# 单纯集与可计算编号的一些性质

王　洁
（计算机科学系）

**摘　　要**

本文的主要结果是：设$S_x^t$为$N$的$t$-截断，则(i)从$S_x^t$的指标$x$可以一致能行地得到其r.e.指标；设$A$是r.e.集且$\bar{A}$无穷，则(ii)$S$是单纯集，且$\forall x$：$S_x^t \cap \bar{S} \neq \phi$，则$\bigcup_{x \in A} S_x^t \cup S$是单纯集；(iii)若$A$还是$tt$-完全的，则$\bigcup_{x \in A} S_x^t \cup S$亦是$tt$-完全的。本文还证明了文献〔2〕与〔3〕分别给出的形式上不同的可计算编号的定义是等价的。

本文所使用的记号、术语均可在文献[1,2]中找到，特别地，设$\varphi_0^{(k)}$，$\varphi_1^{(k)}$，…，$\varphi_i^{(k)}$，…为全体$k$元部分递归函数的一个可接受枚举，它满足通用机定理及$s$-$m$-$n$定理。用domain $\phi$表示部分函数$\phi$的定义域，range$\phi$表示$\phi$的值域。记$W_x = \text{domain}\ \varphi_x$（此处$\varphi_x = \varphi_x^{(1)}$），则序列$W_0, W_1, \cdots, W_i, \cdots$给出了全体r.e.集的一个能行枚举，称$i$为r.e.指标。这里r.e.表示“递归可枚举”，以N表示全体非负整数的集合，$\phi$表示空集，若对$x \in N$，部分递归函数$\phi(x)$的计算在有穷步内终止，给出输出$\phi(x)$或$\phi(x)$有定义，则记为$\phi(x)\downarrow$，否则记为$\phi(x)\uparrow$。

Post和Dekker两人首先引进了产生集、创造集、单纯集及禁集等一系列概念。

设$A \subset N$。若存在一个部分递归函数$\phi$使得

$$(\forall x)[W_x \subset A \rightarrow [\phi(x)\downarrow \& \phi(x) \in A - W_x]],$$

则称$A$是产生集。显然产生集必定是无穷集且是非r.e.集。

若$A$是r.e.集且$\bar{A}(\bar{A} = N - A)$是产生集，则称$A$是创造集。

若$A$是无穷集且$(\forall B)[B$为无穷的r.e.集$\Rightarrow B \cap \bar{A} \neq \phi]$，则称$A$为禁集，禁集$A$不包含无穷的r.e.子集。

若$A$是r.e.集且$\bar{A}$是禁集，则称$A$是单纯集。

Post首先构造了一个单纯集[1]。

**定义。** 设$t(x)$为严格单调上升的递归函数，定义$S_x^t = \{t(x), t(x)+1, \cdots, t(x+1)-1\}$，并且称$S_x^t$为$N$的$t$-截断。

本文1983年7月收到

**引理1**　存在递归函数$f,g$，使

$$\mathrm{range}\,\varphi_{f(x)}=W_x,\ \mathrm{range}\,\varphi_x=W_{g(x)}.$$

**引理2**　$A$为r.e集$\Leftrightarrow(\exists f)$($f$为$m$元递归函数)$:A=\mathrm{range}\,f$。

引理1的证明可见文献〔1〕第61页。引理2的证明可见〔4〕。

**引理3**　$\forall x:S_x^t$是递归集且$(\forall x)(\forall y)[x\neq y\Rightarrow S_x^t\cap S_y^t=\phi]$。

**证明**　因为对每一个$x$，$S_x^t$是有穷集，故是递归集。由于$t$是严格单调上升的递归函数，而$S_x^t=\{t(x),t(x)+1,\cdots,t(x+1)-1\}$，故只要$x\neq y$，则$S_x^t\cap S_y^t=\phi$。〔证毕〕

**定理1**　从$S_x^t$的指标$x$可以一致能行地得到其r.e.指标。

**证明**　构造函数$\varphi(x,y)$如下：

$$\forall x\forall y:\ \varphi(x,y)=\begin{cases}y, & 若y\geqslant t(x)且y\leqslant t(x+1)-1,\\ \uparrow, & 否则。\end{cases}$$

因为$t(x)$是严格单调上升的递归函数，故可知$\varphi(x.y)$是二元部分递归函数，且满足

$$\forall x:\mathrm{range}\,\lambda y[\varphi(x,y)]=S_x^t. \qquad (1)$$

由$s$-$m$-$n$定理，存在递归递归函数$\sigma$，使

$$\varphi_{\sigma(x)}(y)=\varphi(x,y). \qquad (2)$$

由引理1可知存在函数$g(x)$，使

$$\mathrm{range}\,\varphi_{\sigma(x)}=W_{g\circ\sigma(x)},$$

由(1)与(2)知

$$S_x^t=W_{g\circ\sigma(x)},$$

因为$g\circ\sigma$是递归函数，故此说明可以从$S_x^t$的指标一致能行地得到其r.e.指标。〔证毕〕

设$\langle x_1,\cdots,x_k\rangle$，为一个$k$元有序组，$\alpha$是$k$元命题逻辑函数，称$\langle\langle x_1,\cdots,x_k\rangle,\alpha\rangle$为一个范数(norm)为$k$的真值表条件（简记为$tt$-条件）。如果$\alpha(C_A(x_1),\cdots,C_A(x_k))=1$，则称$tt$-条件$\langle\langle x_1,\cdots,x_k\rangle,\alpha\rangle$被集合$A$所满足，其中$C_A$是$A$的特征函数。

每个$tt$-条件都是一个有序组，故显然可以建立所有$tt$-条件的集合到$N$的可计算编号。当我们说"$tt$-条件$x$"时就是指它有编号$x$。

称$A\,tt$-归约到$B$（简记为$A\leqslant_{tt}B$），若存在递归函数$f$使得对所有$x$，$x\in A\Leftrightarrow tt$-条件$f(x)$被满足。称集合$A$是$tt$-完全的，如果$A$是r.e.集且$(\forall B)[B$是r.e.集$\Rightarrow B\leqslant_{tt}A]$。

**引理4**　$\leqslant_{tt}$是自反的和可传的。

**引理5**　设$A$是单纯集，则$A\times N$是非递归非单纯及非创造的r.e.集。

**引理6**　有限个r.e.集的并集仍是r.e.集。

引理4的证明可见〔1〕第110页，引理5的证明可见〔1〕第108页，引理6的证明可见〔2〕第二章§6。

**定理2**　设$A$是r.e.集且$\bar{A}$无穷，则

(i) $\bigcup\limits_{x\in A}S_t^x$是r.e.集；

(ii) 设$S$是单纯集，且$\forall x: S_x^t\cap\bar{S}\neq\phi$，则$\bigcup\limits_{x\in A}S_x^t\cup S$是单纯集。

(iii) 若$A$还是$tt$-完全的，则$\bigcup\limits_{x\in A}S_x^t\cup S$ 亦是$tt$-完全的。

**证明**。(i)由引理2，存在递归函数$f$，使$A=\text{range}\, f(x)$。所以由(1)得，

$$\bigcup_{x\in A}S_x^t=\bigcup_{x\in\text{range}}\text{range}\,\lambda y[\varphi(x,y)]=\text{range}\,\lambda xy[\varphi(f(x),y)],$$

因为$\varphi(f(x),y)$是部分递归函数，故$\text{range}\,\lambda xy[\varphi(f(x),y)]$是r.e.集，即$\bigcup\limits_{x\in A}S_x^t$是r.e.集。

(ii) 令 $S_t^A=\bigcup\limits_{x\in A}S_x^t\cup S$，由(i)及引理6知$S_t^A$是r.e.集。因为$\bar{A}$为无穷集，且$\forall x$：$\bar{S}\cap S_x^t\neq\phi$，由引理3，$S_x^t$两两互不相交，故$\bar{S}_t^A=\bar{S}\cap(\bigcup\limits_{x\in\bar{A}}S_x^t)$为无穷集。由于$\bar{S}_t^A\subset\bar{S}$，而$\bar{S}$为禁集，因而$\bar{S}_t^A$亦为禁集，故可知$S_t^A$为单纯集。

(iii) 若$A$还是$tt$-完全的，由构造可知$x\in A\Leftrightarrow S_x^t\cup S_t^A$因此有$A\leqslant_{tt}S_t^A$。事实上，任给$x\in A$，相应于$x$的$tt$-条件为$\langle\langle t(x),t(x)+1,\cdots,t(x+1)-1\rangle,\alpha\rangle$，定义$\alpha$为$\alpha(x_1,\cdots,x_k)=1\Leftrightarrow x_1=x_2=\cdots x_k=1$，这个$tt$-条件有范数$k=t(x)$，并且被$S_t^A$所满足。此即$A\leqslant_{tt}S_t^A$，由引理4知$S_t^A$是$tt$-完全的。〔证毕〕

**推论1**　当$A$是有穷集、创造集或单纯集时定理2的(i)、(ii)成立。

**证明**　因为有穷集为递归集且其补集无穷，再由创造集及单纯集的定义立得推论1成立。〔证毕〕

**推论2**　设$B$是单纯集，则对$A=B\times N$定理2中的(i)、(ii)仍成立。

证明由引理5可得。

令$t(x)=2^x-1$，$A=K=\{x\mid x\in W_x\}$，取$S$为Post构造的单纯集，就得到了〔1〕第八章定理Ⅷ。

现在转入讨论可计算编号。

设c为$N^2$的Cantor编号函数，$l,r:N\to N$满足$c(lx,rx)=x$，$l(c(x,y))=x$，$r(c(x,y))=y$，从〔2〕可知可构造出原始递归的1—1函数$c,r,l$，以下所出现的$c,r,l$均是指具有这种意义下的函数。

设$\sum_n$是所有$n$元有序数组r.e.集合的集合。当$n=1$时简记为$\sum$，设$\mathscr{R}\subseteq\sum$是r.e.集的非空集合，从$N$到$\mathscr{R}$的一个映射$v$：$N\to\mathscr{R}$称为$\mathscr{R}$的编号，对任意$n:n\mapsto vn\in\mathscr{R}$，$n$称为集合$v_n$的$v$-号码。〔3〕中给出了一个可计算编号的定义：设$v:N\to\mathscr{R}\subseteq\sum$是$\mathscr{R}$的一个编号，如果集合$G_v=\{\langle x,y\rangle\mid y\in vx\}$是r.e.集，则称$v$为一个可计算编号。

设$K(x_0,x)$是部分递归函数域$\mathscr{P}_1$上的Kleene函数，它是部分递归的通用函数[2]。

令$\prod_n = \text{range}\ \lambda x[K(n,x)]$，这样$\prod_0, \prod_1, \cdots, \prod_i$就给出了所有r.e.集的一个可接受枚举。我们称之为Post枚举。

**引理7**　若编号$v: N \to \mathscr{R} \subseteq \sum(\mathscr{R} \neq \phi)$是可计算的，则存在单元递归函数$\sigma$，使

$$\forall x: v_x = \prod_{\sigma(x)}.$$

这实际上就是[2]中给出的可计算编号的定义。

证明可见[3]pp.43—44。

**定理3**　设编号$v: N \to \mathscr{R} \subseteq \sum(\mathscr{R} \neq \phi)$，若存在递归函数$\sigma$，使$\forall x: vx = \prod_{\sigma(x)}$，则集合$G_v = \{\langle x,y \rangle | y \epsilon vx\}$是$r.e.$集。

**证明**　设有单元递归函数$\sigma$，使$\forall x: vx = \prod_{\sigma(x)}$，则依定义，$\prod_{\sigma(x)} = \text{range}\ \lambda y[K(\sigma(x),y)]$，由引理1，可找到二元递归函数$\Psi$，使$\text{range}\lambda y[K(\sigma(x),y)] = \text{domain}\ \lambda y[\Psi(x,y)]$，即有$\forall x: vx = \text{domain}\ \lambda y[\Psi(x,y)]$，故有$y \epsilon vx$，因而$\text{domain}\ \lambda xy[\Psi(x,y)] = \{\langle x,y \rangle | y \epsilon vx\}$，此集合即是$G_v$，由$\Psi$的部分递归性可知$G_v$是r.e.集。至此定理得证。

由引理7及定理3可知[2]与[3]给出的形式上不同的可计算编号的定义是等价的。

## 参 考 文 献

[1] Rogers, H.Jr., *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, New York, McGraw-Hill, Inc., 1967.

[2] Малбчев, А.И., Алгоритмы и рекурсивные фунции, Наука, Москва, 1965.

[3] Ершов, Ю.Д., Теория нумераций, Наука, Москва, 1977.

[4] 王浩，中山大学学报（自然科学版），1983，3.

# Some Properties of Simple Sets and Computable Numberings

*Wang Jie*

## Abstract

The main results of this paper are: let $S_x^t$ be a t-section of $N$, then (i) it is possible to go uniformly from any index $x$ of $S_x^t$ to its r.e. index; let A be a r.e. set with $\overline{A}$ infinitely, then (ii) if $S$ is a simple set and $\forall x: S_x^t \cap \overline{S} \neq \phi$, then $\bigcup_{x \epsilon A} S_x^t \cup S$ is simple; (iii) if $A$ is tt-complete, then $\bigcup_{x \epsilon A} S_x^t \cup S$ is also tt-complete. This paper also proves that the two definitions of computable numberings, given by papers [2] and [3] respectively and different in form, are equivalent.