Orlicz 空间的端点

劳炳元　朱熹平

（数学力学系）

摘　要

本文研究Orlicz空间的端点问题，给出了Orlicz空间（L_M^*，$\|\cdot\|_{(M)}$）及（L_M^*，$\|\cdot\|_M$）的闭单位球中的某一点是端点的充要条件．从而导出了吴从炘给出的（L_M^*，$\|\cdot\|_{(M)}$）是严格凸的充要条件．且指出（L_M^*，$\|\cdot\|_{(M)}$）中的闭单位球必存在端点．

本文中采用文〔2〕的符号及定义。

定义 1　设X是实线性空间，K是X中的集合，称$x_0 \in K$是K的端点，如果存在$x_1, x_2 \in K$，$0<\lambda<1$，使

$$x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 ,$$

则有$x_1 = x_2$。

一个线性赋范空间是严格凸的充要条件是其闭单位球的每个边界点都是端点[3]。

定义 2　设$M=M(u)$是N函数，$u_0 \in R_1$，如果对$\forall v$，$w \in R_1$，有

$$u_0 = \frac{1}{2}(v+w),\ M(u_0) = \frac{1}{2}M(v) + \frac{1}{2}M(w) \Longrightarrow v = w.$$

则称u_0为M的严格凸点。记M的全体严格凸点所成的集为S_M。

引理 1　S_M是闭集。

证　设$u_n \in S_M (n=1,2,\cdots)$，$u_n \to u_0 \in R_1$，假设$u_0 \notin S_M$，由定义2，$\exists v_0$，$w_0 \in R_1$，使$v_0 \neq w_0$，$u_0 = \frac{1}{2}(v_0+w_0)$，　$M(u_0) = \frac{1}{2}M(v_0) + \frac{1}{2}M(w_0)$。

从而　$M(\alpha v_0 + (1-\alpha)w_0) = \alpha M(v_0) + (1-\alpha)M(w_0)$，其中$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$。　(1)

取　$u_n \in (v_0, w_0)$（这里无妨设$v_0 < w_0$，于是$v_0 < u_0 < w_0$）。

于是　$\exists \alpha_0 \in (0,1)$，使$u_n = \alpha_0 v_0 + (1-\alpha_0)w_0$。　(2)

取$h>0$，使$0<\alpha_0 - h < \alpha_0 + h < 1$．并记

$$u' = (\alpha_0 - h)v_0 + (1-(\alpha_0 - h))w_0, \qquad u'' = (\alpha_0 + h)v_0 + (1-(\alpha_0+h))w_0,$$

则　$u_n = \frac{1}{2}(u'+u'')$，$u' \neq u''$，又由(1)，(2)式易得　$M(u_n) = \frac{1}{2}M(u') + \frac{1}{2}M(u'')$，

本文1982年5月收到．本研究工作在刘良深副教授的指导下完成，并得到吴从炘教授的关怀与审阅．

这与$u_n \in S_M$矛盾。证毕

引理2　设(a,b)是$S^c{}_M$的构成区间，则M在(a,b)上为直线段。

证　任取$[\alpha,\beta]\subset(a,b)$，对$\forall x\in[\alpha,\beta]$，$\exists(\alpha_x,\beta_x)\subset(a,b)$，$x\in(\alpha_x,\beta_x)$，使$M$在$(\alpha_x,\beta_x)$上为直线段。事实上，$\exists\alpha_x<\beta_x$，$x=\frac{1}{2}(\alpha_x+\beta_x)$，且

$$M\left(\frac{1}{2}(\alpha_x+\beta_x)\right)=\frac{1}{2}M(\alpha_x)+\frac{1}{2}M(\beta_x),$$

则对任一$\alpha\in[0,1]$，依[2]知下式成立：

$$M(\alpha\alpha_x+(1-\alpha)\beta_x)=\alpha M(\alpha_x)+(1-\alpha)M(\beta_x).$$

即M在(α_x,β_x)上为直线段。

依有限覆盖定理及(a,b)是$S^c{}_M$的子集知，M在$[\alpha,\beta]$上为直线段。所以知M在(a,b)上是直线段。证毕

引理3　设$M(u)$为N函数，任给$u_0>0$，必有$u_1>u_0$，使u_1是M的严格凸点。

证　用反证法，如果所有的$u_1>u_0$都不是严格凸点，即是$(u_0,\infty)\subset S^c{}_M$。依引理2知$M$在$(u_0,\infty)$上为直线段，

则　$\lim\limits_{u\to\mp\infty}\frac{M(u)}{u}$为有限常数与$M$为$N$函数矛盾。证毕

引理4　设$u\in L_M$，如$G(\overline{u\in S_M})$不是零集，则$\exists v$，$w\in L_M$，使$u=\frac{1}{2}(u+w)$，$M(u)=\frac{1}{2}M(v)+\frac{1}{2}M(w)$，$G(v\neq w)$不是零集，且

$$\rho(v;M)=\rho(w;M)=\rho(u;M).$$

证　作函数v_1如下：$\forall t\in G$，i) $u(t)\in S_M$，取$v_1=u(t)$。

ii) $u(t)\in S^c{}_M$，则由引理1知$S^c{}_M$是开集，存在它的构成区间(a,b)使$u(t)\in(a,b)$，由引理3知a和b都是有限的。取

$$v_1(t)=\begin{cases}a+\frac{3}{4}[u(t)-a] & \text{如}u(t)\leqslant\frac{1}{2}(a+b);\\ u(t)-\frac{1}{4}[b-u(t)] & \text{如}u(t)>\frac{1}{2}(a+b).\end{cases}$$

现证v_1是可测的。因为对$S^c{}_M$的任一构成区间(a,b)，有

$$G(a<u<b)=G(a<v_1<b),$$

及对任一$c\in S_M$有　$G(u=c)=G(v_1=c)$，所以对于$c\in S_M$有　$G(v_1\leqslant c)=G(u\leqslant c)$。

对于$c\in S^c{}_M$，设$c\in(a,b)$，其中(a,b)是$S^c{}_M$的某个构成区间，有

$$G(v_1\leqslant c)=G\left(u\leqslant\min\left\{\frac{1}{2}(a+b),a+\frac{3}{4}(c-a)\right\}\right)\cup G\left(\frac{1}{2}(a+b)<u\leqslant\frac{4c+b}{5}\right).$$

故v_1确是可测的。

令　$w_1=2u-v_1$，则$v_1\leqslant u\leqslant w_1$，且当$u(t)\in(a,b)$（为$S^c{}_M$的某个构成区间）时，$v_1(t)$，$w_1(t)\in(a,b)$。又取函数$v'$，$w'$如下：对$\forall t\in G$

$$v'(t)=\begin{cases}v_1(t) & \text{当}u(t)\geqslant 0;\\ w_1(t) & \text{当}u(t)<0.\end{cases}$$

$$w'(t)=2u(t)-v'(t).$$

则 $|v'|\leqslant|u|\leqslant|w'|\Rightarrow v'\in L_M,\ w'\in L_M$.

依引理2知 v'，w' 具有如下性质：

$$G(u\in S_M^c)=G(v'\neq w'),$$

$$M(u)=M\left[\frac{1}{2}v'+\frac{1}{2}w'\right]=\frac{1}{2}M(v')+\frac{1}{2}M(w').$$

取 G_1，$G_2\subset G(u\overline{\in}S_M)$，使 $m(G_1)>0$，$m(G_2)>0$，$G_1\cap G_2=\phi$，且

$$\int_{G_1}[M(w')-M(v')]dt=\int_{G_2}[M(w')-M(v')]dt.$$

则

$$\int_{G_1}M(w')dt+\int_{G_2}M(v')dt=\int_{G_1}M(v')dt+\int_{G_2}M(w')dt.$$

作函数 v，w 如下：

$$v(t)=\begin{cases}u(t) & t\in G\setminus(G_1\cup G_2);\\ v'(t) & t\in G_1;\\ w'(t) & t\in G_2.\end{cases}$$

$$w(t)=\begin{cases}u(t) & t\in G\setminus(G_1\cup G_2);\\ w'(t) & t\in G_1;\\ v'(t) & t\in G_2.\end{cases}$$

则 $u=\frac{1}{2}v+\frac{1}{2}w$，$G(v\neq w)$ 不是零集，

$$M(u)=\frac{1}{2}M(v)+\frac{1}{2}M(w).$$

又

$$\rho(u;M)=\int_{G\setminus(G_1\cup G_2)}M(u)dt+\int_{G_1}M\left(\frac{1}{2}(v'+w')\right)dt+\int_{G_2}M\left(\frac{1}{2}w'+\frac{1}{2}v'\right)dt$$

$$=\int_{G\setminus(G_1\cup G_2)}M(u)dt+\int_{G_1}M(v')dt+\int_{G_2}M(w')dt$$

$$=\rho(v;M)=\rho(w;M).$$

得到所需证明。证毕

首先研究在范数 $\|\cdot\|_{(M)}$ 下闭单位球的端点问题

定理1　设 $(L_M^*,\ \|\cdot\|_{(M)})$ 中的单位球 $K=\{u\mid u\in L_M^*,\ \|u\|_{(M)}\leqslant1\}$，$u\in K$ 且 $\rho(u;M)=1$。则 u 是 K 的端点的充要条件是 $G(u\overline{\in}S_M)$ 是零集。

证　充分性 设有 $v,w\in K$，使 $u=\frac{1}{2}(v+w)$，则有

$$1=\rho(u;M)=\int_G M\left(\frac{1}{2}(v+w)\right)dt\leqslant\int_G\left[\frac{1}{2}M(v)+\frac{1}{2}M(w)\right]dt$$

$$=\frac{1}{2}\rho(v;M)+\frac{1}{2}\rho(w;M)\leqslant1.$$

因而

$$\int_G M\left[\frac{1}{2}v(t)+\frac{1}{2}w(t)\right]dt=\int_G\left[\frac{1}{2}M(v(t))+\frac{1}{2}M(w(t))\right]dt,$$

由 $M(\frac{1}{2}v(t)+\frac{1}{2}w(t))\leqslant\frac{1}{2}M(v(t))+\frac{1}{2}M(w(t))$,

知 $M\left[\frac{1}{2}v+\frac{1}{2}w\right]\underset{m}{\doteq}\frac{1}{2}M(v)+\frac{1}{2}M(w)$.

如 $t\in G$, $u(t)\in S_M$使上式等号成立，则

$$v(t)=w(t).$$

所以 $v\underset{m}{\doteq}w\Rightarrow u$ 是K的端点。

必要性 由$\rho(u;M)=1$，知$u\in L_M$。

用反证法，假设$G(u\overline{\in}S_M)$不是零集。依引理4知，$\exists\, v,w\in L_M$,使$u=\frac{1}{2}(v+w)$，$G(v\neq w)$不是零集，且

$$\rho(v;M)=\rho(w;M)=\rho(u;M)=1.$$

这与u是K的端点矛盾。证毕

定理 2 设K是$(L_M^*,\|\cdot\|_{(M)})$中的单位球，$u\in K$，则u是K的端点的充分必要条件是

$\rho(u;M)=1$ 且$G(u\overline{\in}S_M)$是零集。

证 充分性 依定理1显然成立。

必要性 设u是K的端点，则$\|u\|_{(M)}=1$，先证$\rho(u;M)=1$。假设，$\rho(u;M)<1$. 取a,b 使$0<a<b<\infty$，$m[G(a<|u|<b)]>0$。

于是 $$\int_{G(a<|u|<b)}M(2u)dt\leqslant\int_G M(2b)<+\infty.$$

由积分的绝对连续性及测度空间(G,m)的性质，对$\varepsilon=1-\rho(u;M)>0$，$\exists\, e\subset G(a<|u|<b)$，使$m(e)>0$，且

$$\int_e M(2u)dt<\varepsilon.$$

作两函数v，w如下：

$$v(t)=\begin{cases}u(t) & t\in G\setminus e;\\ 0 & t\in e.\end{cases}$$

$$w(t)=\begin{cases}u(t) & t\in G\setminus e;\\ 2u(t) & t\in e.\end{cases}$$

则 $$\rho(v;M)=\int_{G\setminus e}M(u)dt\leqslant\rho(u;M)<1,$$

$$\rho(w;M)=\int_{G\setminus e}M(u)dt+\int_e M(2u)dt<\rho(u;M)+\varepsilon=1.$$

所以$v,w\in L_M^*$，且$\|v\|_{(M)}\leqslant1$，$\|w\|_{(M)}\leqslant1$，又$u=\frac{1}{2}v+\frac{1}{2}w$。

而v,w是L_M^*中的两个不同元素与u是K的端点矛盾，故必$\rho(u;M)=1$.由定理1知$G(u\overline{\in}S_M)$是零集。证毕

推论 $(L_M^*, \|\cdot\|_{(M)})$严格凸的充分必要条件是M满足$\triangle_2$条件且M严格凸。

证 充分性 对任一$u\in L_M^*$如$\|u\|_{(M)}=1$，由条件知$\rho(u; M)=1$，且$G(u\,\overline{\in}\,S_M)=\phi$。所以$u$是$K$的端点，故$(L_M^*, \|\cdot\|_{(M)})$是严格凸的。

必要性 对每一$u\in L_M^*$，$\|u\|_{(M)}=1$，知u是K的端点，因而$\rho(u; M)=1$，所以M满足$\triangle_2$条件。

假若M非严格凸，则存在正数$t_0\in S_M^C$，取集合$G_0\subset G$，使$0<M(t_0)mG_0<1$，$mG_0<mG$。又取正数k_0，使

$$M(k_0)=\frac{1-M(t_0)mG_0}{m(G\setminus G_0)}.$$

作函数u如下：

$$u(t)=\begin{cases} t_0 & \text{当} t\in G_0; \\ k_0 & \text{当} t\in G\setminus G_0. \end{cases}$$

则$f(u; M)=M(t_0)mG_0+M(k_0)m(G\setminus G_0)=1$

得 $\|u\|_{(M)}=1$。

但$G(u\,\overline{\in}\,S_M)\supset G_0\Longrightarrow G(u\,\overline{\in}\,S_M)$不是零集$\Longrightarrow u$不是$K$的端点。

于是与$(L_M^*, \|\cdot\|_{(M)})$是严格凸矛盾，所以M是严格凸的。证毕

定理3 $(L_M^*, \|\cdot\|_{(M)})$中的单位球K必存在端点。

证 由引理3知，$\exists u_0>0$为$M(u)$的严格凸点，

且使 $$\frac{1}{M(u_0)}<mG.$$

取$G_1\subset G$，使$mG_1=\dfrac{1}{M(u_0)}$。作函数u：

$$u(t)=\begin{cases} u_0 & t\in G_1; \\ 0 & t\in G\setminus G_1. \end{cases}$$

因为$u=0$是M的严格凸点，所以$G(u\,\overline{\in}\,S_M)=\phi$。

$$\rho(u;M)=\int_{G1}M(u_0)dt=1,$$

所以还有$\|u\|_{(M)}=1$。利用定理2知u是K的端点。证毕

注 从上面的证明可看出$(L_M^*, \|\cdot\|_{(M)})$中的单位球有无穷多个端点。

现在转而研究在范数$\|\cdot\|_M$下闭单位球的端点问题

定理4 记$K=\{u' \mid \|u'\|_M\leqslant 1\}$为$(L_M^*, \|\cdot\|_M)$的闭单位球，$\|u\|_M=1$，则$u$是$K$的端点的充分必要条件是由$\frac{1}{k}[1+\int_G M(ku)dt]=\|u\|_M$可推出$G(ku\,\overline{\in}\,S_M)$是零集。

证　充分性 如$v,w\in K$，使$u=\frac{1}{2}v+\frac{1}{2}w$，则由范数$\|\cdot\|_M$的性质，$\exists\ k_1,k_2>0$，使

$$\|v\|_M=\frac{1}{k_1}[1+\int_G M(k_1v)dt]\ ,\ \|w\|_M=\frac{1}{k_2}[1+\int_G M(k_2w)dt]。$$

于是　$2\geqslant\|v\|_M+\|w\|_M$

$$=\frac{1}{\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}}\left[1+\frac{k_2}{k_1+k_2}\int_G M(k_1v)dt+\frac{k_1}{k_1+k_2}\int_G M(k_2w)\,dt\right]$$

$$\geqslant\frac{1}{k_0}\left[1+\int_G M(k_0(v+w))dt\right]\ (\text{其中 } k_0\overset{\triangle}{=}\frac{k_1k_2}{k_1+k_2})$$

$$=2\cdot\frac{1}{2k_0}\left[1+\int_G M(2k_0u)\ dt\right]\geqslant 2\cdot\|u\|_M=2。$$

所以上式的"$\geqslant$"号都是等号，故

$$\frac{1}{2k_0}\left[1+\int_G M(2k_0u)\ dt\right]=1, \tag{3}$$

$$\|v\|_M=\|w\|_M=1,$$

$$\frac{k_2}{k_2+k_2}\int_G M(k_1v)dt+\frac{k_1}{k_1+k_2}\int_G M(k_2v)\ dt=\int_G M(k_0v+k_0w)dt=\int_G M(2k_0u)dt.$$

由M的凸性知，

$$\frac{k_2}{k_1+k_2}M(k_1v)+\frac{k_1}{k_1+k_2}M(k_2w)\overset{\bullet}{\underset{m}{=}}M(2k_0u) \tag{4}$$

由(3)式及题设知 $G(2k_0u\overline{\epsilon}S_M)$是零集。

因为当$t\ \overline{\epsilon}\ G(2k_0u\ \overline{\epsilon}\ S_M)$且使(4)等号成立时，

$2k_0u(t)\epsilon S_M$且$\frac{k_2}{k_1+k_2}M(k_1v(t))+\frac{k_1}{k_1+k_2}M(k_2w(t))=M(2k_0u(t))$，因而 $k_1v(t)=k_2w(t)$，所以$k_1v\overset{\bullet}{\underset{m}{=}}k_2w\Longrightarrow k_1\|v\|_M=k_2\|w\|_M\Longrightarrow k_1=k_2\Longrightarrow v\overset{\bullet}{\underset{m}{=}}w$。

即v,w 是 L_M^*中同一元素，所以u是K的端点。

必要性 用反证法，如结论不成立，则存在$k_0>0$，使$\frac{1}{k_0}[1+\int_G M(k_0u)dt]=\|u\|_M=1$，

且 $G(k_0u\ \overline{\epsilon}\ S_M($不是零集。

由引理4，$\exists v,w\epsilon L_M^*$，使$u=\frac{1}{2}v+\frac{1}{2}w$，$G(v\neq w)$不是零集，$M(k_0u)=\frac{1}{2}M(k_0v)+\frac{1}{2}M(k_0w)$，且$\int_M M(k_0v)dt=\int_G M(k_0w)dt=\int_G M(k_0u)dt$。

所以　$\|v\|_M\leqslant\frac{1}{k_0}[+\int_G M=k_0M(k_0v)dt]=\frac{1}{k_0}[1+\int_G Mk_0u)dt]=\|u\|_M=1$。

故$v\epsilon K$，同理$w\epsilon K$。

所以u不是K的端点与题设矛盾。证毕

注　这个充要条件较为复杂，利用它不容易推出类似定理2的推论及定理3的结论。

参考文献

〔1〕吴从炘、王廷辅，哈尔滨工业大学科学研究报告，1980，172.
〔2〕克拉斯诺西尔斯基、鲁季茨基，（吴从炘译），凸函数和奥尔里奇空间，科学出版社，1962.
〔3〕Kothe, G., *Topological vector spaces I*, springer-Verlag, Berlin, 1969.

Extreme Points in Orlicz Spaces

Lao Bingyuan　Zhu Xiping

Abstract

Some criteria of the extreme points on the closed unit sphere of Orlicz spaces $(L_M^*, \|\cdot\|_{(M)})$ and $(L_M^*, \|\cdot\|_M)$ are obtained. A theorem of Wu Cong-Xin on the stricly convexity of Orlicz space $(L_M^*, \|\cdot\|_{(M)})$ is deduced as a corollary of our result. It is shown also that there always exist infintely many extreme points on the closed unit sphere of $(L_M^*, \|\cdot\|_{(M)})$.