超导—铁磁性共存的平均场理论

刘金明　周义昌

（物理学系）

摘　要

本文用平均场理论讨论了在无限长圆柱体内有均匀分布的、方向平行于圆柱体轴线的磁矩时，存在超导—铁磁性共存的条件，其中超导序参量和磁矩都不为零。结果表明，无论居里温度高于还是低于超导转变温度，这种共存相都有可能存在。

超导性和铁磁性共存的性质与条件是多年来在实验上和理论上进行研究的重要问题[1,2]。近年来发表的实验工作表明在掺稀土盐类的超导体中有超导性和铁磁性共存的证据，但整个相图仍未搞清楚[3,4]。在理论工作方面，文献〔5〕和〔6〕分别研究了超导体内稀土离子的磁矩为空间周期性分布或螺旋状分布时二相共存的条件。他们的工作主要是说明非均匀磁场有利于超导性与铁磁性共存。而磁矩在超导体内为均匀分布时，情况比较复杂。因为这种均匀分布的磁矩象永久磁棒一样，在超导体内产生均匀的不为零的磁场，因而在超导体内诱发超导电流，当这种磁场较小时（对第一类超导体小于临界磁场，对第二类超导体小于出现量子磁通的第一临界磁场，即所谓Meissner区），超导电流激发的磁场可以将除了表面层以外的超导体内的磁场抵消。这就有可能保持超导性。但由于磁矩是处于超导体内，磁矩密度与超导序参量必须满足一定的关系才能实现两相共存。我们应用文献〔5〕的自由能泛函得出磁矩为均匀分布情况下，在Meissner 区有超导性与铁磁性共存解的条件。

一、自由能泛函与磁场

按文献〔5〕，自由能泛函为

$$F\{\Psi,\vec{\sigma},\vec{A}\}=\int d^3x\{\frac{a}{2}|\Psi|^2+\frac{b}{4}|\Psi|^4+\frac{r}{2}|(\nabla-ie_0\vec{A})\Psi|^2+$$
$$+\frac{1}{8\pi}(\nabla\times\vec{A})^2+\frac{a_\sigma}{2}\vec{\sigma}^2+\frac{b_\sigma}{4}\vec{\sigma}^4+\frac{1}{2}r_\sigma(\nabla\vec{\sigma})^2-\vec{\sigma}\cdot(\nabla\times\vec{A})+$$
$$+\frac{1}{2}[\eta_1\vec{\sigma}^2+\eta_2(\nabla\vec{\sigma})^2]|\Psi|^2\} \tag{1}$$

式中，$\Psi(\vec{x})$为超导性序参数，$\vec{\sigma}(\vec{x})$为磁性离子的磁矩，$\vec{A}(\vec{x})$为电磁场的矢势。a，b和r

为描述超导相的Landau自由能的参数。a_σ，b_σ和r_σ为描述铁磁相的Landau自由能的参数。η_1和η_2为描述传导电子极化作用和自旋反转散射作用的参数。

将(1)式对Ψ，$\vec{\sigma}$和$\vec{A}$进行变分便得下列运动方程：

$$\frac{r}{2}\nabla^2\Psi - ire_0\vec{A}\cdot\nabla\Psi - \frac{re_0{}^2}{2}\vec{A}^2\Psi - \frac{a}{2}\Psi - \frac{b}{2}\Psi^*\Psi^2 - \frac{1}{2}\eta_1\sigma^2\Psi - $$

$$-\frac{1}{2}\eta_2(\nabla\vec{\sigma})^2\Psi = 0 \tag{2}$$

$$(r_\sigma + \eta_2\Psi^*\Psi)\nabla^2\vec{\sigma} - a_\sigma\vec{\sigma} - b_\sigma\vec{\sigma}^3 + \nabla\times\vec{A} - \eta_1\vec{\sigma}\Psi^*\Psi = 0 \tag{3}$$

$$-\frac{1}{4\pi}\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) + \nabla\times\vec{\sigma} - \frac{ire_0}{2}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - re_0{}^2\Psi^*\Psi\vec{A} = 0 \tag{4}$$

我们采用$\nabla\cdot\vec{A}=0$的规范，(4)式可写成

$$\nabla^2\vec{A} = -4\pi(\vec{j}_\psi + \nabla\times\vec{\sigma}) \tag{5}$$

其中

$$\vec{j}_\psi = -\frac{ie_0 r}{2}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - re_0^2\Psi^*\Psi\vec{A} \tag{6}$$

为超导电流密度。从(5)式，应用标准场论方法可求得$\vec{A}$的解为

$$\vec{A} = \int\frac{\vec{j}_\psi(\vec{x}')}{r}d^3x' + \int\frac{\nabla'\times\vec{\sigma}(\vec{x}')}{r}d^3x' - \oint d\vec{s}'\times\frac{\vec{\sigma}(\vec{x}')}{r} \tag{7}$$

式中 $r=|\vec{x}-\vec{x}'|$，最后一项是来自磁矩密度$\vec{\sigma}$在超导体表面上不满足自然边条件时的贡献。而超导电流总是满足自然边条件的，因此没有来自$\vec{j}_\psi$的边界的贡献。应用场论公式，将封闭面积分化为体积分得

$$\vec{A} = \int\frac{\vec{j}'_\psi}{r}d^3x' + \int\frac{\vec{\sigma}'\times\vec{r}}{r^3}d^3x' \tag{8}$$

式中 $\vec{j}'_\psi = \vec{j}_\psi(\vec{x}'),\vec{\sigma}' = \vec{\sigma}(\vec{x}')$

于是便得磁感应强度$\vec{B}$为

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \int\frac{\vec{j}'_\psi\times\vec{r}}{r^3}d^3x' + \nabla\times\int\frac{\vec{\sigma}'\times\vec{r}}{r^3}d^3x' \tag{9}$$

这说明磁场是等于超导电流和磁矩两部分的贡献之和。(9)式就是推广了的毕—沙—拉定律。

由方程组(2)、(3)、(4)式可见，序参量为常数时有三种解，分别为：

(A)　$\Psi=0$，$\vec{\sigma}=0$ (10)

相应于正常金属的顺磁相。

(B)　$\Psi=0$，$\sigma=\sqrt{\dfrac{4\pi-a_\sigma}{b_\sigma}}$ (11)

相应于铁磁相。

(C) $\sigma=0,\Psi=\sqrt{-\frac{a}{b}}$ (12)

相应于超导相。

值得指出，在超导体中如设Ψ和σ都是不等于零的常量，则不可能使(9)式满足，也就是说不存在序参量Ψ和σ都是均匀的超导—铁磁性共存相。原因在于均匀分布的磁矩必将在超导体内产生均匀磁场，若此磁场较大，当然就破坏了超导性。若此磁场较小，超导体中的超导电流可以将磁力线排出，使超导体能保持超导性，才可能有超导—铁磁性共存。相应于这个超导电流的超导序参量Ψ因而不可能是一个常数。

二、磁矩均匀分布的一个解

设超导体为长圆柱形，取圆柱的轴线为Z轴。在超导体内均匀分布的磁矩$\vec{\sigma}=\sigma_0\vec{e}_z$将产生均匀磁场$\vec{B}_\sigma=4\pi\vec{\sigma}$。众所周知，长直螺旋管电流可产生均匀磁场。所以只要在圆柱体侧面上有一薄层沿表面的超导电流密度j_φ，就可以抵销此磁矩磁场，使圆柱体内的磁场$\vec{B}=0$。所以我们考虑如下形式的超导序参量Ψ：

$$\Psi(r,\varphi,z)=\Psi_0\theta(R_1-r)+\Psi_1(r)e^{-i\varphi}\theta(r-R_1)\theta(R_2-r) \tag{13}$$

式中，r,φ,z为柱坐标，Ψ_0为待定常数，$\Psi_1(r)$为待定函数。R_2为圆柱体的半径。$R_1=R_2-d$，$d\ll R_2$。$\theta(x)$为阶梯函数

$$\theta(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases} \tag{14}$$

(13)式的第二项可以给出在圆柱体表面厚度为d的薄层中有沿表面方向的超导电流。阶梯函数是为计算方便引进的。

应用阶梯函数，磁矩密度可写为

$$\vec{\sigma}=\sigma_0\,\theta(R_2-r)\,\vec{e}_z \tag{15}$$

式中σ_0为待定常数。这种均匀磁化产生的磁场为

$$\nabla\times\int\frac{\vec{\sigma}'\times(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}d^3x'=4\pi\sigma_0\theta(R_2-r)\,\vec{e}_z \tag{16}$$

设这个磁场较小，超导体仍保持在Meissner区内，即超导体内部的磁感应强度为零，只在表面上厚度为d的薄层内不为零，所以磁感应强度$\vec{B}$的形式为

$$\vec{B}=B_1(r)\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\vec{e}_z \tag{17}$$

式中$B_1(r)$为待定的函数，相应的矢势$\vec{A}$为：

$$\vec{A}=A_1(r)\vec{e}_\varphi \tag{18}$$

$$A_1(r)=\frac{\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)}{r}\int_{R_1}^{r}rB_1(r)dr+\frac{\theta(r-R_2)}{r}\int_{R_1}^{R_2}rB_1(r)dr \tag{19}$$

将(15)、(18)代进(6)式，便得超导电流为

$$\vec{j}_\psi=\left[-\frac{e_0r\Psi_1(r)^2}{r}-\frac{re_0^2\Psi_1(r)^2}{r}\int_{R_1}^{r}rB_1(r)dr\right]\theta(r-R_1)\,\theta(R_2-r)\vec{e}_\phi \tag{20}$$

代进(9)式，与(17)式比较，便得

$$0=4\pi\sigma_0-4\pi re_0\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi_1^2}{r}dr-4\pi re_0^2\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi_1^2(r')}{r'}\int_{R_1}^{r'}rB_1(r)drdr' \tag{21}$$

$$B_1(r)=4\pi\sigma_0-4\pi re_0\int_{r}^{R_2}\frac{\Psi_1^2}{r}dr-4\pi re_0^2\int_{r}^{R_2}\frac{\Psi_1^2(r')}{r'}\int_{R_1}^{r'}rB_1(r)drdr' \tag{22}$$

上式实际上是关于$B_1(r)$的第二类Fredhohm积分方程．可以化为等价的关于B_1的二阶线性微分方程，可用标准的级数解法求解。引进变量x为

$$x=r-R_1 \tag{23}$$

由于Ψ_1和B_1只是在厚度为d的薄层中才不为零，假如d很小，则x也是小量。于是可将Ψ_1和B_1展成x的幂级数：

$$\Psi_1(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3+\cdots \tag{24}$$

$$B_1(x)=b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots \tag{25}$$

其中$B_1(x)$没有常数项是因为$B_1(r=R_1)=0$。用x作自变量可将(21)、(22)化为

$$B_1''+\left(\frac{1}{R_1+x}-\frac{2\Psi_1'}{\Psi_1}\right)B_1'-4\pi re_0^2\Psi_1^2B_1=0 \tag{26}$$

$$B_1(0)=0 \tag{27}$$

$$B_1'(0)=\frac{4\pi re_0}{R_1}\alpha_0^2 \tag{28}$$

$$B_1(d)=4\pi\sigma_0 \tag{29}$$

由(29)和(25)式，可得

$$d=\frac{\sigma_0}{re_0\alpha_0^2}R_1 \tag{30}$$

所以要使d是薄层，必须满足条件

$$\sigma_0\ll re_0\alpha_0^2 \tag{31}$$

在满足条件(31)的情况下，将(24)、(25)代进(26)式，逐项比较系数便可用α_n表示b_n，前二项为：

$$b_1=\frac{4\pi re_0^2}{R_1}\alpha_0^2 \tag{32}$$

$$b_2=\frac{4\pi re_0^2}{R_1}\alpha_0\alpha_1-\frac{2\pi re_0^2}{R_1^2}\alpha_0^2 \tag{33}$$

将(13)、(15)和(17)代进(3)式得：

$$-a_\sigma\sigma_0 - b_\sigma\sigma_0^3 - \eta_1\sigma_0\Psi_0^2 = 0 \tag{34}$$

$$-a_\sigma\sigma_0 - b_\sigma\sigma_0^3 + B_1(x) - \eta_1\sigma_0\Psi_1(x)^2 = 0 \tag{35}$$

比较系数，便可得α_n。前二项为

$$\alpha_0 = \Psi_0$$

$$\alpha_1 = \frac{2\pi e_0^2}{\eta_1\sigma_0 R_1}\Psi_0 \tag{37}$$

由(34)式可得σ_0的非零解为

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{-a_\sigma - \eta_1\Psi_0^2}{b_\sigma}} \tag{38}$$

为了求Ψ_0，将(13)、(15)、(17)和(18)式代进(1)求得圆柱体的自由能。在$d \ll R_1$条件下，忽略正比于$R_1 d$的量及更小的量，得

$$F = \pi R_1^2 L\left(\frac{a}{2}\Psi_0^2 + \frac{b}{4}\Psi_0^4 + \frac{a_\sigma}{2}\sigma_0^2 + \frac{b_\sigma}{4}\sigma_0^4 + \frac{1}{2}\eta_1\sigma_0^2\Psi_0^2\right) \tag{39}$$

式中L为圆柱体的长度。(39)式表示自由能是Ψ_0的普通函数，取Ψ_0使F极小，便得

$$a\Psi_0 + b\Psi_0^3 + \eta_1\sigma_0^2\Psi_0 = 0 \tag{40}$$

可得Ψ_0的非零解为

$$\Psi_0 = \sqrt{\frac{-(a + \eta_1\sigma_0^2)}{b}} \tag{41}$$

将此式与(38)式联立便得σ_0和Ψ_0的非零解为：

$$\Psi_0 = \sqrt{\frac{\eta_1 a_\sigma - b_\sigma a}{b b_\sigma - \eta_1^2}} \tag{42}$$

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\eta_1 a - b a_\sigma}{b b_\sigma - \eta_1^2}} \tag{43}$$

必须强调，这些结论都是在满足条件(31)的情况下取得的。

三、讨　　论

由于自由能泛函(1)的参数较多，如果没有这些参数的具体数值，很难给出存在(13)、(15)和(17)式所描述的超导—铁磁性共存的温度。但在参数间满足一定关系的条件下，可能得到有上述解的温度区间，从而表明了用自由能泛函(1)描述的超导体有超导—铁磁性共存相的可能性。

由(39)式，自由能F为极小还必须满足

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial \Psi_0^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial \Psi_0 \partial \sigma_0} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \Psi_0 \partial \sigma_0} & \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma_0^2} \end{vmatrix} > 0 \tag{44}$$

于是得条件

$$bb_\sigma - \eta_1^2 > 0 \tag{45}$$

引进

$$a = a'(T - T_s) \tag{46}$$

$$a_\sigma = a'_\sigma(T - T_m) \tag{47}$$

以及

$$T_\sigma = \frac{ba'_\sigma T_m - \eta_1 a' T_s}{ba'_\sigma - \eta_1 a'} \tag{48}$$

$$T_\psi = \frac{b_\sigma a' T_s - \eta_1 a'_\sigma T_m}{b_\sigma a' - \eta_1 a'_\sigma} \tag{49}$$

由二级相变理论，我们有

$$a', a'_\sigma, b, b_\sigma \text{和} \eta_1 \text{皆} > 0. \tag{50}$$

根据(42)式和(43)式都是>0的实数的条件，应用以上各参数可得以下结论：

(1) 设　$T_s > T_m$，　(51)

(A)若$ba'_\sigma > \eta_1 a' \frac{T_s}{T_m}$且　$b_\sigma a' > \eta_1 a'_\sigma$，　(51A)

则有解的温度T须满足以下条件：

$$T < T_\sigma \tag{52}$$

$$\frac{(T_\sigma - T)}{(T_\psi - T)^2} \ll \frac{r^2 e_0^2}{(bb_\sigma - \eta_1^2)} \cdot \frac{(b_\sigma a' - \eta_1 a'_\sigma)^2}{(ba'_\sigma - \eta_1 a')} \tag{53}$$

其中各温度参数的关系是：$T_\psi > T_s > T_m > T_\sigma > 0$　(54)

(B)若 $ba'_\sigma > \eta_1 a' \frac{T_s}{T_m}$　且　$b_\sigma a' < \eta_1 a'_\sigma \frac{T_m}{T_s}$　.　(51B)

则有解的温度T应满足

$$T_\psi < T < T_\sigma \tag{55}$$

$$\frac{(T_\sigma - T)}{(T - T_\psi)^2} \ll \frac{r^2 e_0^\tau}{(bb_\sigma - \eta_1^2)} \cdot \frac{(\eta_1 a'_\sigma - b_\sigma a')^2}{(ba'_\sigma - \eta_1 a')} \tag{56}$$

在这种条件下，温度参数的关系是　$T_s > T_m > T_\sigma > T_\psi > 0$。

(2) 设 $T_s<T_m$ (57)

(A)若 $b_\sigma a'>\eta_1 a'_\sigma \frac{T_m}{T_s}$ 且 $b a'_\sigma>\eta_1 a'$ (57A)

则有解的温度T应满足

$$T<T_\psi \tag{58}$$

$$\frac{(T_\sigma-T)}{(T_\psi-T)^2}\ll\frac{r^2e_0^2}{(bb_\sigma-\eta_1^2)}\cdot\frac{(b_\sigma a'-\eta_1 a'_\sigma)^2}{(ba'_\sigma-\eta_1 a')} \tag{59}$$

这时，温度参数的关系是 $T_\sigma>T_m>T_s>T_\psi>0$。

(B)若 $b_\sigma a'>\eta_1 a'_\sigma \frac{T_m}{T_s}$, 且 $b a'_\sigma<\eta_1 a'\frac{T_s}{T_m}$ (57B)

在这种条件下，温度参数的关系为 $T_m>T_s>T_\psi>T_\sigma>0$，
而有解的温度T应满足

$$T_\sigma<T<T_\psi \tag{60}$$

$$\frac{(T-T_\sigma)}{(T_\psi-T)^2}\ll\frac{r^2e_0^2}{(bb_\sigma-\eta_1^2)}\cdot\frac{(b_\sigma a'-\eta_1 a'_\sigma)^2}{(\eta_1 a'-ba'_\sigma)} \tag{61}$$

以上结果表明，只要参数之间满足相应的关系式，无论T_m大于还是小于T_s，这种共存相都有可能存在。

最后，如果条件(31)不成立，那么就不存在由(13)、(15)和(17)式所描述的解。但还不能完全排除有其他形式的超导—铁磁性共存解存在，尤其是在第二类超导体中，允许有量子化磁通存在的磁涡旋区，情况更为复杂，还需要进一步研究。

参 考 文 献

〔1〕Л. Горьков и А. Русинов, ЖЭТФ, 46 (1964), 1363.
〔2〕M.A. Jensen and H. Suhl, in *Magnetism*, edited by G.T.Rado and H. Suhl, Academics, New York, 1966, vol Ⅱ, B.
〔3〕W.A. Fertig et al., *Phys. Rev. Lett.*, 38 (1977), 987.
D.E.Moncton et al., *Phys. Rev. Lett.*, 39 (1977), 1164.
〔4〕D.E.Moncton et al., *Phys. Rev. Lett.*, 41 (1978), 1133.
M. Ishikawa et al., *Solid State Comm.*, 24 (1977), 747.
〔5〕E.I. Blount and C.M.Varma, *Phys. Rev. Lett.*, 42 (1979), 1079.
〔6〕L.N.Bulaevski et al., *Solid state Comm.*, 30 (1979) 59.

A Mean Field Theory of Coexistence of Superconductivity and Ferromagnetism

Liu Jinming　　Zhou Yichang

Abstract

According to a mean field theory, the conditions of coexistence of superconductivity and ferromagnetism in a long superconducting cylinder which containing an uniform distribution of magnetic moment are considered. We find that the coexistence is possible. whether the Curie temperature is higher or lower than that for the superconducting transition, provided some relations between the parameters are satisfied.