m阶常微分方程广义多点边值问题样条配置法

胡日章

（计算机科学系）

摘　要

本文继续文〔1〕的工作，讨论m阶常微分方程广义多点边值问题的样条配置法．文中证明了，只要真解足够分片光滑，配置点取为高斯点，则配置解达到最佳收敛阶并在样条结点上具有超收敛性．

§1　提法和引理

先引入下面的记号

$$l(D)\equiv D^m+\sum_{j=0}^{m-1}a_j(x)D^j\ ,\qquad D^j\equiv\frac{d^j}{dx^j}\qquad I\equiv[a,b]$$

$$\pi=\{a_i\}_1^{s-1}\ :\qquad a=a_0<a_1<\cdots<a_{s-1}<a_s=b$$

$d-1=(d_1-1,\cdots,d_{s-1}-1)$　　$\{d_i\}_1^{s-1}$ 为不大于m的非负整数．

$$r_i=m-d_i\quad(i=1,\cdots,s-1),\qquad l=m+\sum_{i=1}^{s-1}r_i$$

$C^{d-1}(\pi)=\{u(x)|u(x)$于a_i上具有连续的d_i-1阶导数，$1\leqslant i\leqslant s-1\}$

$C^m(I-\pi)=\{u(x)|u(x)$于$[a_i,a_{i+1}]$上具有连续的m阶导数，$0\leqslant i\leqslant s-1\}$

m阶线性常微分方程广义多点边值问题是求$u(x)$满足

$$\begin{cases}1)\ u(x)\in C^m(I-\pi)\cap C^{d-1}(\pi) & \\ 2)\ l(D)u(x)=f(x) & x\in I-\pi \\ 3)\ \beta_i u(x)=C_i & i=1,\cdots,l\end{cases}\qquad(1.1)$$

其中　$a_j(x)$　$(0\leqslant j\leqslant m-1)$，$f(x)\in C(I-\pi)$，　$\{\beta_i\}_1^l$为定义在$C^{m-1}(I-\pi)\cap C^{d-1}(\pi)$上的连续线性泛函．如 $\beta_i u(x)$为$u(x)$在节点$a=s_0<s_1<\cdots<s_p=b$上直到$m-1$阶导数或左

本文1983年6月收到．本工作是在李岳生教授指导下完成的．

右导数的线性组合．$\{C_i\}_1^l$为常数．以下恒设(1.1)有唯一解．类似于〔1〕的引理2，可以得到

引理1　设(1.1)对应的齐问题（即$f(x)=0, C_i=0, 1\leqslant i\leqslant l$）只有零解，则(1.1)的解唯一存在且可表为

$$u(x)=u_0(x)+\int_a^b K(x,t)f(t)dt$$

而且

$$u^{(i)}(x)=u_0^{(i)}(x)+\int_a^b K^{(i,0)}(x,t)f(t)dt,\quad x\epsilon I-\pi,\quad 1\leqslant i\leqslant m-1$$

其中$u_0(x)$为(1.1)当$f(x)=0$时的解．记号$K^{(\alpha,\beta)}(x,t)=\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial t^\beta}K(x,t)$，$K(x,t)$为格林函数，它具有下述性质：

i) $K^{(i,0)}(x,t)$ $(0\leqslant i\leqslant m-2)$分片二元连续，即当$x\neq a_i,(1\leqslant i\leqslant s-1)$ $t\neq s_j$ $(1\leqslant j\leqslant p-1)$时二元连续．

ii) 对$[a,b]$中固定的t，$t\bar{\epsilon}\pi$，$K(x,t)$在$x=t$有直到$m-2$阶连续导数，但

$$K^{(m-1,0)}(t+0,t)-K^{(m-1,0)}(t-0,t)=1$$

iii) $K(x,t)$作为x的函数满足

$$l(D)K(x,t)=0\qquad x\epsilon I-\pi,\ x\neq t,$$
$$\beta_i K(x,t)=0\qquad 1\leqslant i\leqslant l.$$

定义$H^m(I-\pi)=\{u(x)|u(x)$于$[a_i,a_{i+1}]$ $(0\leqslant i\leqslant s-1)$上具有绝对连续的$m-1$阶导数，$m$阶导数可积且在端点有左右极限$\}$．由引理1易得，对任一$u(x)\epsilon H^m(I-\pi)\cap C^{d-1}(\pi)$，

$$u(x)=u_0(x)+\int_a^b K(x,t)l(D)u(t)dt$$

$$u^{(i)}(x)=u_0^{(i)}(x)+\int_a^b K^{(i,0)}(x,t)l(D)u(t)dt\qquad x\epsilon I-\pi,\qquad 1\leqslant i\leqslant m-1.$$

其中$u_0(x)$为满足$\beta_i u_0(x)=\beta_i u(x)$ $(1\leqslant i\leqslant l)$的唯一函数．

作I上的分划Δ，使其分点包含$\{a_i\}_1^{s-1}$，$\{s_j\}_1^{p-1}$，

$$\Delta=\{x_j\}_1^{N-1}:\quad a=x_0<x_1<\cdots<x_{N-1}<x_N=b,\ h_j=x_{j+1}-x_j\ \ h=\max_j(h_j)$$

定义$C^n(I-\Delta)=\{y(x)|y(x)$在$[x_j,x_{j+1}]$ $(0\leqslant j\leqslant N-1)$有$n$阶连续导数，$n\geqslant 0\}$显然这是一个线性空间．对于$y(x)\epsilon C^n(I-\Delta)$，它的各阶导数在$\Delta$上具有两个值，即$y^{(\mu)}(x)$在$[x_j,x_{j+1}]$上由$y_j^{(\mu)}(x)$定义：

$$y_j^{(\mu)}(x)=\begin{cases} y^{(\mu)}(x_j+0), & x=x_j;\\ y^{(\mu)}(x), & x_j<x<x_{j+1}; \qquad \mu=0,\cdots,n\\ y^{(\mu)}(x_{j+1}-0), & x=x_{j+1}. \qquad j=0,\cdots N-1\end{cases}$$

这样$y^{(\mu)}(x)$成为定义在

$$[a,x_1-]\cup[x_1+,x_2-]\cup\cdots\cup[x_{N-1}+,b]$$

上的单值函数。定义$y^{(\mu)}(x)$的模为

$$\|y^{(\mu)}(x)\|=\max_{a<x<b}|y^{(\mu)}(x)|=\max_{0\le j\le N-1}\max_{x_j<x<x_{j+1}}|y_j^{(\mu)}(x)|\quad 0\leqslant\mu\leqslant n$$

对于$y(x)\in C(I-\pi)$，我们还定义分片连续模：

$$\omega_{y,\pi}(h)=\max_{0\le i\le s-1}\max_{\substack{\xi_1,\xi_2\in[a_i,a_{i+1}]\\|\xi_1-\xi_2|<h}}|y(\xi_1)-y(\xi_2)|$$

Δ上的分片n阶($n-1$次)多项式空间，简记为$\mathscr{P}_{n,\Delta}$。

给定$[-1,1]$中的k个点

$$-1\leqslant\rho_1<\rho_2<\cdots<\rho_k\leqslant1$$

设Q是以$\{\rho_i\}_1^k$为插值节点将$C[-1,1]$映为K阶多项式空间$\mathscr{P}_k$的拉格朗日插值算子。

Q_Δ是以点组

$$\tau_{jk+i}=\begin{cases}x_j+ & \rho_i=-1\\(x_j+x_{j+1}+h_j\rho_i)/2 & -1<\rho_i<1\\x_{j+1}- & \rho_i=1\end{cases}$$

为插值点的分片拉格朗日插值算子。Q_Δ将$C(I-\Delta)$映为$\mathscr{P}_{k,\Delta}$，且对任意分划Δ，$\|Q_\Delta\|=\|Q\|$。

§2　样条配置格式和收敛性

构造分划Δ上的$m+k$阶多项式样条空间$S_p(m+k,\Delta)$，使其在a_i上亏度为$k+r_i$ $(1\leqslant i\leqslant s-1)$。在其余结点即$\Delta-\pi$上亏度为$k$。从而$S_p(m+k,\Delta)\subset H^m(I-\pi)\cap C^{d-1}(\pi)$。求$u_\Delta(x)\in S_p(m+k,\Delta)$使满足

$$\begin{cases}l(D)u_\Delta(\tau_{jk+i})=f(\tau_{jk+i}) & 1\leqslant i\leqslant k,\quad 0\leqslant j\leqslant N-1\\\beta_iu_\Delta(x)=C_i & 1\leqslant i\leqslant l\end{cases}\tag{2.1}$$

假设

$$\begin{cases}1)\ u(x)\in C^m(I-\pi)\cap C^{d-1}(\pi)\\2)\ D^mu(x)=0 & x\in I-\pi\\3)\ \beta_iu(x)=0 & 1\leqslant i\leqslant l\end{cases}\tag{2.2}$$

只有零解。根据引理1，存在格林函数$H(x,t)$，多点边值问题(1.1)等价于求$v(x)\in C(I-\pi)$，满足

$$v(x)=Tv(x)\equiv-\sum_{j=0}^{m-1}a_j(x)\int_a^bH^{(j,0)}(x,t)v(t)dt-\sum_{j=0}^{m-1}a_j(x)u_0^{(j)}(x)+f(x)$$

其中$v(x)=D^mu(x)$，$u_0(x)$满足(2.2)之1)、2)及$\beta_iu_0(x)=\beta_iu(x)$ $(1\leqslant i\leqslant l)$ T视为$C(I-\Delta)$上的算子。进而，配置问题(2.1)等价于求$v_\Delta(x)\in\mathscr{P}_{k,\Delta}$满足

$$v_\Delta(x)=Q_\Delta Tv_\Delta(x)\tag{2.3}$$

定理1　设(1.1)有唯一解$u(x)\in C^{m+n}(I-\pi)$，(2.2)只有零解，则存在$\delta>0$，当$h\leqslant\delta$

时，配置问题(2.1)有唯一解$u_\Delta(x)$，且

$$\|D^i(u_\Delta(x)-u(x))\|\leqslant\begin{cases}\text{const } \omega_{v,\pi}(h) & n=0\\ \text{const } h^n & 1\leqslant n\leqslant k\end{cases}\qquad 0\leqslant i\leqslant m \tag{2.4}$$

证明 由假设只须讨论(2.3)的求解问题，对任$z(x)\in C(I-\Delta)$令

$$T'z(x)=-\sum_{j=0}^{m-1}a_j(x)\int_a^b H^{(j,0)}(x,t)z(t)dt$$

则T'是线性算子，利用T'与T的关系，(2.3)可化为

$$(I-Q_\Delta T')v_\Delta=Q_\Delta(I-T')v$$

因此问题又归结为逆算子$(I-Q_\Delta T')^{-1}$的存在性，注意到

$$I-Q_\Delta T'=I-T'+(I-Q_\Delta)T' \tag{2.5}$$

我们先证明$I-T'$有界可逆，然后证明$\|(I-Q_\Delta)T\|\to0$ $(h\to0)$.对任$z(x)\in C(I-\Delta)$，令

$\hat{z}(x)=\int_a^b H(x,t)z(t)dt$，则$D^m\hat{z}(x)=z(x)$，且

$$\hat{z}^{(j)}(x)=\int_a^b H^{(j,0)}(x,t)z(t)dt \qquad 0\leqslant j\leqslant m-1$$

所以

$$z(x)-T'z(x)=z(x)+\sum_{j=0}^{m-1}a_j(x)\int_a^b H^{(j,0)}(x,t)z(t)dt=l(D)\hat{z}(x) \tag{2.6}$$

由设可知(1.1)对应的齐问题只有零解，据引理1.

$$\hat{z}^{(j)}(x)=\int_a^b K^{(j,0)}(x,t)(I-T')z(t)dt \qquad 0\leqslant j\leqslant m-1$$

$$z(x)=z(x)-T'z(x)-\sum_{j=0}^{m-1}a_j(x)\int_a^b K^{(j,0)}(x,t)(I-T')z(t)dt \tag{2.7}$$

由(2.7)和(2.6)前一个等式可得

$$K_1\|z\|\leqslant\|(I-T')z\|\leqslant K_2\|z\| \tag{2.8}$$

其中K_1，K_2是独立于Δ的正数。从而$I-T'$是有界可逆算子。

对任$z(x)\in C(I-\Delta)$，由$a_j(x)$及$H(x,t)$的性质易知$T'z(x)\in C(I-\pi)$.任取$\xi_1,\xi_2\in[a_i,a_{i+1}]$ $(0\leqslant i\leqslant s-1)$，则

$$\|T'z(\xi_1)-T'z(\xi_2)\|\leqslant\|\sum_{j=0}^{m-1}[a_j(\xi_2)-a_j(\xi_1)]\int_a^b H^{(j,0)}(\xi_2,t)z(t)dt\|$$

$$+\|\sum_{j=0}^{m-1}a_j(\xi_1)\int_a^b[H^{(j,0)}(\xi_2,t)-H^{(j,0)}(\xi_1,t)]z(t)dt\|$$

注意上式右端第二项，当$j=0,1,\cdots,m-2$，

$$\|\int_a^b[H^{(j,0)}(\xi_2,t)-H^{(j,0)}(\xi_1,t)]z(t)dt\|\leqslant\|z\|(b-a)k_j|\xi_2-\xi_1|$$

其中 $k_j=\max\limits_{x,t\in[a,b]}\|H^{(j+1,0)}(x,t)\|$，当$j=m-1$，

$$\left\| \int_a^b [H^{(m-1,0)}(\xi_2,t) - H^{(m-1,0)}(\xi_1,t)] z(t)dt \right\| = \| \hat{z}^{(m-1)}(\xi_2) - \hat{z}^{(m-1)}(\xi_1) \| \leqslant \|z\| |\xi_2 - \xi_1|$$

令 $\omega_{I'},_{\pi}(h) = \text{const} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \omega_{a_j(x)},_{\pi}(h) + h \right)$，则$\omega_{I'},_{\pi}(h) \to 0 (h \to 0)$且

$$\omega_{T'z},_{\pi}(h) \leqslant \|z\| \omega_{I'},_{\pi}(h) \tag{2.9}$$

由文〔1〕引理 1 及(2.9)，

$$\|(I - Q_\Delta)T'\| = \sup_{\|z\| \leqslant 1} \|(I - Q_\Delta)T'z\| \leqslant \text{const} \cdot \omega_{I'z},_{\pi}(h)$$

$$\leqslant \text{const} \quad \omega_{T'},_{\pi}(h) \to 0 \quad (h \to 0)$$

从而由(2.5)，(2.8)，存在$\delta > 0$，当$h \leqslant \delta$，

$$\frac{K_1}{2} \|z\| \leqslant \|(I - Q_\Delta T')z\| \leqslant 2K_2 \|z\|$$

这说明$I - Q_\Delta T'$是有界可逆且有独立于Δ的界，这就证明了v_Δ的存在唯一性。从而配置解u_Δ存在唯一。令

$$P \equiv (I - Q_\Delta T')^{-1} Q_\Delta (I - T') = (I - Q_\Delta T')^{-1} Q_\Delta (I - Q_\Delta T')$$

可见P是线性投影．当$Y(x) \in \mathscr{S}_{k,\Delta}$，$(I - Q_\Delta T')Y \in \mathscr{S}_{k,\Delta}$．由于$\mathscr{S}_{k,\Delta}$是有限维的．$I - Q_\Delta T'$将$\mathscr{S}_{k,\Delta}$一一映为自身，所以$P$的值域为$\mathscr{S}_{k,\Delta}$，

$$\|v - v_\Delta\| = \|(I - P)v\| \leqslant \|I - P\| \text{dist}(v, \mathscr{S}_{k,\Delta}) \leqslant \|I - P\| \|v - Q_\Delta v\|$$

计及 $\|P\| \leqslant \frac{2}{K_1} \|Q\| \cdot 2K_2$，由文〔1〕引理 1，

$$\|v - v_\Delta\| \leqslant \begin{cases} \text{const} \cdot \omega_{v,\pi}(h) & n = 0 \\ \text{const} \quad h^n & 1 \leqslant n \leqslant k \end{cases}$$

再由

$$D^i(u_\Delta(x) - u(x)) = \int_a^b H^{(i,0)}(x,t)(v_\Delta - v)(t)dt \qquad 0 \leqslant i \leqslant m-1$$

即得(2.4)成立。定理证毕。

§3 收敛阶的改进

定理2 设(1.1)有唯一解$u(x) \in C^{m+k+n}(I - \pi)$，$n \leqslant k$为正整数 $a_j(x) \in C^{n+k}(I - \pi)$，(2.2)只有零解，如果在〔$-1$，1〕中选$\{\rho_i\}_1^k$使对任意$n$阶多项式$q(x)$，

$$\int_{-1}^1 q(t) \prod_{i=1}^k (t - \rho_i) dt = 0 \tag{3.1}$$

则当h足够小，存在唯一的配置解$u_\Delta(x) \in S_p(m+k, \Delta)$，且

$$\|D^i(u_\Delta(x_j) - u(x_j))\| \leqslant \text{const} \cdot h^{k+n} \qquad 0 \leqslant i \leqslant m-1, 0 \leqslant j \leqslant N \tag{3.2}$$

$$\|D^i(u_\Delta(x) - u(x))\| \leqslant \text{const} \cdot h^{k+\min(n,m-i)} \qquad 0 \leqslant i \leqslant m \tag{3.3}$$

证明 定理 1 的条件此处已满足，所以，当h足够小，$u_\Delta(x)$唯一存在，又

$$D^i(u_\Delta(x)-u(x))=\int_a^b K^{(i,0)}(x,t)r(t)dt$$

$$=\sum_{j=0}^{N-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}} K^{(i,0)}(x,t)r(t)dt \tag{3.4}$$

注意到$r(x)$在配置点$\{\tau_{jk+i}\}_{j=0,i=1}^{N-1\ \ k}$上为零，据差商公式，

$$r(t)=r[\tau_{jk+1},\cdots,\tau_{jk+k},t]P_k(t) \qquad t\in[x_j,x_{j+1}]$$

其中　$P_k(t)=\prod_{i=1}^{k}(t-\tau_{jk+i})$　因此

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}}K^{(i,0)}(x,t)r(t)dt=\int_{x_j}^{x_{j+1}}K^{(i,0)}(x,t)r[\tau_{jk+1},\cdots,\tau_{jk+k},t]P_k(t)dt$$

当$x=x_j$，此时$x\overline{\in}(x_j,x_{j+1})$　$(0\leqslant j\leqslant N)$由假设条件知$K^{(i,0)}(x,t)$在$(x_j,x_{j+1})$上有连续的$n$阶导数，将$h(t)\equiv K^{(i,0)}(x,t)r[\tau_{jk+1},\cdots,\tau_{jk+k},t]$在$t=x_j$展开到$n-1$次项，计及(3.1)，则

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}}K^{(i,0)}(x,t)r(t)dt=\int_{x_j}^{x_{j+1}}(P_k(t)(t-x_j)^nD^nh(\theta)/n!)dt \tag{3.5}$$

由文[1]引理5，

$$D^nh(t)=\frac{n!}{(n+k)!}\sum_{s=0}^{n}\binom{n+k}{k+s}D^{n-s}H^{(i,0)}(x,t)D^{k+s}r(\theta_{t,s})$$

其中$\theta_{t,s}\in(x_j,x_{j+1})$由文[1]引理4

$$\left\|\int_{x_j}^{x_{j+1}}K^{(i,0)}(x,t)r(t)dt\right\|\leqslant\text{const }h_j^{k+n+1}(h/h_j)^k=\text{const }h^k\cdot h_j^{n+1} \tag{3.6}$$

将(3.6)代入(3.4)得(3.2)。

当$x\neq x_j$　$(0\leqslant j\leqslant N)$，　设$x\in(x_{j_0},x_{j_0+1})$，　则$K^{(i,0)}(x,t)\in H_\infty^{m-i-1}(x_{j_0},x_{j_0+1})$，$K^{(i,0)}(x,t)$关于$t$的$m-i-1$阶导数间断，$h(t)$只能展开至$s-1$次项，$s=\min(n,m-i-1)$从而(3.6)相应改为

$$\left\|\int_{x_{j_0}}^{x_{j_0+1}}K^{(i,0)}(x,t)r(t)dt\right\|\leqslant\text{const}h^kh_{j_0}^{+\min(n+1,m-i)} \tag{3.6$'$}$$

对于任x，和式(3.4)除一项外，其余仍满足(3.6)。从而

$$\|D^i(u_\Delta(x)-u(x))\|\leqslant\text{const }h^{n+k}+\text{const }h^{k+\min(n+1,m-i)}$$

$$\leqslant\text{const }h^{k+\min(n,m-i)} \qquad 0\leqslant i\leqslant m-1$$

计及定理1中的(2.6)，上式对$i=m$仍成立，证毕。

§4　非线性问题的结果

非线性m阶常微分方程广义多点边值问题的提法是求$u(x)\in C^m(I-\pi)$满足

$$\begin{cases}D^mu(x)=F(x,u(x),\cdots,u^{(m-1)}(x)) & x\in I-\pi\\ \beta_iu(x)=C_i\end{cases} \tag{4.1}$$

其中F为$m+1$元函数，其余记号同前。其配置格式为

$$\begin{cases} D^m u_\Delta(\tau_{jk+i}) = F(\cdot, u_\Delta, \cdots, u_\Delta^{(m-1)})(\tau_{jk+i}), & 0\leqslant j\leqslant N-1,\ 1\leqslant i\leqslant k \\ \beta_i u_\Delta = C_i & i=1,\cdots,l \end{cases} \tag{4.2}$$

我们有下面的定理

定理3　设$u(x)\epsilon C^{m+n}(I-\pi)$是(4.1)的解，并且

(i) $F(x,u(x),\cdots,u^{(m-1)}(x))\epsilon C^2(\overline{N_i})$ $(0\leqslant i\leqslant s-1)$其中$N_i$是曲线$\Gamma_i=\{(x,u(x),\cdots,u^{(m-1)}(x)|a_i\leqslant x\leqslant a_{i+1}\}\subset R^{m+1}$的某邻域；

(ii) 对于$f(x)\epsilon C(I-\pi)$，由(4.1)的解$u(x)$决定的线性问题

$$Lr(x)\equiv D^m r(x)-\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\partial F(x,u(x),\cdots,u^{(m-1)}(x))}{\partial Z_j}r^{(j)}(x)=f(x)\qquad x\epsilon I-\pi$$

$$\beta_i r=0$$

唯一可解　$F=F(x,Z_0,\cdots,Z_{m-1})$

iii) $D^m u(x)=0,\quad x\epsilon I-\pi;\quad \beta_i u=0,\ i=1,\cdots l$

只有零解，则存在$\delta,\varepsilon>0$,使

(1) 不存在(4.1)的另一解$u^*(x)$满足$\|D^m(u-u^*)\|\leqslant\varepsilon$

(2) 当$h\leqslant\delta$时，配置问题(4.2)有唯一解$u_\Delta(x)$满足$\|D^m(u-u_\Delta)\|\leqslant\varepsilon$,

(3) 解配置问题(4.2)的牛顿迭代法

$$\begin{cases} \left(D^m u_{\Delta,r+1}-\sum_{j=0}^{m-1}\dfrac{\partial F(\cdot,u_{\Delta,r},\cdots,u_{\Delta,r}^{(m-1)})}{\partial Z_j}u_{\Delta,r+1}^{(j)}\right)(\tau_{jk+i})=\left(F(\cdot,u_{\Delta,r},\cdots,u_{\Delta,r}^{(m-1)})\right. \\ \left.\qquad -\sum_{j=0}^{m-1}\dfrac{\partial F(\cdot,u_{\Delta,r},\cdots,u_{\Delta,r}^{(m-1)})}{\partial Z_j}u_{\Delta,r}^{(j)}\right)(\tau_{jk+i}),\quad 0\leqslant j\leqslant N-1,1\leqslant i\leqslant k \\ \beta_i u_{\Delta,r+1}=C_i \qquad i=1,\cdots,l, \qquad r=0,1,2,\cdots \end{cases}$$

在$u_\Delta(x)$的某邻域内二阶收敛。

(4)　$$\|D^j(u_\Delta-u)\|\leqslant\begin{cases} C\omega_{v,\pi}(h) & n=0 \\ Ch^{\min(n,k)} & n\geqslant 1 \end{cases}\qquad 0\leqslant j\leqslant m$$

其中$v(x)=Du(x)$。

定理4　如果在定理3的假设外还设$u(x)\epsilon C^{m+k+n}(I-\pi)$, $n\leqslant k$, $\dfrac{\partial F(x,u(x),\cdots,u^{(m-1)}(x))}{\partial Z_j}\epsilon C^{n+k}(I-\pi)$并成立(3.1)，则当$h$足够小，

$$\|D^i(u_\Delta(x_j)-u(x_j))\|\leqslant Ch^{k+n}\qquad 0\leqslant i\leqslant m-1,0\leqslant j\leqslant N$$

$$\|D^i(u_\Delta(x)-u(x))\|\leqslant Ch^{k+\min(n,m-i)}\qquad 0\leqslant i\leqslant m$$

上述两定理证明与文(1)类似，从略。

§5　算　　例

例1

$$\begin{cases} (D^2+4xD+4x^2+2)u(x)=0 & 0<x<1 \\ (D^2-4xD+4x^2-2)u(x)=0 & 1<x<2 \\ u(0)=0,u(2)=1,u(1+0)-u(1-0)=0, & u'(1+0)-u'(1-0)=1 \end{cases}$$

例 2

$$\begin{cases} D^2u(x)=(u(x)+x+1)^3/2 & 0<x<1 \\ D^2u(x)=(u(x)+1)^3/2 & 1<x<2 \\ u(0)=0,u(2)=1,u(1+0)-u(1-0)=0, & u'(1+0)-u'(1-0)=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

计算结果分别见表 1 、表 2 .我们取$k=4$,Δ为均匀 分划。$\{\rho_i\}_1^4$用两种取法: (i) $\pm 0.75,\pm 0.25$;(ii) $\pm 0.861\cdots,\pm 0.339\cdots$.相应于均匀配置和高斯点配置。表中利用记号。

$$e^{(i)}\equiv\|D^i\ (u_\Delta(x)-u(x))\|,\ e_\Delta^{(i)}\equiv\|D^i(u_\Delta(x_j)-u(x_j))\|,0\leqslant i\leqslant 2,0\leqslant j\leqslant N.$$

$$3.7-4\equiv 3.7\times 10^{-4} \qquad \alpha=\ln(l_{h1}/l_{h2})/\ln(h_1/h_2)$$

每一栏的α给出前一栏的误差收敛阶估计，其中用圆括弧标明的是该栏理论上应达到的收敛阶。所有计算在本校计算中心121机完成，有 * 号的 地 方收敛率受舍入误差影响。对于例 2 (非线性问题)，迭代五次即收敛。数值结果与我们的理论分析相符。

表 1

ρ_i	h	$e^{(0)}$	α	$e^{(1)}$	α	$e^{(2)}$	α	$e_\Delta^{(0)}$	α	$e_\Delta^{(1)}$	α	$e_\Delta^{(2)}$	α
	1/4	3.7 −4	(4)	5.3 −3	(4)	2.5 −1	(4)	3.7 −4	(4)	5.3 −3	(4)	2.5 −1	(4)
	1/5	1.5 −4	4	2.3 −3	3.7	1.2 −1	3.3	1.5 −4	4	2.3 −3	3.7	1.2 −1	3.3
(i)	1/6	7.2 −5	4.2	1.1 −3	4	6.3 −2	3.5	7.2 −5	3.9	1.1 −3	4	6.3 −2	3.5
	1/7	3.8 −5	4.2	6.0 −4	4	3.6 −2	3.7	3.8 −5	4.2	6.0 −4	4	3.6 −2	3.7
	1/8	2.1 −5	4.4	3.6 −4	3.8	2.2 −2	3.7	2.1 −5	4.4	3.6 −4	3.8	2.3 −2	3.7
	1/4	3.7 −5	(6)	1.2 −3	(5)	1.2 −1	(4)	2.8 −7	(8)	2.0 −6	(8)	1.2 −1	(4)
	1/5	1.1 −5	5.4	4.6 −4	4.3	5.8 −2	3.3	5.6 −8	7.2	3.6 −7	7.7	5.8 −2	3.3
(ii)	1/6	4.1 −6	5.3	2.1 −4	4.2	3.1 −2	3.4	2.1 −8	*	8.0 −8	8	3.1 −2	3.4
	1/7	1.8 −6	5.5	1.1 −4	4.3	1.8 −2	3.6	8.6 −9	*	1.5 −8	*	1.8 −2	3.6
	1/8	8.9 −7	5.3	5.5 −5	4.6	1.1 −2	3.7	1.1 −8	*	8.2 −8	*	1.1 −2	3.7

表 2

ρ_i	h	$e^{(0)}$	α	$e^{(1)}$	α	$e^{(2)}$	α	$e_\Delta^{(0)}$	α	$e_\Delta^{(1)}$	α	$e_\Delta^{(2)}$	α
	1/4	1.4 −5	(4)	5.3 −5	(4)	3.2 −3	(4)	1.4 −5	(4)	5.3 −5	(4)	3.2 −3	(4)
	1/5	5.8 −6	3.9	2.2 −5	3.9	1.5 −3	3.4	5.8 −6	3.9	2.2 −5	3.9	1.5 −3	3.4
(i)	1/6	2.8 −6	3.9	1.1 −5	3.7	7.6 −4	3.6	2.8 −6	3.9	1.1 −5	3.7	7.6 −4	3.6
	1/7	1.6 −6	3.7	5.9 −6	4.1	4.4 −4	3.6	1.6 −6	3.9	5.9 −6	4.1	4.4 −4	3.6
	1/8	9.2 −7	4.1	3.5 −6	3.9	2.7 −4	3.7	9.0 −7	3.7	3.5 −6	3.9	2.7 −4	3.7
	1/4	4.8 −7	(6)	1.6 −5	(5)	1.8 −3	(4)	6.8 −9	(8)	3.7 −8	(8)	1.8 −3	(4)
	1/5	1.4 −7	5.5	5.8 −6	4.5	8.2 −4	3.5	1.3 −9	7.4	7.5 −9	7.2	8.2 −4	3.5
(ii)	1/6	5.3 −8	5.2	2.7 −6	4.1	4.3 −4	3.5	1.6 −9	•	7.5 −9	•	4.3 −4	3.5
	1/7	2.2 −8	4.7	1.4 −6	4.4	2.4 −4	3.9	2.4 −9	•	1.5 −8	•	2.4 −4	3.9
	1/8	1.2 −8	5.8	6.7 −7	5.5	1.5 −4	3.5	2.4 −9	•	1.5 −8	•	1.5 −4	3.5

参 考 文 献

〔1〕胡日章，广义多点边值问题样条配置法，高等学校计算数学学报，5(1983)，2，127—138.

〔2〕C. de Boor, B. Swartz, *SIAM J. Num. Anal.*, 10(1973), 582—606.

Spline Collocation for Generalized Multipoint Boundary Value Problems of m Order Ordinary Differential Equation

Hu Rizhang

Abstract

In the paper 〔1〕, spline collocation of generalized multi-point boundary value problems were discussed for systems of nonlinear ordinary differential equations. The purpose of this paper is to develop collocation for generalized multi-point boundary value problems of m order ordinary diffrential equation. The optimal rates of convergence and superconvergence at the knots are achieved.