关于某类解析函数的星形限界及凸形限界

蔡克聚
（数学力学系）

摘　　要

在文献〔1〕-〔5〕中，MacGregor 等人分别讨论了某类解析函数的星形限界及凸形限界。本文通过引进函数类Pa，b在较为广泛的函数范围内获得一些结果。

§1. 定 义 及 引 理

定义1　设$f(z)$在$|z|<1$内解析，且$f(0)=f'(0)-1=0$，称这样的$f(z)$的全体为函数类N。

定义2　设$f(z)\epsilon N$，(i)若在$|z|<1$内有$\mathrm{Re}\dfrac{zf'(z)}{f(z)}>\alpha$，$0\leqslant\alpha<1$，称$f(z)$为$\alpha$级星形函数，记这样的函数的全体为$S^*_\alpha$，并简记$S^*_0=S^*$；(ii)若在$|z|<1$内有$\mathrm{Re}\left(1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>\alpha$，$0\leqslant\alpha<1$，称$f(z)$为$\alpha$级凸形函数，记这样的函数的全体为$K_\alpha$，并简记$K_0=K$。

定义3　设$f(z)$在$|z|<1$内解析，$f(z)=1+a_1z+a_2z^2+\cdots$若(i)在$|z|<1$内满足$\mathrm{Re}f(z)>\alpha$，则称这样的函数的全体为$P_\alpha$，并简记$P_0=P$；(ii)在$|z|<1$内满足$\left|f(z)-\dfrac{1}{2\alpha}\right|<\dfrac{1}{2\alpha}$，称这样的函数的全体为$Q_\alpha$，其中$0\leqslant\alpha<1$。

定义4　设 $u(z)=1+a_1z+a_2z^2+\cdots$在$|z|<1$内解析，且可表为

$$u(z)=\frac{1+(2ab-1)w(z)}{1+(2b-1)w(z)}=\frac{1+mw(z)}{1+nw(z)}\tag{1.1}$$

其中$w(z)$在$|z|<1$内解析$w(0)=0$，$|w(z)|<1$，(Schwarz函数)，$0\leqslant a<1$，$0<b\leqslant1$，$m=2ab-1$，$n=2b-1$　$(-1\leqslant m<n\leqslant1)$，则称$u(z)$的全体为$Pa,b$。

〔注〕 本文后面出现的a，b，m，n都指满足上面等式和不等式的实数。

两个引理

引理1　设$u(z)\epsilon Pa,b$，则对$|z|=r<1$有

本文1982年9月收到

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\mathrm{Re}\,\frac{zu'(z)}{u(z)}\geqslant\begin{cases}\dfrac{(m-n)r}{(1+mr)(1+nr)} & R_0\leqslant R_1 \quad (1.2)\\[2ex] \dfrac{[(m+n+2)-(m+n+2mn)r^2]-2\sqrt{(1+m)(1+n)(1-mr^2)(1-nr^2)}}{(m-n)(1-r^2)} & R_0\geqslant R_1 \quad (1.3)\end{cases}$$

其中
$$R_0^2=\frac{(1+m)(1-mr^2)}{(1+n)(1-nr^2)} \tag{1.4}$$

$$R_1=\frac{1+mr}{1+nr} \tag{1.5}$$

证　$\because u(z)\epsilon P_{a,b}$,

$$\therefore\quad \mathrm{Re}\,\frac{zu'(z)}{u(z)}=(m-n)\,\mathrm{Re}\,\frac{zw'}{(1+mw)(1+nw)} \tag{1.6}$$

其中$w(z)$是Schwarz函数

由[7,8]易知有

$$\mathrm{Re}\,\frac{zw'}{(1+mw)(1+nw)}\leqslant-\frac{1}{(n-m)^2}\,\mathrm{Re}\Big[nu+\frac{m}{u}-(m+n)\Big]+\frac{1}{(n-m)^2}\,\frac{r^2|nu-m|^2-|1-u|^2}{(1-r^2)|u|} \tag{1.7}$$

及
$$\mathrm{Re}\Big[nu+\frac{m}{u}\Big]-\frac{r^2|nu-m|^2-|1-u|^2}{(1-r^2)|u|}$$

$$\geqslant\begin{cases}\dfrac{nm(m+n)r^2+4mnr+(m+n)}{(1+nr)(1+mr)} & R_0\leqslant R_1 \quad (1.8)\\[2ex] \dfrac{2}{1-r^2}\Big[\sqrt{(1+m)(1+n)(1-mr^2)(1-nr^2)}-(1-mnr^2)\Big], & R_0\geqslant R_1 \quad (1.9)\end{cases}$$

把(1.7),(1.8),(1.9)代入(1.6)即得(1.2)及(1.3)。

引理2　对于引理1中的(1.2)及(1.3)式，极值函数分别为

$$u_0(z)=\frac{1+mz}{1+nz} \tag{1.10}$$

$$u_1(z)=\frac{1-(m+1)\cos\theta\cdot z+mz^2}{1-(n+1)\cos\theta\cdot z+nz^2} \tag{1.11}$$

其中$\cos\theta$由下列方程确定

$$\frac{(m-n)r[-\cos\theta+2r-\cos\theta\cdot r^2)}{[1-(m+1)\cos\theta\cdot r+mr^2][1-(n+1)\cos\theta\cdot r+nr^2]}$$

$$=\frac{m+n}{m-n}-\frac{2}{(m-n)(1-r^2)}\Big[\sqrt{(1+m)(1+n)(1-mr^2)(1-nr^2)}-(1-mnr^2)\Big] \tag{1.12}$$

证　我们有　$p(z)=\dfrac{1-w}{1+w}$其中$p(z)\epsilon \mathrm{P}$，w是Schwarz函数

$$\therefore\quad u(z)=\frac{1+mw}{1+nw}=\frac{(m-1)p(z)-(m+1)}{(n-1)p(z)-(n+1)} \tag{1.13}$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

由〔7,8〕知，(1.2)的极值函数当$p(z)=\frac{1-z}{1+z}$时达到 (1.14)

(1.3)的极值函数当$p(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{1+ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}}+\frac{1+ze^{i\theta}}{1-ze^{i\theta}}\right]$时达到 (1.15)

把(1.14)及(1.15)代入(1.13)即得(1.10)及(1.11)。

对(1.11)求对数导数后，令$z=r$，再令所得的式子等于(1.3)即得(1.12)。

§2. 星形限界及凸形限界

定理1 设$f(z)\epsilon N$，且在$|z|<1$内有$\frac{f(z)}{z}\epsilon Pa,b$则$f(z)$在$|z|<\sigma_1$内单叶且星形，其中$\sigma_1$是下列方程的最小正根

$$mnr^2+2mr+1=0 \qquad R_0\leqslant R_1 \tag{2.1}$$

$$m(1+n)r^4-(1+m)(1+n)r^2+(1+m)=0 \qquad R_0\geqslant R_1 \tag{2.2}$$

结果是准确的，极值函数分别为

$$f(z)=z\cdot u_0(z) \qquad 及 \qquad f(z)=z\cdot u_1(z).$$

证 $\because$ $\frac{f(z)}{z}\epsilon Pa,b$， $\therefore$， $f(z)=z\cdot u(z)$， $u(z)\epsilon Pa,b$。

$$\therefore \quad \mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}=1+\mathrm{Re}\frac{zu'(z)}{u(z)}$$

由引理1得

$$\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}\geqslant\begin{cases}\dfrac{mnr^2+2mr+1}{(1+mr)(1+nr)} & R_0\leqslant R_1 \quad (2.3)\\[2ex] \dfrac{2[(m+1)-m(1+n)r^2]-2\sqrt{(1+m)(1+n)(1-mr^2)(1-nr^2)}}{(m-n)(1-r^2)} & \\ & R_0\geqslant R_1 \quad (2.4)\end{cases}$$

令(2.3)及(2.4)右端的分子等于零即得(2.1)及(2.2)。

设 $r_{a,b}$ 为方程$R_0=R_1$在(0 1)中的最小正根(易知其存在)，若(2.1)的最小正根$r_0\leqslant r_{a,b}$。则$\sigma_1=r_0$

若(2.2)的最小正根$r_1\geqslant r_{a,b}$ 则$\sigma_1=r_1$

可以证明：存在$m_0<0$，

当$-1\leqslant m\leqslant m_0$时，(2.1)有最小正根$r_0\leqslant r_{a,b}$

当$m_0\leqslant m<n\leqslant 1$时 (2.2)有最小正根$r_1\geqslant r_{a,b}$

另一方面，由引理2知极值函数分别为$f(z)=z\cdot u_0(z)$及$f(z)=z\cdot u_1(z)$。

推论1 设$f(z)\epsilon N$，$f'(z)\epsilon P_{a,b}$ $|z|<1$，则$f(z)$的凸形限界$\rho_1=\sigma_1$。

定理2 设$f(z),g(z)\epsilon N$且在$|z|<1$内有$\frac{f(z)}{g(z)}\epsilon P_{a,b}$，$\frac{g(z)}{z}\epsilon P$，则$f(z)$在$|z|<\sigma_2$内单叶且星形，其中$\sigma_2$是下列方程的最小正根

$$1+2(m-1)r+[mn-2(m+n)-1]r^2-2m(1+n)r^3-mnr^4=0 \qquad R_0\leqslant R_1 \tag{2.5}$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$A_1r^4+B_1r^3+C_1r^2+D_1r+E_1=0 \qquad R_0\geqslant R_1 \tag{2.6}$$

其中　$A_1=m(1+n)$　$B_1=2m(1+n)$　$C_1=-(2n+mn+1)$

$D_1=-2(1+m)$　$E_1=(1+m)$　$r=|z|<1$

结果是准确的，极值函数分别为

$$f(z)=z\cdot\frac{1-z}{1+z}\cdot u_0(z) \tag{2.7}$$

及

$$f(z)=z\cdot\frac{1-z}{1+z}\cdot u_1(z) \tag{2.8}$$

证　$\because \dfrac{f(z)}{g(z)}\epsilon P_{a,b},\ \dfrac{g(z)}{z}\epsilon P$

$$\therefore\ f(z)=z\cdot p(z)\cdot u(z) \tag{2.9}$$

其中$p(z)\epsilon P$，$u(z)\epsilon P_{a,b}$。

$$\therefore\ \mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}=1+\mathrm{Re}\frac{zp'(z)}{p(z)}+\mathrm{Re}\frac{zu'(z)}{u(z)} \tag{2.10}$$

由引理1及熟知的不等式　$\mathrm{Re}\dfrac{zp'(z)}{p(z)}\geqslant-\dfrac{2|z|}{1-|z|^2}$ 得

$$\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}\geqslant\begin{cases}1-\dfrac{2r}{1-r^2}+\dfrac{(m-n)r}{(1+mr)(1+nr)} & R_0\leqslant R_1 \quad (2.11)\\[2ex] 1-\dfrac{2r}{1-r^2}+\dfrac{[(m+n+2)-(m+n+2mn)r^2]}{(m-n)(1-r^2)} & \\[2ex] \quad-\dfrac{2\sqrt{(1+m)(1+n)(1-mr^2)(1-nr^2)}}{(m-n)(1-r^2)} & R_0\geqslant R_1 \quad (2.12)\end{cases}$$

分别令(2.11)、(2.12)右边分子等于零，整理即得(2.5)、(2.6)。

(2.5)及(2.6)式最小正根存在的讨论可仿定理1，此处略(后面定理的类似讨论也略)

另外，由引理2及(2.9)式，可知极值函数分别为(2.7)及(2.8)。

推论2　设$f(z)$，$g(z)\epsilon N$，且在$|z|<1$内有$\dfrac{f'(z)}{g'(z)}\epsilon P$，$g'(z)\epsilon P_{a,b}$，则$f(z)$的凸形限界$\rho_2=\sigma_2$

定理3　设$f(z)\epsilon N$，$g(z)\epsilon S^*_\gamma$，$0\leqslant\gamma<1$，若在$|z|<1$内，$\dfrac{f(z)}{g(z)}\epsilon P_{a,b}$ 则$f(z)$在$|z|<\sigma_3$内单叶且星形，其中σ_3是下列方程的最小正根

$$knmr^3+(km+kn+mn+m-n)r^2+(k+2m)r+1=0 \qquad R_0\leqslant R_1 \tag{2.13}$$

$$A_2r^4+B_2r^3+C_2r^2+D_2r+E_2=0 \qquad R_0\geqslant R_1 \tag{2.14}$$

其中　$k=2\gamma-1$，　$r=|z|<1$

$A_2=(n-m)-2(m+n+2mn)k+(n-m)k^2$

$B_2=-2[(m+n+2mn)-2n(1+m)k+(n-m)k^2]$

$C_2=[(5n-m+4mn)-2(n-3m-2)k+(n-m)k^2]$

$D_2=-4(m+1)(k-1)$，　$E_2=-4(m+1)$

结果是准确的，极值函数分别为

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$f(z)=\frac{z}{(1+z)^{2-2\gamma}}\cdot u_0(z) \tag{2.15}$$

$$f(z)=\frac{z}{(1+z)^{2-2\gamma}}\cdot u_1(z) \tag{2.16}$$

证 $$f(z)=g(z)u(z) \qquad u(z)\epsilon P_{a,b} \tag{2.17}$$

$$\therefore \quad \mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}=\mathrm{Re}\frac{zg'(z)}{g(z)}+\mathrm{Re}\frac{zu'(z)}{u(z)}$$

注意到$\frac{zg'(z)}{g(z)}\epsilon P_a$ 从而 $\mathrm{Re}\frac{zg'(z)}{g(z)}\geqslant\frac{1+(2\gamma-1)r}{1+r}$及引理4得.

$$\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}\geqslant\begin{cases}\dfrac{1+kr}{1+r}+\dfrac{(m-n)r}{(1+mn)(1+nr)} & R_0\leqslant R_1 \quad (2.18)\\[2ex] \dfrac{1+kr}{1+r}+\dfrac{[(m+n+2)-(m+n+2mn)r^2]}{(m-n)(1-r^2)} & \\[2ex] \qquad -\dfrac{2\sqrt{(1+m)(1+n)(1-mr^2)(1-nr^2)}}{(m-n)(1-r^2)} & R_0\geqslant R_1 \quad (2.19)\end{cases}$$

分别令(2.18)和(2.19)右边的分子等于零，化简即得(2.13)和(2.14).

$\because$若取$g(z)=\frac{z}{(1+z)^{2-2\gamma}}$ 则有$\frac{zg'(z)}{g(z)}=\frac{1+(2\gamma-1)z}{1+z}$

$\therefore$ 由(2.17)及引理 2，知极值函数分别为(2.16)和(2.17)。

推论3 设$f(z)\epsilon N$, $g(z)\epsilon K_\gamma$ $0\leqslant\gamma<1$，若在$|z|<1$内有$\frac{f'(z)}{g'(z)}\epsilon P_{a,b}$则$f(z)$的凸形限界$\rho_3=\sigma_3$.

定理4 设$f(z)$, $g(z)\epsilon N$, 且在$|z|<1$内有$\frac{f(z)}{g(z)}\epsilon P$, $\frac{g(z)}{F(z)}\epsilon P_{a,b}$, $F(z)\epsilon S^*_\gamma$ $0\leqslant\gamma<1$则$f(z)$在$|z|<\sigma_4$内单叶且星形，其中σ_4是下列方程的最小正根

$$\begin{aligned}&1+(2m-3+k)r+[(m+n-1)k-(3m+3n-mn)k^2]r^2\\&\quad+[(mn-m-n)k+(n-m-3mn)]r^3-kmnr^4=0 \qquad R_0\leqslant R_1\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$A_3r^4+B_3r^3+C_3r^2+D_3r+E_3=0 \qquad R_0\geqslant R_1 \tag{2.21}$$

其中 $k=2\gamma-1, \qquad r=|z|<1$

$A_3=(n-m)-2(m+n+2mn)k+(n-m)k^2$

$B_3=-2[3(m+n+2mn)+2(m-2n-mn)k+(n-m)k^2]$

$C_3=(13n-9m+4mn)-2(3n-5m-2)k+(n-m)k^2$

$D_3=-4(m+1)(k-3) \qquad E_3=-4(m+1)$

结果是准确的，极值函数分别为

$$f(z)=\frac{z}{(1+z)^{2-2\gamma}}\cdot\frac{1-z}{1+z}\cdot u_0(z) \tag{2.22}$$

及 $$f(z)=\frac{z}{(1+z)^{2-2\gamma}}\cdot\frac{1-z}{1+z}\cdot u_1(z) \tag{2.23}$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

证 $\because$ $f(z)/g(z)\epsilon P$, $\dfrac{g(z)}{F(z)}\epsilon P_{a,b}$

$$\therefore\quad f(z)=F(z)p(z)u(z)\quad \text{其中}\ p(z)\epsilon P,\ u(z)\epsilon P_{a,b} \tag{2.24}$$

$$\therefore\quad \mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}=\mathrm{Re}\frac{zF'(z)}{F(z)}+\mathrm{Re}\frac{zp'(z)}{p(z)}+\mathrm{Re}\frac{zu'(z)}{u(z)}$$

$$\therefore \mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}\geqslant\begin{cases}\dfrac{1+kr}{1+r}-\dfrac{2r}{1-r^2}+\dfrac{(m-n)r}{(1+mr)(1+nr)} & R_0\leqslant R_1 \quad (2.25)\\[2ex] \dfrac{1+kr}{1+r}-\dfrac{2r}{1-r^2} \\ +\dfrac{[(m+n+2)-(m+n+2mn)r^2]-2\sqrt{(1+m)(1+n)(1-mr^2)(1-nr^2)}}{(m-n)(1-r^2)} & R_0\geqslant R_1 \quad (2.26)\end{cases}$$

分别令(2.25)及(2.26)右边的分子等于零，通过计算整理得(2.20)及(2.21)，由引理2及(2.24)知极值函数分别为(2.22)及(2.23)。

定理5 设$f(z)\epsilon N$，$g(z)\epsilon S$，若在$|z|<1$内有$\dfrac{f'(z)}{g'(z)}\epsilon P_{ab}$，则$f(z)$的凸形限界$\rho_4$是下列方程的最正小根，

$$mnr^4+2n(1-2m)r^3+(1-4m-4n+mn)r^2+2(m-2)r+1=0\qquad R_0\leqslant R_1 \tag{2.27}$$

$$A_4r^4+B_4r^3+C_4r^2+D_4r+E_4=0\qquad R_0\geqslant R_1 \tag{2.28}$$

其中　$A_4=n(m+1)$　　$B_4=4n(m+1)$

$C_4=[5(m-n)-nm+1]$　　$D_4=-(m+1)$　　$E_4=(m+1)$

结果是准确的，极值函数分别为

$$f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}\cdot u_0(z) \tag{2.29}$$

及

$$f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}\cdot u_1(z) \tag{2.30}$$

证 $\because$ $f'(z)=g'(z)u(z)\qquad u(z)\epsilon P_{a,b}$ (2.31)

$$\therefore\quad \mathrm{Re}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]=\mathrm{Re}\left[1+\frac{zg''(z)}{g'(z)}\right]+\mathrm{Re}\frac{zu'(z)}{u(z)}$$

$$\because g(z)\epsilon S,\quad \therefore \mathrm{Re}\left[1+\frac{zg''(z)}{g'(z)}\right]\geqslant\frac{1-4r+r^2}{1-r^2}\qquad r=|z|<1$$

$\therefore$由引理1得

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\geqslant\begin{cases}\dfrac{1-4r+r^2}{1-r^2}+\dfrac{(m-n)r}{(1+mr)(1+nr)} & R_0\leqslant R_1\quad (2.32)\\[2ex] \dfrac{1-4r+r^2}{1-r^2}+ \\ \dfrac{[(m+n+2)-(m+n+2mn)r^2]-2\sqrt{(1+m)(1+n)(1-mr^2)(1-nr^2)}}{(m-n)(1-r^2)} & R_0\geqslant R_1\quad (2.33)\end{cases}$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

令(2.32)及(2.33)右端分子等于零，整理即得(2.27)及(2.28)。

由引理 2 及(2.31)并注意到使$\mathrm{Re}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]$取极值的函数为$\frac{z}{(1-z)^2}$即得(2.29)及(2.30)。

〔注〕 在定理1—5中，令a，b，γ等于某些特殊值，我们将得到文献〔1〕—〔5〕中有关的定理。

参 考 文 献

〔1〕 MacGregor T. H., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 14(1963), 514—524.

〔2〕 Ratti J.S., *Math. Z.*, 107(1968), 241—248.

〔3〕 Shaffer, D. B., *J. Math. Anal. Appl.*, 45(1974), 73.

〔4〕 — *J. Math. Anal. Appl.*, 64(1978), 216—222.

〔5〕 Tuan P.D. Anh. V.V., *J. Math. Anal. Appl.*, 64(1978).

〔6〕 Singh.V. Goel, R.M., *J. Math Soc. Japan*, 23(1971), 323—329.

〔7〕 Zmorovic, V.A., *Mat. Sb.* (*N.S*), 68(1965), 110, 518—526.

Radii of Starlikeness and Convexity of Certain Classes of Analytic Functions

Cai Keju

Abstract

In this paper, we introduce the class of functions Pa,b, and then obtain some results concerning the radii of starlikeness and convexity of certain classes of analytie functions these results conclude most of the theorems presented in 〔1〕—〔5〕.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net