平面双曲方程组特征问题唯一可解性的离散现象(I)*

吴兹潜　禤启沃　　　钟钜康
（计算机科学系）　（华南工学院数力系）

摘　要

本文证明了二阶双曲方程组一类特征问题的唯一可解牲，当且仅当方程组的参数满足某个耦合关系时失去.

十年来人们在讨论非主型方程离散现象（文献[1]等）时发现：方程参数在适合某个耦合等式时，解的某些性态发生突变，低阶项对解的性态存在影响。我们在研究二阶两个变数两个未知函数的常系数线性偏微分方程组的定解问题时也发现类似的情况。本文放宽了文[2]中关于支柱的限制，不要求它们相交一点；不仅考虑解唯一性，还考虑解存在性，证明了一类特征问题唯一可解性不成立情况也是离散性地发生的。

§1. 一类函数方程

本节给出关于$f(x)$的函数方程

$$f(x)-\sum_{i=1}^{l}a_i f(\alpha_i x+\beta_i)=h(x),\quad -\infty<x<\infty \tag{1}$$

的若干结果，其中a_i、α_i、β_i均为常数，在所有β_i为零时，（1）成为

$$Lf(x)\equiv f(x)-\sum_{i=1}^{l}a_i f(\alpha_i x)=h(x). \tag{2}$$

为方便计，记

$$L^{-1}h(x)\equiv\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{l}a_{i_1}\cdots a_{i_p}h(\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_p}x)$$

定理1 [2,3] 假设所有$|\alpha_i|$小于1，$Q_n\equiv\sum_{i=1}^{l}|a_i\alpha_i^n|<1$，又设$h(x)=O(x^n)$、$f(x)=O(x^n)$，则级数$L^{-1}h(x)$收敛于方程（2）的唯一解，而且若$h(x)\epsilon c^n$，则$L^{-1}h(x)$亦然.

本文1984年5月收到.
* 本项研究由中山大学高等学术研究中心基金会第二项合约资助.

定理 2 假设所有$|\alpha_i|$小于1，$Q_n\equiv\sum_{i=1}^{l}|a_i\alpha_i^n|<1$，$q_j\equiv\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^j\neq1$（$j=0,1,\cdots,n-1$），又设$f(x)$与$h(x)$在$x=0$有$n$阶导数，则方程（2）有唯一的解。

证 设$f(x)$满足（2），易知$f^{(j)}(0)=h^{(j)}(0)/(1-q_j)$，$j=0,1,\cdots,n-1$。命$\tilde f(x)=f(x)-\sum_{j=0}^{n-1}f^{(j)}(0)x^j/j!$、$\tilde h(x)=h(x)-\sum_{j=0}^{n-1}h^{(j)}(0)x^j/j!$，则$\tilde f(x)=O(x^n)$、$\tilde h(x)=O(x^n)$，且有$L\tilde f(x)=\tilde h(x)$。由定理1及条件$Q_n<1$得$\tilde f(x)=L^{-1}\tilde h(x)$，于是，

$$f(x)=L^{-1}\tilde h(x)+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{h^{(j)}(0)x^j}{(1-q_j)j!}\tag{3}$$

反之易验证，由（3）表示的函数适合方程（2）。证毕。

类似地可证

定理 3 假设所有$|\alpha_i|$小于1，$Q_n\equiv\sum_{i=1}^{l}|a_i\alpha_i^n|<1$，对于小于$n$的非负整数$j$有

$$q_j\equiv\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^j\begin{cases}=1, & j=j_1,\cdots,j_r,\\ \neq1, & j\neq j_1,\cdots,j_r,\end{cases}$$

又设$f(x)$与$h(x)$在$x=0$有n阶导数，则方程（2）有解的充要条件是

$$h^{(j_t)}(0)=0,\quad t=1,2,\cdots,r,$$

全体解为

$$f(x)=L^{-1}\tilde h(x)+\sum_{\substack{j=0\\ j\neq j_1,\cdots,j_r}}^{n-1}\frac{h^{(j)}(0)x^j}{(1-q_j)j!}+\sum_{t=1}^{r}c_tx^{j_t},$$

其中$\tilde h(x)=h(x)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{h^{(j)}(0)}{j!}x^j$，$c_1$、$c_2$、$\cdots$、$c_r$是任意常数。

定理 4 假设所有$|\alpha_i|$小于1，$f(x)$与$h(x)$在$x=0$有任意阶导数，则方程(2)唯一可解的充要条件是

$$q_j\equiv\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^j\neq1,\quad j=0,1,\cdots.\tag{4}$$

若条件（4）不成立，则方程（2）有解的充要条件是自由项$h(x)$满足相容性条件$h^{(j_t)}(0)=0$，$t=1,2,\cdots,r$，解在相差多项式$p(x)\equiv\sum_{t=1}^{r}c_tx^{j_t}$的意义下唯一，其中$j_1,\cdots,j_r$是使$q_j=1$的所有非负整数（其个数必定有限），$c_1$、$\cdots$、$c_r$是任意常数。

证 设条件(4)成立。因诸$|\alpha_i|$小于1，故有非负整数n_0，使当$n\geqslant n_0$时，$Q_n\equiv\sum_{i=1}^{l}|a_i\alpha_i^n|<1$。由定理2及$n\geqslant n_0$的任意性，方程(2)是唯一可解的。

设条件(4)不成立，则上述n_0必大于$\max_{1\leqslant t\leqslant r}j_t$，于是对于任意$n\geqslant n_0$，由定理3知方程(2)有解的充要条件是$h^{(j_t)}(0)=0$，$t=1,2,\cdots,r$。解在相差多项式$p(x)\equiv\sum_{t=1}^{r}c_tx^{j_t}$意义下

唯一。证毕。

定理 5　假设$f(x)\epsilon C^n$，$Q_n\equiv\sum_{i=1}^{l}|a_i\alpha_i{}^n|<1$，则函数方程

$$f(x)=\sum_{i=1}^{l}a_if(\alpha_ix+\beta_i),\quad |\alpha_i|<1 \tag{5}$$

有非平凡解的充要条件是有小于n的非负整数j满足

$$qj\equiv\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_ij=1 \tag{6}$$

所有非平凡解都是j_r次多项式，其中j_r是适合$q_i=1$的最大非负整数。

证　设$f(x)$满足方程(5)，于是$f^{(n)}(x)$满足

$$f^{(n)}(x)=\sum_{i=1}^{l}ai\alpha i^nf^{(n)}(\alpha_ix+\beta_i),$$

因$Q_n\equiv\sum_{j=1}^{l}|a_i\alpha_i{}^n|<1$，故容易从所得式子导出$f^{(n)}(x)\equiv0$，从而有

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n-1}\lambda jxj \tag{7}$$

把(7)代入(5)并比较两边各幂次的系数，得到关于λ_0、λ_1、…、λ_{n-1}的线性方程组

$$\lambda k=\sum_{j=k}^{n-1}\lambda_jC_j{}^{j-k}\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i{}^k\beta_i{}^{j-k},k=0,1,\cdots,n-1, \tag{8}$$

该方程组的系数矩阵呈上三角状，对角元素乘积为$\prod_{k=0}^{n-1}(1-q_k)$。如果小于n的全体非负整数j都使$q_i\neq1$，则所有λj为零，从而$f(x)$恒为零。反之，若有非负整数j适合$q_i=1$而j_r为其最大者，则线性方程组（9）的非平凡解可表为

$$(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1})=(\lambda_0,\cdots,\lambda j_r,0,\cdots,0)$$

其中λ_{j_r}是任意常数。因此$f(x)$是一个j_r次多项式，而且容易验证这样的多项式确实是方程（6）的解。

由定理5不难证明

定理 6　函数方程(6)在C^∞类中有非平凡解的充要条件是，存在非负整数j适合$qj\equiv\sum_{j=1}^{l}a_i\alpha_ij=1$，所有非平凡解都是$j_r$次多项式，其中$j_r$是使$q_i=1$成立的最大非负整数$j$。

定理7　设$h(x)\in C^\infty$，则函数方程

$$f(x)=\sum_{i=1}^{s}ai\,f(\alpha ix)+\sum_{j=1}^{T}b_j\,f(\beta j)+h(x),\quad|\alpha_i|<1 \tag{9}$$

在c^∞类唯一可解的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{8}a_i\,\alpha_i^n\neq1,\qquad n=1,2,\cdots; \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{S} a_i+\sum_{j=1}^{T} b_j \neq 1. \tag{11}$$

证 唯一性部分已由定理6给出。下边证明方程(9)一般可解性（即不依赖自由项的解存在性）成立的充要条件是(10)、(11)。

先证充分性。据定理4，条件(10)保证了方程

$$g(x)=\sum_{i=1}^{S} a_i g(\alpha_i x)+h(x)-h(0) \tag{12}$$

有C^∞解$g(x)$。当$\sum_{i=1}^{S} a_i \neq 1$时，$g(x)$唯一；当$\sum_{i=1}^{S} a_i=1$时，$g(x)$在相差一个任意常数意义下唯一。条件(11)保证了常数$\omega=[\sum_{j=1}^{T} b_j\, g(\beta_j)+h(0)]/(1-\sum_{i=1}^{S} a_i-\sum_{j=1}^{T} b_j)$的存在。易知函数$f(x)=g(x)+\omega$满足方程(9)。

再证必要性。若有正整数n_t适合$\sum_{i=1}^{S} a_i\alpha_i^{n_t}=1$，不难看出

$$h^{(n_t)}(0)=0 \tag{13}$$

是方程(9)有解的必要条件。若所有正整数n都使$\sum_{i=1}^{S} a_i\alpha_i^{n} \neq 1$，但$\sum_{i=1}^{S} a_i+\sum_{j=1}^{T} b_j=1$，我们断言方程(9)有解的必要条件是自由项$h(x)$满足

$$\sum_{j=1}^{T} b_j g(\beta_j)+h(0)=0, \tag{14}$$

其中$g(x)$是方程(12)的解。事实上，若方程(9)有解$f(x)$，则由(9)得

$$f(0)=\sum_{i=1}^{S} a_i f(0)+\sum_{j=1}^{T} b_j f(\beta_j)+h(0), \tag{15}$$

因为$\sum_{i=1}^{S} a_i+\sum_{j=1}^{T} b_j=1$，故(15)可写为$\sum_{j=1}^{T} b_j[f(\beta_j)-f(0)]+h(0)=0$，或

$$\sum_{j=1}^{T} b_j\tilde{f}(\beta_j)+h(0)=0, \tag{16}$$

其中$\tilde{f}(x)=f(x)-f(0)$。由(9)及(15)知$\tilde{f}(x)$满足方程(12)，由条件$\sum_{i=1}^{S} a_i\alpha_i^n \neq 1$，$\sum_{i=1}^{S} a_i+\sum_{j=1}^{T} b_j=1$以及定理4知，尽管(12)的解$g(x)$可能相差一个任意常数，但是$\sum_{j=1}^{T} b_j g(x)=(1-\sum_{i=1}^{S} a_i)g(x)$总是唯一的，于是$\sum_{j=1}^{T} b_j\tilde{f}(x)=\sum_{j=1}^{T} b_j g(x)$，从而由(16)可推出(14)。

最后不难看出，(13)、(14)不仅是(9)有解的必要条件，而且还是充分条件。证毕。

利用定理7并适当变换自变数与函数，可证

定理8 设$h(x)\in C^\infty$，则函数方程

$$f(x)=af(\alpha x+\beta)+\sum_{j=1}^{T}b_jf(\beta_j)+h(x),\ \ \alpha\neq1$$

在C^∞类唯一可解的充要条件是

$$a+\sum_{j=1}^{T}b_j\neq1,\qquad a\alpha^n\neq1\qquad(n=1,2\cdots\cdots).$$

§2. 平面双曲组特征问题的离散现象

第一类双曲方程组[2]

$$u_{xx}+2b_1u_{xy}+2v_{xy}=0,\qquad 2b_3u_{xy}+2b_1v_{xy}+v_{yy}=0$$

$$b_3=ab\neq0,\quad a=\frac{k-2b_1}{2},\quad b=\frac{1/k-2b_1}{2},\ 0<k<1,\ b_1\neq0 \tag{H_1}$$

的一般解是

$$u(x,y)=f_3(x-ky)+f_4(x-y/k)+f_2(y),$$
$$v(x,y)=bf_3(x-ky)+af_4(x-y/k)+f_1(x), \tag{H_1^*}$$

其中f_i是任意二次连续可微函数。由(H_1^*)得

$$f_3'(x-ky)=\frac{v_y-au_x/k}{kb-a/k},\qquad f_4'(x-y/k)=\frac{kbu_x+v_y}{kb-a/k}. \tag{17}$$

从(17)知，u、v在全平面任意可微的充要条件是$f_i(t)$任意可微。

考虑(H_1)的一类特征问题，其各种提法列于附表，在这些问题中，关于u、v的定解条件都是各占两个。

定理9　附表第17—20号问题在C^∞类唯一可解的充要条件是

$$\frac{-b}{a}(-k^2)^j\neq1,\qquad j=2,3\cdots. \tag{18}$$

证　只证19号问题，定解条件是

$$u\Big|_{y=c_2}=\alpha(x),\quad u\Big|_{x-ky=c_4}=\beta(y),\quad v\Big|_{x-y/k=c_3}=\gamma(x),\quad v\Big|_{x-ky=c_4}=\delta(x).$$

不失一般性地取$c_2=c_4=0$。结合上述定解条件与一般解（H_1^*）得

$$\begin{cases}u(x,y)=-f_4(x-ky)+f_4(x-y/k)-f_4((k-\frac{1}{k})y)\\ \qquad\qquad+f_4(0)+\alpha(x-ky)-\alpha(0)+\beta(y),\\ v(x,y)=-bf_4(x-ky)+af_4(x-y/k)-af_4((1-\frac{1}{k^2})x)\\ \qquad\qquad+bf_4(0)+b\alpha(x-ky)-b\alpha(0)+\delta(x),\end{cases} \tag{19}$$

其中$f_4(t)$满足函数方程

$$f_4(t)=\frac{-b}{a}f_4(k^2c_3-k^2t)+f_4(c_3)+\frac{b}{a}f_4(0)+h(t) \tag{20}$$

$$h(t)=\frac{b}{a}\alpha(k^2c_3-k^2t)-\frac{1}{a}\gamma\left(\frac{k^2t}{k^2-1}\right)+\frac{1}{a}\delta\left(\frac{k^2t}{k^2-1}\right)-\frac{b}{a}\alpha(0).$$

由u、v在全平面任意可微的假设，$h(t)$与诸$f_i(t)$属C^∞类. 对于方程(20)，注意到

1) $\frac{-b}{a}(-k^2)\neq 1$;

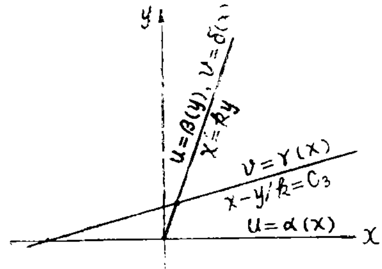
2) $\frac{-b}{a}+1+\frac{b}{a}=1$;

3) 利用下图中的几何关系得

$$\gamma\left(\frac{k^2c_3}{k^2-1}\right)=v\left(\frac{k^2c_3}{k^2-1},\ \frac{kc_3}{k^2-1}\right)=\delta\left(\frac{k^2c_3}{k^2-1}\right). \tag{21}$$

并由(21)可验证方程(20)的自由项$h(x)$满足相容性条件

$$g\left(c_3-\frac{k^2c_3}{1+k^2}\right)+\frac{b}{a}g\left(0-\frac{k^2c_3}{1+k^2}\right)+h\left(\frac{k^2c_3}{1+k^2}\right)=0,$$



其中$g(t)$是函数方程

$$g(t)=\frac{-b}{a}g(-k^2t)+h\left(t+\frac{k^2c_3}{1+k^2}\right)-h\left(\frac{k^2c_3}{1+k^2}\right)$$

的解，根据定理8，若条件(18)成立，则方程(20)有解，不同的解相差一个任意常数，再注意到(19)及定解条件，便不难知道特征问题的解存在而且唯一；如果条件(18)不成立，即存在一个不小于2的整数j_0使$\frac{-b}{a}(-k^2)^{j_0}=1$成立，则当自由项$h(t)$满足相容性条件

$$h^{(j_0)}\left(\frac{k^2c_3}{1+k^2}\right)=0 \tag{22}$$

时方程(20)才有解，解不唯一，任两个解相差一个j_0次多项式. 再注意到(19)便知特征问题的解存在但不唯一. 当相容条件(22)不成立，方程(20)无解. 从而特征问题无解. 证毕.

类似地，利用第1节关于函数方程的结论可以证明：

附表第1--10号问题在C^∞类唯一可解的充要条件是$\frac{b}{a}k^{2j}\neq 1$、$j=2,3,4,\cdots\cdots$；第11--13号问题在C^∞类唯一可解的充要条件是$\frac{a}{a-b}(1-k^{-2})^j\neq 1, j=2,3,4,\cdots\cdots$；第14--16号问题在$C^\infty$类唯一可解的充要条件是$\frac{b}{b-a}(1-k^2)^j\neq 1$，$j=2,3,4\cdots\cdots$；第21、22、23、24号问题在$C^\infty$类解唯一的充要条件分别是

$$\frac{a}{b}[k^j-(k-\frac{1}{k})^j]^2\neq 1,\qquad j=2,3,4,\cdots;$$

$$\frac{b}{a}\left[\frac{1}{kj}-\left(\frac{1}{k}-k\right)^{j}\right]^{2}\neq 1,\qquad j=2,3,4,\cdots;$$

$$(-1)^{j}\frac{b}{a}\left[(1-k^{2})^{j}-1\right]\neq 1,\qquad j=2,3,4\cdots;$$

$$(-1)^{j}\frac{a}{b}\left[\left(1-\frac{1}{k^{2}}\right)^{j}-1\right]\neq 1,\quad j=2,3,4,\cdots.$$

附表　　　方程组(H_1)一类特征问题的提法

	$x=c_1$	$y=c_2$	$x-y/k=c_3$	$x-ky=c_4$		$x=c_1$	$y=c_2$	$x-y/k=c_3$	$x-ky=c_4$
1	u,v	u,v			13		u,v	u	v
2			u,v	u,v	14	u,v		v	u
3	v	u	u	v	15	u,v			u,v
4	v	u	v	u	16		u,v	u,v	
5	u,v	u		v	17	u	u	v	v
6	v	u,v		u	18	v	v	u	u
7	v	u		u,v	19		u	v	u,v
8	u,v	u	v		20		u	u,v	v
9	v	u,v	u		21	u	v	u	v
10	v	u	u,v		22	u	v	v	u
11	u,v		u,v		23	u		v	u,v
12		u,v		u,v	24	u		u,v	v

参 考 文 献

〔1〕F·Treves, *Proc, Amer. Math.*, Soc. 46(1974),229—233.

〔2〕华罗庚、吴兹潜、林伟，二阶两个自变数两个未知函数的常系数线性偏微分方程组，科学出版社，1979.

〔3〕吴兹潜，禤启沃，函数矩阵方程与波的有限传播法，中山大学学报（自然科学版）1984,1.

Discrete Phenomena in Unique Solvability for Goursat's Problems of the Hyperbolic System of the Second Order

Wu Ciqian　Xuan Qiwo　Zhong Zukang

Abstract

We have proved that the unique solvability for a class of Goursat's problems of the hyperbolic system of second order disappears if and only if the parameters of the system satisfy a certain coupling relation.