}$$

证 由定理条件，当G是正定对称矩阵时G^{-1}也是正定对称的。于是当$\alpha>0$．$\beta>0$．ϕ满足（2.2）时V函数（2.3）是无限大定正函数。

考虑V通过（2.1）的全导数

$$\begin{aligned}\dot{V}(x,\sigma)&=-x^TGx+2(d+\alpha\gamma c)^Tx\phi-2\left(\beta\rho+\frac{1}{k}\alpha\gamma\right)\phi^2-2\alpha\gamma\left(\sigma-\frac{1}{k}\phi\right)\phi\\&=-[x-G^{-1}(d+\alpha\gamma c)\phi]^TG[x-G^{-1}(d+\alpha\gamma c)\phi]-[2\left(\beta\rho+\frac{1}{k}\alpha\gamma\right)\\&\quad-(d+\alpha\gamma c)^TG^{-1}(d+\alpha\gamma c)]\phi^2-2\alpha\gamma\left(\sigma-\frac{1}{k}\phi\right)\phi\end{aligned}\tag{2.7}$$

这里的d如（2.6）所示。

由条件（2.2），当$\sigma=0$时$\phi(0)=0$即$\left(\sigma-\frac{1}{k}\phi\right)\phi=0$。当$\sigma\neq 0$时则有

$$\left(\sigma-\frac{1}{k}\phi\right)\phi=\frac{1}{k\sigma^2}(k\sigma^2-\sigma\phi)\sigma\phi\geqslant 0\tag{2.8}$$

所以由式（2.7）知道当$\alpha \geqslant 0$时$\dot{V}$定负的条件是

$$2\left(\beta\rho+\frac{1}{k}\alpha\gamma\right)>(d+\alpha\gamma c)^{T}G^{-1}(d+\alpha\gamma c) \tag{2.9}$$

它可以化为

$$\alpha^{2}\gamma^{2}c^{T}G^{-1}c-2\alpha\gamma\left(\frac{1}{k}-c^{T}G^{-1}d\right)+d^{T}G^{-1}d-2\beta\rho<0 \tag{2.10}$$

这不等式左端是α的二次多项式。其α^2的系数$\gamma^2 c^T G^{-1}c>0$.如果记

$$h=\left(\frac{1}{k}-c^{T}G^{-1}d\right)^{2}-c^{T}G^{-1}c\cdot(d^{T}G^{-1}d-2\beta\rho) \tag{2.11}$$

则当$h\leqslant 0$时，不等式(2.10)左端的α的二次多项式是不变号的。取$\alpha=0$，由(2.10)式推得$d^T G^{-1} d<2\beta\rho$.而由$h\leqslant 0$有

$$c^{T}G^{-1}c\cdot(d^{T}G^{-1}d-2\beta\rho)\geqslant\left(\frac{1}{k}-c^{T}G^{-1}d\right)^{2}\geqslant 0$$

推得$d^T G^{-1} d\geqslant 2\beta\rho$，和前面的结果互相矛盾.所以不能同时有$h\leqslant 0$且式(2.10)又成立.

现在只要考虑$h>0$的情形，此时只要α取值于

$$\frac{1}{\gamma c^{T}G^{-1}c}\left(\frac{1}{k}-c^{T}G^{-1}d-\sqrt{h}\right)<\alpha<\frac{1}{\gamma c^{T}G^{-1}c}\left(\frac{1}{k}-c^{T}G^{-1}d+\sqrt{h}\right) \tag{2.12}$$

不等式（2.10）必成立。由（2.11）式，$h>0$时可化为

$$\frac{1}{c^{T}G^{-1}c}\left(\frac{1}{k}-c^{T}G^{-1}d\right)^{2}-d^{T}G^{-1}d+2\beta\rho>0 \tag{2.13}$$

我们还要保证求得的满足不等式（2.10）的$\alpha\geqslant 0$，如果$2\beta\rho>d^T G^{-1} d$则(2.13)式必然成立，且由（2.11）式有

$$h>\left(\frac{1}{k}-c^{T}G^{-1}d\right)^{2} \tag{2.14}$$

此时满足不等式（2.12）且$\alpha\geqslant 0$必存在，其取值范围为

$$0\leqslant\alpha<\frac{1}{\gamma c^{T}G^{-1}c}\left(\frac{1}{k}-c^{T}G^{-1}d+\sqrt{h}\right)$$

由于条件$2\beta\rho>d^T G^{-1} d$与k无关，所以系统（2.1）是在角（0，∞）内绝对稳定的。

如果$2\beta\rho\leqslant d^T G^{-1} d$，则由于不等式（2.14）不成立，除要求满足条件（2.13）即（2.4b）外，还要求满足（2.12）式的α中存在$\alpha\geqslant 0$的值，此时由α的二次不等式(2.10)及式（2.11）、（2.13）、（2.12）知必须补充条件

$$\frac{1}{k}-c^{T}G^{-1}d>0$$

这即为条件(2.4a)。这时的条件与k有关。故系统（2.1）是在角（0,k）内绝对稳定的。定理证毕。

注　我们还可以象§1中那样，将式（2.6）中的$d=Bb+\beta A^T c$代入式（2.4）中化为二个关于β的二次多项式的不等式，进而求得与定理1*相类似的结论。这样，可以将定理2中的待定的参数β取消，并确定β的取值范围。

§ 3

现在考虑Somolinos[10]讨论过的Лурье型泛函方程的绝对稳定性问题*.

首先讨论直接控制系统

$$\dot{x}=g(t,\ x_t)+b\phi(\sigma),\quad \sigma=c^T x \tag{3.1}$$

的绝对稳定性。这里x，b，c是n维向量；$g(t,\phi)$是定义于$t\geqslant 0$，$\phi\in C_n[-r,0]$的n维连续向量；$g(t,\ 0)=0$、

$$|g(t,\ \phi_1)-g(t,\ \phi_2)|\leqslant L\|\phi_1-\phi_2\| \tag{3.2}$$

这里$|\phi|$表ϕ的模，例如$\phi=\sqrt{\sum\phi_i^2}$．而$\|\phi\|=\sup\limits_{\phi\in C_n[-r,0]}|\phi|$；$x_t\equiv x(t+\theta),\ -r\leqslant\theta\leqslant 0$；

$\phi(\sigma)$是纯量连续函数

$$\phi(0)=0;\quad 0\leqslant\phi(\sigma)\sigma\leqslant k\sigma^2\quad(\sigma\neq 0) \tag{3.3}$$

假设非线性泛函方程

$$\dot{x}(t)=g(t,x_t) \tag{3.4}$$

的解$x(t,\ t_0,\ \phi)$满足

$$|x(t,\ t_0,\ \phi)|\leqslant De^{-\alpha(t-t_0)}\|\phi\| \tag{3.5}$$

由Hale引理[12]知道对任实数$q(0<q<1)$存在连续泛函$V(t,\phi)$满足下列条件

$$\|\phi\|\leqslant V(t,\phi)\leqslant D\|\phi\| \tag{3.6a}$$

$$|V(t,\phi_1)-V(t,\phi_2)|\leqslant M\|\phi_1-\phi_2\| \tag{3.6b}$$

$$\dot{V}(t,\phi)\leqslant-\gamma^2 V(t,\phi),\quad(\gamma>0) \tag{3.6c}$$

这里$\gamma^2=(1-q)\alpha$，$M=D^{[1+(1-q)\alpha]/(q\alpha)}$

定理3 对于控制系统（3,1）假设条件（3.2）～（3.6）成立，如果存在实数β满足条件

$$k|c|(M|b|+|\beta|L|c|)<\gamma \tag{3.7a}$$

$$2k|c|[M|b|+|c|(|\beta|L+\beta c^T b)]<\gamma \tag{3.7b}$$

且当$\beta<0$时有$1+\beta k|c|^2>0$。那么直接控制系统（2.1）在角[0，k]上是绝对稳定的。

证 如果对系统（3.1）取泛函

$$U(t,\ \phi)=\frac{1}{2}V^2(t,\phi)+\beta\int_0^\sigma\phi(\sigma)d\sigma \tag{3.8}$$

则由条件（3.3）有

$$0\leqslant\int_0^\sigma\phi(\sigma)\,d\sigma\leqslant\frac{1}{2}k\sigma^2$$

于是利用式（3.6a），（3.8）式可化为

$$\left[\frac{1}{2}+(1-\mathrm{sgn}\beta)\frac{1}{4}\beta k|c|^2\right]\|\phi\|^2\leqslant U(t,\phi)$$

$$\leqslant\left[\frac{D}{2}-(1-\mathrm{sgn}\beta)\frac{1}{4}\beta k|c|^2\right]\|\phi\|^2 \tag{3.9}$$

---

* 赵素霞、仵永光曾指出文[10]中关于直接控制系统的定理2的条件(ii)是不能实现的.

由定理条件知$U(t,\phi)$是ϕ的无限大定正泛函。

另一方面，泛函$U(t,\phi)$通过系统(3.1)的全导数在条件(3.2)、(3.6)之下有估值

$$\dot{U}(t,x_t)\leqslant-\gamma^2V^2+(M|b|+L|\beta||c|)V|\phi(\sigma)|+\beta c^Tb\phi^2(\sigma) \tag{3.10}$$

选某正常数τ，且记

$$N=(M|b|+L|\beta||c|+\tau|c|)/(2\gamma) \tag{3.11}$$

则式(3.10)可化为

$$\dot{U}(t,x_t)\leqslant-[\gamma V-N|\phi(\sigma)|]^2+\left[N^2-\left(\frac{\tau}{k}-\beta c^Tb\right)\right]|\phi(\sigma)|^2+\tau\left[\frac{1}{k}\phi(\sigma)-\sigma\right]\phi(\sigma) \tag{3.12}$$

显然，当$\phi=0$时上式变为

$$\dot{U}(t,x_t)\leqslant-\gamma^2V^2(t,x_t)\leqslant-\gamma^2\|x_t\|^2$$

而当$\phi\neq0$时因条件(3.3)，有

$$\left[\frac{1}{k}\phi-\sigma\right]\phi=\phi^2\left[\frac{1}{k}-\frac{\sigma}{\phi}\right]\leqslant0$$

所以只要满足条件

$$N^2<\frac{\tau}{k}-\beta c^Tb \tag{3.13}$$

则由式(3.12)得$\dot{U}(t,\phi)$是ϕ的定负泛函。

为了确定满足上式(3.13)的条件，把式(3.11)代入(3.13)可化简得

$$|c|^2\left[\tau^2+2\left(\frac{M|b|}{|c|}-\frac{\gamma}{k|c|^2}+|\beta|L\right)\tau+\left(\frac{M|b|}{|c|}+|\beta|L\right)^2+2\gamma\beta\frac{c^Tb}{|c|^2}\right]<0$$

如令

$$\lambda=\frac{M|b|}{|c|}-\frac{\gamma}{k|c|^2}+|\beta|L,\quad p=\left(\frac{M|b|}{|c|}+|\beta|L\right)^2-2\gamma\beta\frac{c^Tb}{|c|^2} \tag{3.14}$$

则上不等式可化为

$$|c|^2[\tau^2+2\lambda\tau+p]=|c|^2[\tau+\lambda-\sqrt{\lambda^2-p}][\tau+\lambda+\sqrt{\lambda^2-p}]<0$$

显然，当$\lambda<0$，$\lambda^2>p$时满足以上不等式的τ可取值为

$$0<-\lambda-\sqrt{\lambda^2-p}<\tau<-\lambda+\sqrt{\lambda^2-p} \tag{3.15}$$

由$\lambda<0$便得

$$kL|\beta||c|^2<\gamma-kM|b||c|$$

此即为条件(3.7a)。而由$\lambda^2>p$则有

$$-2\left(\frac{M|b|}{|c|}+|\beta|L\right)\frac{\gamma}{k|c|^2}+\frac{\gamma^2}{k^2|c|^4}>-2\gamma\beta\frac{c^Tb}{|c|^2}$$

化简之便得到条件(3.7b)。

这样便证明了当满足条件(3.7)时$\dot{U}(t,\phi)$是定负泛函，而由不等式(3.9)，$U(t,\phi)$是定正泛函，具无限小上界和无限大下界。故系统(3.1)的零解是全局渐近稳定的，即

系统(3.1)在角〔0,k〕上绝对稳定。定理得证。

注 文〔10〕中定理2(i)的条件由本文的记号为

$$k<\gamma^2/(M|b||c|)$$

与本定理3的条件互不包含。

§ 4

现在讨论直接控制系统

$$\dot{x}=f(t,\mu,x_t)+b\phi(\sigma),\qquad \sigma=c^Tx \tag{4.1}$$

其中t是纯量，μ是实变参数$\mu=\mu(t)\in R$，$f(t,\mu,\phi)$在域$t\geqslant 0$，$\mu\in R,\phi\in C_n[-r,0]$上连续，对$\phi$是线性的，且对$t\geqslant 0,\mu、\mu_1、\mu_2\in R$，$\phi、\phi_1、\phi_2\in C_n[-r,0]$存在二连续函数$L(\mu)$和$L_*(\mu_1,\ \mu_2)$满足条件

$$|f(t,\mu,\phi_1)-f(t,\mu_1\phi_2)|\leqslant L(\mu)\|\phi_1-\phi_2\| \tag{4.2}$$

$$|f(t,\mu_1,\phi)-f(t,\mu_2,\phi)|\leqslant L_*(\mu_1,\mu_2)|\mu_1-\mu_2|\cdot\|\phi\|$$

纯量连续函数$\phi(\sigma)$满足条件

$$\phi(0)=0;\ 0\leqslant\phi(\sigma)\sigma\leqslant k\sigma^2\qquad(\sigma\neq 0) \tag{4.3}$$

对线性泛函方程

$$\dot{x}=f(t,\mu,x_t) \tag{4.4}$$

这里μ作为实变参数，假设解$x(t,t_0,\mu,\phi)$满足条件

$$|x(t,t_0,\mu,\phi)|\leqslant D(\mu)\|\phi\|\exp\{-\alpha(\mu)(t-t_0)\} \tag{4.5}$$

其中$D(\mu),\alpha(\mu)$是$\mu\in R$的连续函数。

由Hale引理[13]，对任连续函数$q(\mu)<\alpha(\mu)$，($\mu\in R$)存在泛函$V(t,\mu,\phi)$在域$t\geqslant 0$，$\mu\in R,\phi\in C_n[-r,0]$上连续且满足条件

$$\|\phi\|\leqslant V(t,\mu,\phi)\leqslant D(\mu)\|\phi\| \tag{4.6a}$$

$$|V(t,\mu,\phi_1)-V(t,\mu,\phi_2)|\leqslant M(\mu)\|\phi_1-\phi_2\| \tag{4.6b}$$

$$\dot{V}(t,\mu,\phi)\leqslant-\gamma(\mu)V(t,\mu,\phi),\ \gamma(\mu)=\alpha(\mu)-q(\mu) \tag{4.6c}$$

此外，如$q(\mu)>0$且$\alpha(\mu)$和$q(\mu)$对μ满足Lipschitz条件，那么存在连续函数$\varepsilon_0(\mu)$和$\eta(\varepsilon,\mu,\omega)(0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0(\mu),\|\mu-\omega\|\leqslant\varepsilon)$使

$$\eta(0,\mu,\mu)=\frac{D(\mu)-1}{q(\mu)}L_*(\mu,\mu)+\frac{\ln D(\mu)}{q(\mu)}\varlimsup_{w\to\mu}\frac{|\gamma(\mu)-\gamma(w)|}{|\mu-w|} \tag{4.7}$$

且对$t\geqslant 0$，$|\mu_1-\mu_2|\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0(\mu)$，$\phi\in C_n[-r,0]$有

$$|V(t,\mu_1,\phi)-V(t,\mu_2,\phi)|\leqslant\eta(\varepsilon,\mu_1,\mu_2)V(t,\mu,\phi)|\mu_1-\mu_2| \tag{4.8}$$

定理4 对于控制系统(4.1)假设条件(4.2)～(4.7)成立，如果存在常数β满足下列条件

$$\begin{aligned}&k|c|(M(\mu)|b|+L(\mu)|\beta||c|)<\gamma_*\\&2k|c|[M(\mu)|b|+|c|(L(\mu)|\beta|+\beta c^Tb)]<\gamma_*\end{aligned} \tag{4.9}$$

这里$\gamma_*=\gamma(\mu)-\eta(0,\mu,\mu)|\dot{\mu}(t)|$。且当$\beta<0$时有$1+\beta k|c|^2>0$。那么系统(4.1)

在角$[0,k]$上是绝对稳定的。

证　用ϕ和V构造泛函U

$$U(t,\mu,\phi)=\frac{1}{2}V^2(t,\mu,\phi)+\beta\int_0^{\sigma}\phi(\sigma)d\sigma \tag{4.10}$$

则由条件(4.3)、(4.6a)可以估计U：

$$\left[\frac{1}{2}-(1-\mathrm{sgn}\beta)\frac{1}{4}\beta|c|^2\right]\|\phi\|\leqslant U(t,\mu,\phi)\leqslant\left[\frac{D}{2}+(1-\mathrm{sgn}\beta)\frac{1}{4}\beta|c|^2\right]\|\phi\| \tag{4.11}$$

在定理条件下，$U(t,\mu,\phi)$是ϕ的定正泛函，且具无限小上界和无限大下界。

而泛函U通过系统(4.1)的全导数可化为

$$\begin{aligned}\dot{U}(t,\mu,x_t)&\leqslant-\gamma(\mu)V^2+M(\mu)|b|V|\phi(\sigma)|+\eta(0,\mu,\mu)|\dot{\mu}(t)|V^2\\&\quad+L(\mu)|\beta||c|V|\phi(\sigma)|+\beta c^Tb\phi^2(\sigma)\\&\leqslant-\gamma_*(\mu)V^2+[M(\mu)|b|+L(\mu)|\beta||c|]V|\phi(\sigma)|+\beta c^Tb\phi(\sigma)\end{aligned} \tag{4.12}$$

这里$\gamma_*=\gamma(\mu)+\eta(0,\mu,\mu)|\dot{\mu}(t)|$

此(4.12)式和§3式(3.10)形式相同．和定理3的(3.10)式后面的证明完全一样处理，可以证明在定理4的条件下，$\dot{U}(t,\mu,\phi)$是定负的，即系统(4.1)在角$[0,k]$上是绝对稳定的。定理证毕。

定理5　对于控制系统(4.1)假设条件(4.2)～(4.7)成立，且系统(4.4)的解满足的条件(4.5)中有$D(\mu)\equiv1$．则系统(4.1)在角$[0,k]$上绝对稳定的条件是存在实数β满足下列条件

$$\begin{aligned}&k|c|(M(\mu)|b|+L(\mu)|\beta||c|)<\alpha(\mu)\\&2k|c|[M(\mu)|b|+|c|(L(\mu)|\beta|+\beta c^Tb)]<\alpha(\mu)\end{aligned} \tag{4.13}$$

且当$\beta<0$时有$1+\beta k|c|^2>0$

证　事实上，在定理条件下，由于$D(\mu)\equiv1$，于是(4.7)式表示的$\eta(0,\mu,\mu)=0$，如果选$q(\mu)=0$，则$\gamma(\mu)=\alpha(\mu)$。条件(4.13)满足定理4的条件(4.9)。由定理4，系统(4.1)在角$[0,k]$上绝对稳定。

显然，由定理5我们有

推论　当所考虑的控制系统(4.1)和(4.4)中的参数μ改为变量σ，即取$\mu=\sigma$时，定理5仍成立，只要将所出现的μ均改为σ即可。

注　不难验证。文[10]定理4的条件(ii)和定理2的条件(ii)一样，是不能实现的。文[10]定理4的条件(i)与本文定理5的推论的条件互不包含。

参 考 文 献

[1] Летов, А. М., Устойчивость Нелинейных Регулируемых Систем, Гостехиздат, М., 1955.
中译本：А. М. Летов著，李惠译，非线性调节系统的稳定性，科学出版社，1959.

〔2〕Айзерман, М. А., Гантмахер ф. р., Абсолютная Устойчивость Нелинейных Регулируемых Систем, Изд-во АН СССР, М., 1963.

〔3〕Lefschetz, S., *Stability of Nonlinear Control Systems*, Academic Press, New York, 1965.

〔4〕Lefschetz, S., *Contrib. Diff. Eq.*, vol. 1, 1960, 1—28.

〔5〕Reissig, R., Sansone, G., Conti R., *Nichtlineare Differential gleichungen Höherer Ordnung*, Edizioni Cremonese, Roma, 1969; *Non-linear Differential Equations of Higher Order*, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1974.

〔6〕Розонвассер, Е. Н., ПММ, т.XXⅣ, вып. 4, 1960.

〔7〕Moyer K, R., *Contrib. Diff. Ep.*, 3(1964), 435-437.

〔8〕赵素霞，数学学报 22(1979),№4, 404-419.

〔9〕朱思铭，中山大学学报(自然科学版)，1979,3.

〔10〕Somolinos, A. J., *Differential Equations*, 26(1977),2, 190-199.

〔11〕Якубович, В. А., ДАН СССР,т.143, №6(1962), 1304-1307.

〔12〕Hale, J. K., *Proc. International Sysmposlum for Non-linear Oscillations*, vol. Ⅰ, 1963,409—426.

〔13〕Hale, J. K., *Contrib. Diff. Eq.*, 1(1962), 401—410.

On the Absolute Stability of Nonlinear Control System of Lurie Type

Zhu Siming

Abstract

In this paper we first consider the nonlinear direct control system of Lurie type

$$\dot{x} = Ax + b\phi(\sigma), \quad \sigma = c^{\mathrm{T}}x, \qquad (A \text{ stable})$$
$$0 \leqslant \phi(\sigma)\sigma \leqslant k\sigma^2 \tag{1}$$

by using the Liapunov function

$$V(x) = x^{\mathrm{T}}Bx + 2\beta\int_0^{\sigma}\phi(\sigma)d\sigma \qquad (B^{\mathrm{T}} = B > 0).$$

This paper is a succession of the works in 〔9〕.

The result here differs from 〔9〕 lies in not requiring $\beta > 0$.

Futher, we discuss the absolute stability of indirect control system and Lurie type functional equations

$$\dot{x} = g(t, x_t) + b\phi(\sigma), \qquad \sigma = c^{\mathrm{T}}x$$

and

$$\dot{x} = f(t, \mu, x_t) + b\phi(\sigma), \qquad \sigma = c^{\mathrm{T}}x. \tag{2}$$

The corresponding inequality conditions of absolute stability are obtained. Therefore the result on systems (2) given by Somolinos 〔10〕 is corrected.