半序局部凸空间的对偶定理

韩景銮
（数学系）

摘　要

本文给出圆凸集合V的对偶定理，并得到任一有界集的序凸包仍为有界集的半序局部凸空间的对偶特征.

在半序局部凸拓扑线性空间的对偶理论中，现有的结果本质上都是在V是一个$\tau(E,F)$邻域的假定下获得的，因而在利用这些结果时都有某些局限性。本文试图取消对V的这个限制，分别在V是一个任意的集合，或V是一个有界集的假定下讨论其对偶性，并获得一些新的结果。

设(E,E_+)，(F,F_+)是半序线性空间。又设(E,F)是一个对偶。若$F_+=-E_+^0$，我们称(E,E_+)，(F,F_+)是右序对偶；若$F_+=-E_+^0$及$E_+=-F_+^0$，则称(E,E_+)，(F,F_+)是序对偶。$V\subset E$，若$V=F(V)$，则称V是序凸的；若$V=D(V)$，则称V是可分解的；若$V=\overline{D(V)}$，则称V是几乎可分解的。其中$F(V)=(V+E_+)\cap(V-E_+)$和$D(V)=\{x\in V: x=\lambda x_1-(1-\lambda)x_2,\ \lambda\in[0,1],\ x_1,\ x_2\in V\cap E_+\}$分别称为$V$的序凸包和$V$的分解核。

定理1 设$(E,E_+)(F,F_+)$是右序对偶。$N\subset E$的圆凸集。则$(D(N))^\circ\supset F(N^0)$。若$N$还是可分解的，则$N^0$是序凸的。

证明 因为$D(N)=\mathrm{co}(-(N\cap E_+)\cup(N\cap E_+))$故

$$(D(N))^\circ=(-(N\cap E_+)\cup(N\cap E_+))^\circ=(-(N\cap E_+))^\circ\cap(N\cap E_+)^\circ$$

设$h\in F(N^\circ)$，则存在$f_i\in N^\circ$，$g_i\in F_+$，$i=1,2$，使$h=f_1+g_1=f_2-g_2$。

$$(f_1+g_1)(-(N\cap E_+))=f_1(N\cap(-E_+))+g_1(N\cap(-E_+))\leqslant 1$$

$$(f_2-g_2)(N\cap E_+)=f_2(N\cap E_+)+g_2(N\cap(-E_+))\leqslant 1$$

故　$h\in(D(N))^\circ$即$F(N^\circ)\subset(D(N))^\circ$

若N还是可分解的，于是$N=D(N)$，$N^\circ\supset F(N^\circ)$，而$N^\circ\subset F(N^\circ)$是自然成立的。故$N^\circ=F(N^\circ)$，$N^\circ$是序凸的。

定理2 设$(E,E_+)(F,F_+)$是右序对偶，E_+是$\sigma(E,F)$完备的。又设$N\subset E$，N是圆凸$\sigma(E,F)$有界集。则$(F(\bar{N}))^\circ=\overline{D(N^\circ)}$；于是$\sigma(E,F)$有界的圆凸集$N$的闭

本文1983年8月收到.

色$\bar{N}$是序凸的充要条件是N°是几乎可分解的。特别，当N°可分解时，便知$\bar{N}$是序凸的。

证明　因为$\bar{N}$是闭的圆凸$\sigma(E,F)$有界集，而E_+是$\sigma(E,F)$完备的凸集，故$\bar{N}+E_+$及$\bar{N}-E_+$均为$\sigma(E,F)$闭凸集，且都含有θ点，根据极集的性质，有

$$(F(\bar{N}))^\circ=((\bar{N}+E_+)\cap(\bar{N}-E_+))^\circ=\overline{\mathrm{co}}\ ((\bar{N}+E_+)^\circ\cup(\bar{N}-E_+)^\circ)$$

$$=\overline{\mathrm{co}}\ (-(\bar{N}^\circ\cap F_+)\cup(\bar{N}^\circ\cap F_+))=\overline{D(\bar{N}^\circ)}.$$

今设$\bar{N}$还是序凸的，则$N^\circ=(\bar{N})^\circ=(F(\bar{N}))^\circ=\overline{D(N^\circ)}$，所以$N^\circ$是几乎可分解的。反之，若$N^\circ$是几乎可分解的，则

$$F(\bar{N})=(F(\bar{N}))^{\circ\circ}=(\overline{D(N^\circ)})^\circ=N^{\circ\circ}=\bar{N}$$

故$\bar{N}$是序凸的。

给定半序局部凸拓扑线性空间$(E,E_+,\mathscr{P})$，若$\mathscr{P}$存在一个由可分解的邻域组成的局部基，我们称$(E,E_+\mathscr{P})$是局部可分解空间；若$\mathscr{P}$存在一个由几乎可分解的邻域组成的局部基，我们称$(E,F_+,\mathscr{P})$是局部几乎可分解空间；若$\mathscr{P}$存在一个由序凸的邻域组成的局部基，我们称$(E,E_+,\mathscr{P})$是局部o-凸空间。对一般半序局部凸拓扑空间而言，有界集N的序凸包$F(N)$不一定是有界的。那么我们自然会产生这个问题：任一有界集N的序凸包$F(N)$仍是一个有界集的半序局部拓扑线性空间有什么特征？当$\mathscr{P}$为可距离化拓扑时，〔1〕已有这方面的结果，现在取消对$\mathscr{P}$的这种限制，给出具有这种性质的空间的对偶特征。

定理3　设$(E,E_+,\mathscr{P})$是一个半序局部凸拓扑线性空间，E_+是$\sigma(E,E')$完备的。则E的任一有界集N的序凸包$F(N)$仍是一个有界集的充要条件是$(E',E'_+,\beta(E',E))$是局部几乎可分解空间。

证明　设U为E'的θ点的任一$\beta(E'E)$邻域，则存在E上的一个闭、圆、凸有界集A，使$A^\circ\subset U$。由假设，我们可以知道$(F(A))^\circ$是一个$\beta(E',E)$邻域。根据定理2，$(F(A))^\circ=\overline{D(A^\circ)}$，故$\overline{D(A^\circ)}\subset U$。$(E',E'_+,\beta(E',E))$是一个局部几乎可分解空间。

反之，设$(E',E'_+,\beta(E'.E))$是局部几乎可分解空间。往证E的任一有界集的序凸包仍是有界的。为此，我们引进下列记号：

$$E''_\beta=(E',\beta(E',E))'.\ 于是\ E''_\beta\supset E.$$

及
$$A^\circ=\{x\in E:x(A)\leqslant 1\}$$
$$A^\beta=\{x\in E''_\beta:x(A)\leqslant 1\}.$$

其中$A\subset E'$.即A在E及E''_β的极集分别记为A°；A^β、显然，$A^\circ\subset A^\beta$。

今设B为E中任一闭、圆、凸集，且B是有界的。因为$\beta(E',E)$是几乎可分解拓朴，故$\overline{D(B^\circ)}$是E'上一个$\beta(E'.E)$邻域。由Alaoglu—Bourbaki定理，$(\overline{D(B^\circ)})^\beta$是$E''_\beta$上的一个$\sigma(E''_\beta,E')$有界集.再由Mackey定理，$(\overline{D(B^\circ)})^\circ$便是$E$上的一个

有界集。根据定理 2，我们又有

$$\overline{F(B)} = (F(B))^{\circ\circ} = (D\ \overline{(B^{\circ})}\ )^{\circ}.$$

故$F(B)$仍为E中的一个有界集。

Mackey拓扑是否是一个局部分解拓扑[2]已有一个简明的方法来判别。本文系 4 表明类似的判别法对强拓扑也是适用的。

系4　设$(E,E_+\mathscr{P})$是半序局部凸拓扑线性空间，又设E_+是一个凸体、(即有内点的闭凸集)。则$\beta(E,E')$是局部可分解拓扑的充要条件是E_+是生成的，且$E'_\beta=(E,\beta(E,E'))'$在$(E^*,E^*_+)$是序凸的.

证明　只需证明充分性便可。因为 $\mathrm{int}\,E_+\neq\phi$，由分离定理便知 E'_+是E'上的一个$\sigma(E',E)$完备集。又E_+是闭集，故$\langle E,E'\rangle$是一个序对偶。

若E_+是生成的(即$E=E_+-E_+$)。则$\sigma(E',E)$是一个局部0—凸拓扑。故E'上每一个$\sigma(E',E)$有界集N的序凸包$F(N)$仍是$\sigma(E',E)$有界的。由定理3，$\beta(E,E')$便是E上的一个局部几乎可分解拓扑。又由于E'_β在(E^*,E^*_+)上是序凸的。即$E'_\beta=F^*(E'_\beta)=(E'_\beta+E^*_+)\cap(E'_\beta-E^*_+)$，故$(E,E_+,\beta(E,E'))$是一个局部可分解空间。

系5　设$(E,E_+,\mathscr{P})$是半序局部凸拓扑线性空间。E_+是$\sigma(E,E')$完备的。

i)　$(E,E_+,\mathscr{P})$是局部0—凸。

ii)　$(E',E'_+,\beta(E'.E))$是局部几乎可分解，则i)$\Longrightarrow$ii)；若$\mathscr{P}$是可距离，则ii)$\Longrightarrow$i)。

参 考 文 献

〔1〕Yau—Chuen Wong, *Lecture Notes in Math.* Springer—Verlag Berlin (1976), 531.

〔2〕Yau—Chuen Wong, *J. London Math. soc.*, 6(1973), 2, 419—420.

〔3〕Ng. Kung—Fu and Duhoux, M., *J. London Math. soc.*, 8(1974), 2, 201—208.

〔4〕林金楨，科学通报，28(1983)，22，1345—1347.

The Dual Theorems of Partially Ordered Locally Convex Spaces

Han　Jingluan

Abstract

In this paper, our purose is to study the duality of any circled convex subset N of E, where E is a partially ordered locally convex space and N need not to be a neighbourhood. A dual characterization of ordered convex spaces, in which the order—convex hull of any bounded set is bounded, is obtained.