广义矩量定理的一个形式及关于半线性控制系统的讨论

赵　怡

（数学力学系）

摘　要

本文给出广义矩量定理的一个一般形式，并应用这方面的结果讨论半线性分布参数系统的某类控制问题，

我们已讨论过广义矩量定理的几种形式[4,5]，本文将给出一个更一般的形式，并讨论半线性分布参数系统的控制问题。

一、定理　假设　1）X及U是自反B空间；

2）ϕ是U上的闭稠定线性算子，其值域$R(\phi)$是X中的闭子集；

则对任一给定的$\tilde{x}\in R(\phi)$，我们有

①存在一个序列$\{u_n\}\subset U$，使得ϕu_n弱收敛于$\tilde{x}$，且

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_U=\left(1\Big/\min_{\langle\tilde{x},\hat{x}^*\rangle=1}\|\phi^*x^*\|_{U^*}\right)\triangleq\lambda \tag{1.1}$$

其中$\hat{x}^*$为$\hat{X}^*$中的任一元，$\hat{X}^*=\{\hat{x}^*:\hat{x}^*=x^*+z, Z\in N(\varphi^*), x^*\in X^*\}=X^*/N(\phi^*)$ ——X^*关于$N(\phi^*)$的商空间。这里，"*"表示对偶，$N(\phi^*)=\{x^*\in X^*;\phi^*x^*=0\}$.

②对任何满足$\phi u=\tilde{x}$的u，有$\|u\|_U\geq\lambda$.

证明　由设2)，我们知下述事实成立[1]：

(1)ϕ是正规能解算子。所以

$$R(\phi)=(N(\phi^*))^{\perp},\quad R(\phi^*)=(N(\phi))^{\perp} \tag{1.2}$$

(2)$N(\phi^*)$是X^*中闭子空间。因此有

$$(N(\phi^{*\perp})^{\perp}=N(\phi^*) \tag{1.3}$$

(3)$R(\phi)$是X中的闭子空间。所以有

$$\begin{cases}(X/R(\phi))^*\cong(R(\phi))^{\perp},\\ X^*/R(\phi))^{\perp}\cong(R(\phi))^*\end{cases} \tag{1.4}$$

其中"≅"表示同构。

由式(1.2)、(1.3)及(1.4)，得到

本文1982年12月收到.

$$\hat{X}^* = R^*/N(\phi^*) = X^*/R(\phi)^{\perp} \cong (R(\phi))^* \tag{1.5}$$

由设1),2)知道$R(\phi)$本身为一自反B空间，故式(1.5)意味着$\hat{X}^*$是$R(\phi)$的对偶空间，且$\hat{X}^*$的范定义为

$$\|\hat{X}^*\| = \inf_{z}\{\|x^* - z\|_{X^*} : z \in N(\phi^*)\},\ \hat{x}^* \in \hat{X}^* \tag{1.6}$$

可定义算子

$$\hat{\phi}^*\hat{x}^* \triangleq \phi^*(x+z) = \phi^* x^*,\ z \in N(\phi^*) \tag{1.7}$$

且有

$$\hat{\phi}^*\hat{x}^* = 0 \longrightarrow \hat{x}^* = 0_{\hat{X}^*} \tag{1.8}$$

如果视ϕ为$U \to R(\phi)$的算子，则由(1.5)及(1.7)有

$$\langle \phi u, \hat{x}^* \rangle_{R(\phi), \hat{X}^*} = \langle \phi u, x^* + Z \rangle_{R(\phi), (R(\phi))^*} = \langle u, \phi^*(x^* + Z) \rangle_{U, U^*}$$

$$= \langle u, \hat{\phi}^*\hat{x}^* \rangle_{U, U^*}$$

因此，$\hat{\phi}^*$是ϕ的对偶算子。

注意到U及$R(\phi)$是自反B空间，ϕ是U上闭稠定算，其值域是$R(\phi)$，并注意到(1.8)式，则由[5]中定理1即得到本定理的结论。

注 1　如果在定理中加上条件$\phi^* x^* = O_{U^*} \to x^* = O_{X^*}$.而$\tilde{x} \in X$，则得到[5]定理1的结论，此时有$\hat{X}^* = X^*$。特别当更有$R(\phi^*)$在$U^*$中稠时，则必有唯一的$u_0 \in U$，使得$\phi u_0 = \tilde{x}$，且$u_0$满足下面的(1.10)式。

注 2　如果定理中的B空间X不要求是自反的，但ϕ是有界线性算子，则得到[5]中定理2及定理3的结论。此时，对$\tilde{x} \in X$，在控制约束$\|u\|_U \leqslant L$下，$\phi u = \tilde{x}$有解的充要条件是

$$\langle \tilde{x}, \hat{x}^* \rangle \leqslant L \|\phi^* x^*\|_{U^*} \qquad \forall\ \hat{x}^* \in \hat{X}^* \tag{1.9}$$

且存在范最小解$u_0 \in U$，满足

$$\|u_0\|_U = 1 \Big/ \min_{\langle \tilde{x}, \hat{x}^* \rangle = 1} \|\varphi^* x^*\|_{U^*} \qquad \forall\ \hat{x}^* \in \hat{X}^* \tag{1.10}$$

特别再加上条件$\phi^* x^* = O_{U^*} \to x^* = O_{X^*}$时，得到[4]中基本是定理及定理1的结论。此时，(1.9)、(1.10)中的$\hat{X}^* = X^*$。

二、关于半线性分布参数控制系统的讨论

考虑扩展方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + F(x) + Bu \\ x(t,\zeta)|_{t=0} = x_0(\zeta) \end{cases} \qquad 0 \leqslant \zeta \leqslant l,\quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{2.1}$$

这里，对每个$t \in [0,T]$，$x(t,\cdot) \in X$——B空间，$x_0 \in X, u(\cdot,\cdot) \in U = L^p_{([0,T], L^p[0,l])}$——

自反B空间，对每个$t\in[0,T]$，$Bu\in L^{p'}_{[0,l]}$($p'\geqslant 1$为某个固定数)。下面，我们将讨论在约束$\|u\|_U\leqslant L$下（$L>0$为一常数）系统的控制问题（该系统的近似能控性的讨论可参看[2,3]）。

首先作如下的假设：

1、A为定义在X上的闭稠定线性算子，对任$z>\beta$,(β为某个实数)，$z\in\rho(A)$——A的豫解集，且

$$\|(zI-A)^{-1}\|\leqslant\frac{M}{z-\beta}\qquad\forall z>\beta$$

2、存在开凸集$D\subset D(F)$——F的定义域，使得$F\in Lip(D,X)$，及$\|F(x_1)-F(x_2)\|_X\leqslant\alpha\|x_1-x_2\|_X$，$\forall x_1,x_2\in D$，$\alpha$为一个不依赖于$x_1,x_2$的正常数。

3、$x_0\in D(A)\cap D$。

则可知系统(2.1)有mild解

$$x(t)=e^{tA}x_0+\int_0^t e^{(t-s)A}F(x(s))ds+\int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds \tag{2.2}$$

其中e^{tA}为由A产生的半群，$t\in[0,\hat{t}]$。$\hat{t}\in[0,T]$为满足下式的一个确定值

$$q(\hat{t})=\left(\frac{1}{r}\max\left\{\|e^{tA}x_0-x_0\|_X,t\in[0,\hat{t}]\right\}+\frac{M}{r}[r\alpha+\|F(x_0)\|]\frac{\exp(\beta\hat{t}-1)}{\beta}\right)<1 \tag{2.3}$$

r是使得集合$E:\{x:x\in X,\|x-x_0\|\leqslant r\}\subset D$的一个确定值。此时，非线性算子

$$Q(y)(t)=e^{tA}x_0+\int_0^t e^{(t-s)A}F(y(s))\,ds,\ t\in[0,\hat{t}] \tag{2.4}$$

是严格可压缩的，压缩系数是$q(\hat{t})$，且把集合

$$s=\{y:y(t)\in E,t\in[0,\hat{t}]\}\subset X_1$$

映射到自身。这里，$X_1=C([0,\hat{t}],x)$。

令$y_0=x_0$及

$$y_n=Q(y_{n-1}),\quad n=1,2,\cdots \tag{2.5}$$

则$Q(y)=y$有唯一解$y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$及

$$\|y-y_n\|\leqslant\frac{q^n}{1-q}\|y_1-x_0\| \tag{2.6}$$

则(2.2)可表为

$$x(t)=y(t)+\int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds,\quad t\in[0,\hat{t}]$$

且有

$$\phi u\triangleq\int_0^{\hat{t}} e^{(\hat{t}-s)A}Bu(s)ds=x(\hat{t})-y(\hat{t}) \tag{2.7}$$

现提出如下的控制问题：对任意给定的$\varepsilon>0$及$\bar{x}\epsilon X$，寻求满足$\|u\|_U\leqslant L$的控制$u\epsilon U$，使得在某个适当选取的有限时间$t^*\epsilon[0,T]$有$\|x(t^*)-\bar{X}\|\leqslant\varepsilon$，且使(2.5)中的迭代步骤尽量少。

首先注意如下的事实：

a)由(2.3)所表示的$q(t)$是t的单调递降函数，且当$t\to0$时$q(t)\to0$.(对$\beta=0$的情形也一样)。

b)当$U_{T_1}=L^p([0,T_1],L^p[0,l])$，$U_{T_2}=L^p([0,T_2],L^p[0,l])$，$T_1>T_2$时有：$u\epsilon U_{T_1}\to u\epsilon U_{T_2}$，$U^*_{T_2}\supset U^*_{T_1}$。则对给定的$\tilde{x}\epsilon X$，有

$$\min_{\langle\tilde{x},\hat{x}^*\rangle=1}\|\phi^*x^*\|_{U^*_{T_2}}\leqslant\min_{\langle\tilde{x},\hat{x}^*\rangle=1}\|\phi^*X^*\|_{U^*_{T_1}}$$

这里$T_1,T_2\epsilon[0,T]$。

于是可有如下的算法步骤：

1)取$y_0=x_0$，由(2.5)，在$[0,\hat{t}]$上得$y_1(t)$，并求$t_1=\max\left\{t:\dfrac{q(t)}{1-q(t)}\|y_1-x_0\|\leqslant\varepsilon,\ t\epsilon[0,\hat{t}]\right\}$，因为$q(t)\to0$当$t\to0$，所以这样的$t_1$一定存在，此时按照式(1.10)及$\tilde{x}=\bar{x}-y_1(t_1)$计算$\|u_1^0\|_{U_{t1}}$如果，$\|u_1^0\|_{U_{t1}}>L$，则进行第二次迭代；如果$\|u_1^0\|_{U_{t1}}\leqslant L$，则$u_1^0$为所求。

2)当需要第二次迭代时，由(2.5)在$[0,\hat{t}]$上得$y_2(t)$，并求$t_2=\max\left\{t:\dfrac{q^2(t)}{1-q(t)}\|y_1-x_0\|\leqslant\varepsilon,t\epsilon[0,\hat{t}]\right\}$，此时按照(1.10)及$\tilde{x}=\bar{x}-y_2(t_2)$，计算$\|u_2^0\|_{U_{t1}}$如果，$\|u_2^0\|_{U_{t1}}>L$，则进行第三次迭代；如果$\|u_2^0\|_{U_{t1}}\leqslant L$，则$u_2^0$为所求。

依此类推。

例，考虑系统

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2x}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2x}{\partial\zeta^2}+\left(\dfrac{\partial x}{\partial t}\right)^2+Gu\\ x(\zeta,0)=x_0(\zeta),\dfrac{\partial x}{\partial t}(\zeta,0)=x_1(\zeta)\qquad 0\leqslant t\leqslant1,0\leqslant\zeta\leqslant1\\ x(0,t)=x(1,t)=0\end{cases}\tag{2.8}$$

其中，$U=L^2([0,1],L^2[0,1])$，G为偶谐消去算子，即

$$G\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\pi\zeta\right)=\sum_{n-\text{奇正整数}}^{\infty}\sin n\pi\zeta$$

令$x=W_1,\partial x/\partial t=W_2,W=(W_1,W_2)^T$，则(2,20)化为

$$\frac{\partial W}{\partial t}=PW+F(W)+Bu\tag{2.9}$$

其中，$p=\begin{pmatrix}0&I\\A&0\end{pmatrix}$，$F(W)=\begin{pmatrix}0\\W_2^2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0\\G\end{pmatrix}$，

$$A=\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2},\qquad D(A)=\left(H^2_{[0,1]}\cap H^1_{[0,1]}\right)\subset L^2_{[0,1]}$$

$$D(p)=D(A)\times D(A^{\frac{1}{2}})$$

$D(p)$在Hilbert空间$H=D(A^{\frac{1}{2}})\times L^2_{[0,1]}$中稠，$H$的内积为

$$\langle W,\overline{W}\rangle_H=\langle A^{\frac{1}{2}}W_1,A^{\frac{1}{2}}\overline{W}_1\rangle_{L^2}+\langle W_2,\overline{W}_2\rangle_{L^2}$$
$$=\int_0^1 W'_{1\zeta}(\zeta)\overline{W}'_{1\zeta}(\zeta)d\zeta+\int_0^1 W_2(\zeta)\overline{W}_2(\zeta)d\zeta \tag{2.10}$$

p在H上产生半群e^{tp}：

$$e^{tp}W=\begin{pmatrix}\sum_1^{\infty}2(\langle W_1,\Psi_n\rangle_{L^2}\cos n\pi t+\frac{1}{n\pi}\langle W_2,\Psi_n\rangle_{L^2}\sin n\pi t)\Psi_n\\ \sum_1^{\infty}2(-n\pi\langle W_1,\Psi_n\rangle_{L^2}\sin n\pi t+\langle W_2,\Psi_n\rangle_{L^2}\cos n\pi t)\Psi_n\end{pmatrix}$$

其中，$\Psi_n=\sin\pi\zeta$。取

$$E=\left\{\begin{pmatrix}0\\W_2\end{pmatrix}\epsilon H:\ \|W_2-x_1\|_{L^2}\leqslant r\right\}$$

可验证，当$r=\frac{1}{6}$，$W_0=(x_0,x_1)^T=(0,\frac{1}{24}\sin\pi\xi)^T$时，有$W_0\epsilon D(p)$及$q(1)\leqslant21/27<1$。故取$\hat{t}=1$。

现对$\varepsilon=0.05$，$L=1$，求$u\epsilon U$，$\|u\|_U\leqslant L=1$，使得$\|W(1)\|\leqslant\varepsilon$。

对　　$$\phi u=\int_0^1 e^{(1-s)p}Bu(s)ds$$

有

$$u^*=\phi^*W^*=\sum_{n=\text{奇正整数}}^{\infty}2(-n\pi\langle W_1^*,\Psi_n\rangle_{L^2}\sin n\pi t+\langle W_2^*,\Psi_n\rangle_{L^2}\cos n\pi t)\Psi_n \tag{2.11}$$

$$\|u^*\|^2=\sum_{n=\text{奇正整数}}^{\infty}(n^2\pi^2\langle W_1^*,\Psi_n\rangle^2_{L^2}+\langle W_2^*,\Psi_n\rangle^2_{L^2}) \tag{2.12}$$

$$N(\phi^*)=\left\{\begin{matrix}V=(V_1,V_2)^T\epsilon H:\langle V_1,\Psi_n\rangle=0\\ \langle V_2,\Psi_n\rangle=0\end{matrix}\ \text{对}n=\text{奇正整数}\right\} \tag{2.13}$$

取$y_0=W_0$，经一次迭代可算出

$$y^1(t)=\begin{pmatrix}y_1^1(t)\\y_2^1(t)\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{24\pi}\sin\pi\zeta\sin\pi t\\ \frac{1}{24}\sin\pi\zeta\cos\pi t\end{bmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix}\sum_{n=\text{奇正整数}}^{\infty}\frac{2}{(24)^2n^3\pi^3}(1-\cos n\pi t)\sin n\pi\zeta\\ \sum_{n=\text{奇正整数}}^{\infty}\frac{1}{(24)^2n^2\pi^2}\sin n\pi t\cos n\pi\zeta\end{pmatrix}$$

$$y^1(1)=\begin{pmatrix}\sum\limits_{n=\text{奇正整数}}^{\infty}\dfrac{4}{(24)^2n^3\pi^3}\sin n\pi\zeta\\ -\dfrac{1}{24}\sin\pi\zeta\end{pmatrix}$$

$$\|y^1(1)-W_0\|\leqslant\frac{8}{(24)^2\pi^4}+\frac{1}{2(12)^2}$$

$$\frac{q(1)}{1-q(1)}\|y^1(1)-W_0\|\leqslant 0.03<0.05=\varepsilon$$

现有$\widetilde{W}=-y^1(1)$，注意到式(2.13)有

$$\langle\widetilde{W},\hat{W}^*\rangle=\langle W_2^*,\frac{1}{24}\sin\pi\zeta\rangle_{L^2}-4\sum_{n=\text{奇正整数}}^{\infty}\frac{1}{(24)^2n^2\pi^2}\langle W_1^*\ \sin\pi\zeta\rangle_{L^2}\tag{2.14}$$

对比(2.14)及(2.12)，知

$$\langle\widetilde{W},\ \hat{W}^*\rangle\leqslant\|\phi^*W^*\|$$

则可由下式计算u_0

$$\begin{cases}\sum\limits_{n=\text{奇正整数}}^{\infty}n^2\pi^2\langle W_{01}^*,\Psi_n\rangle_{L^2}\Psi_n-\beta\sum\limits_{n=\text{奇正整数}}\dfrac{1}{(24)^2n\pi}\Psi_n=0\\ \sum\limits_{n=\text{奇正整数}}^{\infty}\langle W_{02}^*\ \Psi_n\rangle\Psi_n-\dfrac{\beta}{48}\sin\pi\zeta=0\end{cases}\tag{2.15}$$

$$\langle\widetilde{W},\ \hat{W}_0^*\rangle=1\tag{2.16}$$

由(2.15)得到

$$\langle W_{01}^*,\Psi_n\rangle=\frac{\beta}{(24)^2n^3\pi^3},\ n\text{为奇正整数}$$

$$\langle W_{02}^*,\sin\pi\zeta\rangle=\frac{-\beta}{48}\tag{2.17}$$

由(2.17),(2.16),(2.14)得到

$$\beta=-\frac{1}{a},\quad a=\frac{1}{2(24)^2}+\frac{4}{(24)^4\pi^4}\sum_{n=\text{奇正整数}}^{\infty}\frac{1}{n^4}\tag{2.18}$$

由(2.17),(2.18)及(2.11)得到

$$u_0^*=\left(\frac{2}{a}\sum_{n=\text{奇正整数}}^{\infty}\frac{1}{(24)^2n^2\pi^2}\sin n\pi+\sin\pi\zeta\right)+\frac{1}{24a}\cos\pi t\sin\pi\zeta$$

$$u_0=u_0^*\Big/\|u_0^*\|^2=\left(-\frac{4}{(24)^2\pi^2}\sum_{n=\text{奇正整数}}^{\infty}\sin\pi t\sin\pi\zeta\right)+\frac{1}{12}\cos\pi t\sin\pi\zeta$$

$$\|u_0\|\leqslant\frac{4}{(24)^4\pi^4}+\frac{1}{576}<1$$

即取一次迭代后便有解u_0。

如果取 $W_0=(0,-\frac{1}{24}\sin 2\pi\xi)^T$时，则对$\hat{W}^*=W^*+V$，$W^*=(\ 0,\ \sin 2\pi\zeta\ )^T\epsilon H$，

$V=(0, \sin 2\pi\xi)^T \epsilon N(\phi^*)$有$\|\phi^* W^*\|=0$而可算出$\langle \widetilde{W}, \hat{W}^*\rangle=\frac{1}{24}>0$,即对此$\hat{W}^*$不存在$L>0$，使$\langle \widetilde{W}, \hat{W}^*\rangle \leqslant L\|\phi^* W^*\|$,因此第一次迭代后无解，需进一步迭代。

参考文献

〔1〕关肇直、张恭庆、冯德兴，线性泛函分析入门，上海科技出版社，1979.

〔2〕Fattorini, H. O., Russell, D. L., *Arch. Ration Mech Anal.*, 43(1971), 272-292.

〔3〕Hong Xing Zhou, *Appl. Math. Optim.*, 8(1982), 275-285.

〔4〕赵怡，Third IFAC Symposium on "control of distributed parameter systems" (preprint), pp. XX. 12-XX. 19, Toulouse, France, 1982.

〔5〕赵怡，*Research report* UCLA-ENG-8256.

A Form of Generalized Moment Theorem and a Discussion to Semilinear Control Systems

Zhao Yi

Abstract

In this paper, a general form of generalized moment theorem is given and applied to discuss a class of control problem for semilinear distributed parameter systems.