Ψ-(K)拟线性算子的等度连续性

范 达

（数 学 系）

摘 要

本文论及的空间 E、F和 $F_\alpha(\alpha\in\Lambda)$均为复数域上的拓扑线性空间，$\Psi(F)$为关于$F$的一个基族。本文主要是讨论$\Psi$-$(K)$拟线性算子族$A_\alpha:E\to F(\alpha\in\Lambda)$的等度连续性和按$\phi\in\Psi(F)$等度连续性（见定理1和2）。同时，进一步讨论算子族中诸算子的象空间可以是不同的空间、即 $A_\alpha:E\to F_\alpha(\alpha\in\Lambda)$ 的情形，并有类似的结果（见定理3和4）.

Pettis B. J.利用拓扑群理论，在一般拓扑线性空间中，建立了按一族伪范数(pseudo-norm)Ψ-拟线性(quasi-linear)算子族在零点的等度连续性和按伪范数$\phi\in\Psi$的等度连续性的命题[1]。本文拟在文〔2〕方法的基础上，作相应的推广，讨论一族按Ψ-(K)拟线性算子，不须拓扑群理论，直接建立了较文〔1〕更广的命题(见定理2、4及其推论)；同时，定理1和3中建立的等价命题也是很有趣的。

本文论及的空间 E、F 和 $F_\alpha(\alpha\in\Lambda)$均是复数域上的拓扑线性空间。$\mathscr{U}_E$ 表示空间E中零点θ的邻域基，其成员均是 E 中开的圆形集；$\Psi(F)$ 表示一族定义在空间 F 上具有如下性质的实值泛函ϕ：

(i) $\phi(\theta)=0$，其中θ是 F 中的零点；

(ii) $\phi(y_1+y_2)\leqslant\phi(y_1)+\phi(y_2)$， $\forall y_1,\ y_2\in F$；

(iii) ϕ 在零点 θ 上半连续；

(iv) 对于每个 $V\in\mathscr{U}_F$，存在某个 $\phi\in\Psi(F)$，使得$\{y\in F\mid\phi(y)<1\}\subset V$。

容易证明，每个$\phi\in\Psi(F)$在空间 F 上均一致连续。我们称这样的一族实值泛函$\Psi(F)$为关于 F 的一个基族，凡拓扑线性空间必有这样的基族[1]。

定义 如果算子族 $A_\alpha:E\to F(\alpha\in\Lambda)$ 具有性质：

(S_1) 对于每个$\phi\in\Psi(F)$，存在正数 K，使得对于每个 $\alpha\in\Lambda$，相应地有 $\alpha'\in\Lambda$，成立关系式：

$$\phi[A_\alpha(x_1+x_2)]\leqslant K[\phi(A_{\alpha'}x_1)+\phi(A_{\alpha'}x_2)],\qquad \forall x_1,\ x_2\in E;$$

(S_2) 对于每个$\phi\in\Psi(F)$和自然数 n，有

$$\phi\left(A_\alpha\left(\frac{x}{n}\right)\right)=\phi\left(\frac{1}{n}A_\alpha x\right),\qquad \forall x\in E \text{ 及 } \alpha\in\Lambda;$$

本文于1983年8月收到

则这族算子 $\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 称为按 Ψ-(K) 拟线性的。特别地，当 $K=1$ 时，若有 $\alpha'=\alpha\in\Lambda$ $(\forall\alpha\in\Lambda)$，使得 (S_1) 成立，就说 $\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 是按 Ψ-拟线性的。

显然，对于具有性质 (S_2) 的算子族 $\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$，必有 $\phi(A_\alpha\theta)=0$，$\forall\phi\in\Psi(F)$。

我们说 $\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 在点 $x_0\in E$ 附近一致有界，是指对于每个 $V\in\mathscr{U}_F$，存在正数 M 和点 x_0 的一个邻域 $U(x_0)\triangleq x_0+U(U\in\mathscr{U}_E)$，使得 $A_\alpha(U(x_0))\subset MV$，$\forall\alpha\in\Lambda$。

引理 1 如果算子族 $\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 在集合 $D\subset E$ 上一致有界，则对于每个 $\phi\in\Psi(F)$，泛函族 $\{\phi\circ A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 在 D 上一致有上界，即 $\sup\limits_{\alpha\in\Lambda}\sup\limits_{x\in D}\phi(A_\alpha x)<+\infty$。

定理 1 如果算子族 $\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 具有性质 (S_2)，那么，下列三个命题等价：

(p_1) 对于每个 $\phi\in\Psi(F)$，泛函族 $\{\phi\circ A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 在零点 $\theta\in E$ 等度连续；

(p_2) $\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 在零点 $\theta\in E$ 等度连续；

(p_3) $\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 在零点 $\theta\in E$ 附近一致有界。

特别地，若 $\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 是按 Ψ-(K) 拟线性的，则上述三个等价命题亦和如下命题等价：

(p_4) $\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 在某个点 $x_1\in E$ 附近一致有界，并且在点 $-\lambda x_1\in E$（其中 λ 为某个正数）有界。

证明 首先，设 $\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 具有性质 (S_2)，往证 $(p_1)\Rightarrow(p_2)$：设 $V\in\mathscr{U}_F$，选取 $W\in\mathscr{U}_F$ 和 $\phi\in\Psi(F)$，使得 $W+W\subset V$ 和 $\{y\in F|\phi(y)<1\}\subset W$；那么，根据 (p_1) 有 $U\in\mathscr{U}_E$，使得 $A_\alpha x-A_\alpha\theta\in W+W\subset V$，$\forall x\in U$ 及 $\alpha\in\Lambda$。

$(p_2)\Rightarrow(p_3)$：设 $V\in\mathscr{U}_F$，选取 $\phi\in\Psi(F)$ 和 $V^*\in\mathscr{U}_F$，使得 $V^*\subset\{y\in F|\phi(y)<1\}$，那么，对 V^* 应用 (p_2)，便可证明必有 $U\in\mathscr{U}_E$，使得 $A_\alpha(U)\subset V$，$\forall\alpha\in\Lambda$。

$(p_3)\Rightarrow(p_1)$：设 $\phi\in\Psi(F)$ 和 $\varepsilon>0$，选取 $V\in\mathscr{U}_F$，使得 $V\subset\{y\in F||\phi(y)|<\varepsilon\}$，再由 (p_3)，有正整数 N 和 $U\in\mathscr{U}_E$，使得 $A_\alpha(U)\subset NV$，$\forall\alpha\in V$；因此，只要选取 $W\in\mathscr{U}_E$，使得 $NW\subset U$，便有 $|\phi(A_\alpha x)|<\varepsilon$，$\forall x\in W$ 及 $\alpha\in\Lambda$。

现在，假设 $\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 是按 Ψ-(K) 拟线性的，往证 $(p_4)\Rightarrow(p_3)$：设 $V\in\mathscr{U}_F$，选取 $\phi\in\Psi(F)$，正数 ε 和 $V^*\in\mathscr{U}_F$，使得 $2K\varepsilon<1$ 和

$$V^*\subset\{y\in F|\phi(y)<\varepsilon\}\subset\{y\in F|\phi(y)<1\}\subset V,$$

那么，根据 (p_4) 对 V^*，有正整数 N_1、点 $x_1\in E$ 的邻域 $U(x_1)\triangleq x_1+U_1(U_1\in\mathscr{U}_E)$ 和 $\lambda>0$，使得当 $n\geqslant N_1$ 时，有

$$\phi\left(\frac{1}{n}A_\alpha x\right)<\varepsilon,\qquad \forall x\in U(x_1)\text{ 及 }\alpha\in\Lambda,$$

$$\phi\left(\frac{1}{n}A_\alpha(-\lambda x_1)\right)<\varepsilon,\qquad \forall\alpha\in\Lambda.$$

再选取 $U\in\mathscr{U}_E$ 和正有理数 $r=\frac{n_1}{m_1}$（其中 m_1 和 n_1 均为正整数），使得

$$U+U\subset U_1\text{ 和 }\frac{1}{r}(\lambda-r)x_1\in U,$$

于是，对于每个 $x\in U$，均可写成 $x=n_1x_0-m_1\lambda x_1$，其中 $x_0\triangleq\frac{1}{n_1}x+\frac{1}{r}(\lambda-r)x_1+x_1\in U(x_1)$，因此，对于正整数 $N=N_1m_1n_1$，有

$$\phi\left(\frac{1}{N}A_\alpha x\right)\leqslant K\left[\phi\left(\frac{1}{N}A_{\alpha'}(n_1x_0)\right)+\phi\left(\frac{1}{N}A_{\alpha'}(-m_1\lambda x_1)\right)\right]$$

$$\leqslant K[\varepsilon+\varepsilon]=2K\varepsilon<1,\quad \forall\alpha\in\Lambda,$$

所以，有 $A_\alpha(U)\subset NV$，$\forall\alpha\in\Lambda$。

再证 $(p_1)\Rightarrow(p_4)$：设 $V\in\mathscr{U}_F$，$x_1\in E$ 和 $\lambda>0$，选取$\phi\in\Psi(F)$，使得$\{y\in F|\phi(y)<1\}\subset V$，那么，根据$(p_1)$，有 $U\in\mathscr{U}_E$，使得$\phi(A_\alpha x)<1$，$\forall x\in U$，再选取 $U_1\in\mathscr{U}_E$ 和正整数 N，使得

$$U_1+U_1\subset U \text{ 和 } x_1,\ -\lambda x_1\in NU_1,$$

又因为，$U(x_1)\triangleq x_1+U_1\subset NU$，所以，有

$$A_\alpha(U(x_1))\subset NV \text{ 和 } A_\alpha(-\lambda x_1)\in NV,\quad\forall\alpha\in\Lambda。\square$$

推论 对于具有性质(S_2)的算子族 $\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$，如果在零点 $\theta\in E$ 附近一致有界，则在 E 中任一点均有界，从而，对于每个 $\phi\in\Psi(F)$，有

$$\sup_{\alpha\in\Lambda}\phi(A_\alpha x)<+\infty,\quad\forall x\in E。$$

引理 2 设 $\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$是一族按 Ψ-(K)拟线性算子，如果满足条件：

(a) 对于每个 $V\in\mathscr{U}_F$，存在正数M_1 和某个点 $a\in E$的一族邻域$U_\alpha(a)\triangleq a+U_\alpha(U_\alpha\in\mathscr{U}_E$，$\alpha\in\Lambda)$，使得

$$A_\alpha(U_\alpha(a))\subset M_1V \text{ 和 } A_\alpha(-a)\in M_1V,\quad\forall\alpha\in\Lambda;$$

则对于每个 $V\in\mathscr{U}_F$，存在正数 M_0 和一族 $W_\alpha\in\mathscr{U}_E(\alpha\in\Lambda)$，使得 $A_\alpha(W_\alpha)\subset M_0V$，$\forall\alpha\in\Lambda$。

定理 2 设 $\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 是一族按 Ψ-(K)拟线性算子，如果满足条件(a)和条件：

(b) E 中存在一个第二纲子集 Q，而集合 $-\lambda Q$(λ 为某个正数）内有一个稠密集 G，使得 $\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 在并集$Q\cup G$上每个点均有界；那么，定理 1 中诸等价命题$(p_i)(i=1,2,3,4)$均成立。特别地，当$K=1$ 时，对于每个$\phi\in\Psi(F)$，(1)泛函 $\phi(x)\triangleq\sup\limits_{\alpha\in\Lambda}\phi(A_\alpha x)$ 在 E 中一致连续；(2)如果这族算子$\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$是按 Ψ-拟线性的，则泛函族 $\{\phi\circ A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 在 E 中等度连续。

证明 设 $V\in\mathscr{U}_F$，选取$\phi\in\Psi(F)$，$\varepsilon>0$ 和 $V^*\in\mathscr{U}_F$，使得 $2K\varepsilon<1$ 和

$$V^*\subset\{y\in F|\phi(y)<\varepsilon\}\subset\{y\in F|\phi(y)<1\}\subset V;$$

那么，根据引理 2，对 V^* 有正整数 M_0 和 $W_\alpha\in\mathscr{U}_F(\alpha\in\Lambda)$，使得当 $M\geqslant M_0$ 时，有

$$\phi\left(\frac{1}{M}A_\alpha x\right)<\varepsilon,\quad\forall x\in W_\alpha \text{ 及 } \alpha\in\Lambda。$$

现在，作一集列 $Q_n\triangleq\{x\in Q|\sup\limits_{\alpha\in\Lambda}\phi\left(\frac{1}{n}A_\alpha x\right)\leqslant\varepsilon\}$，

于是，根据条件(b)，有$Q=\bigcup\limits_{n=M_0}^{\infty}Q_n$，又因为Q是第二纲集，因此，存在正整数$N\geqslant M_0$，点 $x_0\in\bar{Q}$和$U_0\in\mathscr{U}_E$，使得

$$x_0+U_0\subset Int\bar{Q}_N\subset\bar{Q}_N\subset\bar{Q}=-\frac{1}{\lambda}\bar{G},$$

因此，根据条件(b)，存在点$x_1\in x_0+U_0$和正整数N_0，使得当$n\geqslant N_0$时，有$A_\alpha(-\lambda x_1)\in nV$，

$\forall\alpha\in\Lambda$；并且，存在$U_1\in\mathscr{U}_E$，使得$U(x_1)\triangleq x_1+U_1\subset\bar{Q}_N$，从而，对于每个$x\in U(x_1)$，有$\xi_\alpha\in x+W_\alpha(\alpha\in\Lambda)$，使得

$$\sup_{\alpha\in\Lambda}\phi\left(\frac{1}{N}A_\alpha\xi\alpha'\right)<\varepsilon \text{ 和 } \phi\left(\frac{1}{N}A_\alpha(x-\xi_\alpha)\right)<\varepsilon,\quad \forall\alpha,\alpha'\in\Lambda,$$

所以，当$n\geqslant N$时，有$A_\alpha(U(x_1))\subset nV$，$\forall\alpha\in\Lambda$；故得证定理1中命题($P_4$)成立。□

推论　如果定理2中的假设条件(b)换成：E中有一个第二纲的对称子集Q，使得$\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$在$Q$上有界；那么，定理2的原结论仍成立。

现在，我们进一步讨论诸算子的象空间可以是不同的情形。所谓算子族$A_\alpha:E\to F_\alpha(\alpha\in\Lambda)$是按$\Psi_\alpha-(K)$拟线性的，是指这族算子具有如下性质：对于每族$\phi_\alpha\in\Psi(F_\alpha)(\alpha\in\Lambda)$，

(T_1)　存在正数K，使得对于每个$\alpha\in\Lambda$，相应地有$\alpha'\in\Lambda$，成立关系式：

$$\phi_\alpha(A_\alpha(x_1+x_2))\leqslant K[\phi_{\alpha'}(A_{\alpha'}x_1)+\phi_{\alpha'}(A_{\alpha'}x_2)],\quad \forall x_1,x_2\in E;$$

(T_2)　对于每个$\alpha\in\Lambda$和自然数n，有

$$\phi_\alpha\left(A_\alpha\left(\frac{x}{n}\right)\right)=\phi_\alpha\left(\frac{1}{n}A_\alpha x\right),\quad \forall x\in E.$$

上述关于具有相同象空间F的算子族的诸命题，完全可以推广到象空间可以是不同空间的算子族$A_\alpha:E\to F_\alpha(\alpha\in\Lambda)$，而且相应命题的证明方法是相仿的，事实上，只需将有关V，ϕ和F换成相应的V_α，ϕ_α和$F_\alpha(\alpha\in\Lambda)$等等。特别有

定理3　如果算子族$\{A_\alpha:E\to F_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$具有性质($T_2$)，那么，下列三个命题等价：

(q_1)　对于每族$\phi_\alpha\in\Psi(F_\alpha)(\alpha\in\Lambda)$，泛函族$\{\phi_\alpha\circ A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$在零点$\theta\in E$等度连续；

(q_2)　对于每族$V_\alpha\in\mathscr{U}_{F_\alpha}(\alpha\in\Lambda)$，存在$U\in\mathscr{U}_E$，使得$A_\alpha x-A_\alpha\theta\in V_\alpha$，$\forall x\in U$及$\alpha\in\Lambda$；

(q_3)　对于每族$V_\alpha\in\mathscr{U}_{F_\alpha}(\alpha\in\Lambda)$，存在正数$M$和$U\in\mathscr{U}_E$，使得$A_\alpha(U)\subset MV_\alpha$，$\forall\alpha\in\Lambda$。

特别地，若$\{A_\alpha:E\to F_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$是按$\Psi_\alpha-(K)$拟线性的，则上述三个命题亦和如下命题等价：

(q_4)　对于每族$V_\alpha\in\mathscr{U}_{F_\alpha}(\alpha\in\Lambda)$和某个点$x_1\in E$，存在正数$M_1$和点$x_1$的一个邻域$U(x_1)\triangleq x_1+U_1(U_1\in\mathscr{U}_E)$，使得

$$A_\alpha(U(x_1))\subset M_1V_\alpha \text{ 和 } A_\alpha(-\lambda x_1)\in M_1V_\alpha,\quad \forall\alpha\in\Lambda,\text{ 其中}\lambda\text{为某个正数。}$$

定理4　设$\{A_\alpha:E\to F_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$是一族按$\Psi_\alpha-(K)$拟线性算子，如果满足条件：

(c)　对于每族$V_\alpha\in\mathscr{U}_{F_\alpha}(\alpha\in\Lambda)$，存在正数$M_1$和某个点$a\in E$的一族邻域$U_\alpha(a)\triangleq a+U_\alpha(U_\alpha\in\mathscr{U}_E,\alpha\in\Lambda)$，使得

$$A_\alpha(U_\alpha(a))\subset M_1V_\alpha \text{ 和 } A_\alpha(-a)\in M_1V_\alpha,\quad \forall\alpha\in\Lambda;$$

(d)　E中存在一个第二纲子集Q，而集合$-\lambda Q$(λ为某个正数)内有一个稠密集G，使得对于每个$x\in Q\cup G$和任意一族$V_\alpha\in\mathscr{U}_{F_\alpha}(\alpha\in\Lambda)$，存在正数$M_2$，有$A_\alpha x\in M_2V_\alpha$，$\forall\alpha\in\Lambda$；

那么，定理3中诸等价命题(q_i)($i=1,2,3,4$)均成立。特别地，当$K=1$时，对于每族$\phi_\alpha\in\Psi(F_\alpha)(\alpha\in\Lambda)$，(1)泛函$\phi(x)\triangleq\sup\limits_{\alpha\in\Lambda}\phi_\alpha(A_\alpha x)$在$E$中一致连续；(2)如果这族算子$\{A_\alpha:E\to F_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$是按$\Psi_\alpha$-拟线性的，则泛函族$\{\phi_\alpha\circ A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$在$E$中等度连续。

推论 如果定理 4 中的假设条件(d)换成：E中有一个第二纲的对称子集Q，使得对于每个$x\in Q$和任意一族$V_\alpha\in\mathscr{U}_{F_\alpha}(\alpha\in\Lambda)$，存在正数$M_2$，有$A_\alpha x\in M_2V_\alpha$，$\forall\alpha\in\Lambda$；那么，定理 4 的原结论仍成立。

最后，考察诸算子的象空间$F_\alpha(\alpha\in\Lambda)$的矢量拓扑均为局部凸的情形。这时，设$\mathscr{U}_{F_\alpha}$表示由$F_\alpha$中圆形凸集组成的$\theta$－邻域基，从而，每个$F_\alpha$均有一个基族$P(F_\alpha)\triangleq\{p_{V_\alpha}|V_\alpha\in\mathscr{U}_{F_\alpha}\}$，其中$p_{V_\alpha}$为定义在$F_\alpha$上关于$V_\alpha$的Minkowski泛函[3]。此时，根据Minkowski泛函的定义和关系式：

$\{y\in F_\alpha|p_{V_\alpha}(y)<1\}\subset V_\alpha\subset\{y\in F_\alpha|p_{V_\alpha}(y)\leqslant 1\}$，可以直接导出引理1的进一步结果：

引理 3 设$\{A_\alpha:E\to F_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$是任意的一族算子，而$D\subset E$；那么，对于每族$V_\alpha\in\mathscr{U}_{F_\alpha}(\alpha\in\Lambda)$，下列两命题等价：

(1) 存在正数M，使得$A_\alpha(D)\subset MV_\alpha$， $\forall\alpha\in\Lambda$；

(2) 泛函族$\{p_{V_\alpha}\circ A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$在$D$上一致有界。

因此，相应于定理 4 ，有

定理4′ 设$\{A_\alpha:E\to F_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$是一族按$P_\alpha-(K)$拟线性算子，如果满足条件：

(c′) 对于每族$p_{V_\alpha}\in P(F_\alpha)(\alpha\in\Lambda)$，存在正数$M$和某个点$a\in E$的一族邻域$U_\alpha(a)\triangleq a+U_\alpha(U_\alpha\in\mathscr{U}_F,\alpha\in\Lambda)$，使得$p_{V_\alpha}(A_\alpha x)\leqslant M$，$\forall x\in U_\alpha(a)$及$\alpha\in\Lambda$，并且$\sup\limits_{\alpha\in\Lambda}p_{V_\alpha}(A_\alpha(-a))<+\infty$；

(d′) E中存在一个第二纲子集Q，而集合$-\lambda Q$(λ为某个正数)内有一个稠密集G，使得对于每族$p_{V_\alpha}\in P(F_\alpha)(\alpha\in\Lambda)$，泛函族$\{p_{V_\alpha}\circ A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$在$Q\cup G$上有界；

那么，对于每族$V_\alpha\in\mathscr{U}_{F_\alpha}(\alpha\in\Lambda)$，存在$U\in\mathscr{U}_E$，使得$A_\alpha x-A_\alpha\theta\in V_\alpha$，$\forall x\in U$及$\alpha\in\Lambda$；并且，泛函族$\{p_{V_\alpha}\circ A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$在零点$\theta\in E$等度连续。特别地，当$K=1$时，(1)泛函$\phi(x)\triangleq\sup\limits_{\alpha\in\Lambda}p_{V_\alpha}(A_\alpha x)$在$E$中一致连续；(2)如果$\{A_\alpha:E\to F_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$是按$P_\alpha-$拟线性的，则$\{p_{V_\alpha}\circ A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$在$E$中等度连续。

推论 如果定理4′中的假设条件(d′)换成：E中有一个第二纲的对称子集Q，使得对于每族$p_{V_\alpha}\in P(F_\alpha)(\alpha\in\Lambda)$，泛函族$\{p_{V_\alpha}\circ A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$在Q上有界；那么，定理4′的原结论仍成立。

参考文献

〔1〕 Pettis B. J., *Ann. of Math.*, 52 (1950), 293—308.

〔2〕 范 达，中山大学学报(自然科学版)，1983，1，56—64.

〔3〕 Wong Y. C., *Introductory Functional Analysis*. The Chinese University of H. K., 1980.

Equicontinuity of Ψ -(K) Quasi-linear Operators

Fan Da

Abstract

The spaces E, F and F_α ($\alpha\in\Lambda$) discussed in this paper are topological vector spaces over the field of complex numbers. Let $\Psi(F)$ denote a family of upper semi-continuous at the zero element θ of F, subadditive functionals ψ defined on F with $\psi(\theta)=0$ such that for each V in the θ-neighbourhood base $\mathscr{U}_F$ there is some $\psi\in\Psi(F)$ such that $\{y\in F \mid \psi(y)<1\}\subset V$.

The purpose of this paper mainly discusses the equicontinuity as well as the equicontinuity on $\psi\in\Psi(F)$ for a family of $\Psi-(K)$ quasi-linear operators $A_\alpha:E\to F(\alpha\in\Lambda)$ (cf. theorems 1 and 2).

Meanwhile, we discuss the case where the images of the operators in the family may be different. The obtained results are anologous to theorems 1 and 2 (cf. theorems 3, 4 and 4′).