关于解析函数的星形半径

林和曾

（数学力学系）

摘　　要

用N表示在$|z|<1$内解析且满足条件$f'(0)-1=f(0)=0$的函数f的集合；对于$\alpha\epsilon[0,1)$，用Q_α表示在$|z|<1$内解析且满足条件$p(0)=1$与$|p(z)-\frac{1}{2\alpha}|<\frac{1}{2\alpha}$的函数p的集合，而$V_{\lambda,\beta}$表示由等式$g(z)=\lambda h(z)+(1-\lambda)zh'(z)$定义的函数g的集合，其中$\lambda\epsilon[0,1]$、$\beta\epsilon[0,1)$及h是$\beta$级星形函数。本文主要对满足条件：$f\epsilon N$，$g\epsilon V_{\lambda,\beta}$且$\frac{f}{g}\epsilon Q_\alpha$的函数类$\{f\}$，求出它的星形半径。

我们用H表示在单位圆$|z|<1$内解析的函数全体所成的集合，其中满足条件$f'(0)-1=f(0)=0$的子集记作N。对于$\alpha\epsilon[0,1)$，定义

$$P_\alpha=\{p:p\epsilon H,\ p(0)=1\text{且}Re\{p(z)\}>\alpha\}$$

$$Q_\alpha=\{p:p\epsilon H,\ p(0)=1\text{且}|p(z)-\frac{1}{2\alpha}|<\frac{1}{2\alpha}\}$$

$$S^*_\alpha=\{f:f\epsilon N\text{且}Re\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\}>\alpha\}$$

$$K_\alpha=\{f:f\epsilon N\text{且}Re\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\}>\alpha\}$$

简记$P_0=P$，$S^*_0=S^*$，$K_0=K$，规定$Q_0=P$。S^*与K中的函数分别称为星形函数与凸函数。我们知道，$K\subset S^*_{\frac{1}{2}}\subset S^*$。对于$\lambda\epsilon[0,1]$，$\beta\epsilon[0,1)$，定义

$$V_{\lambda,\beta}=\{g:g(z)=\lambda h(z)+(1-\lambda)zh'(z),\ h\epsilon S^*_\beta\}$$

本文首先对满足如下条件的函数类$\{f\}$：$f\epsilon N$且$\frac{f}{g}\epsilon Q_\alpha$或$\frac{f}{g}\epsilon P_\alpha$，其中$g\epsilon V_{\lambda,\beta}$，求得它的星形半径，所得到的结果推广了〔2〕、〔3〕与〔4〕的有关定理，还改进了〔5〕的结果。其次，求出当$|z|<1$时$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|$的上界，其中函数$f$满足条件：$f\epsilon N$且$\frac{f}{g}\epsilon P_\alpha$，而$g\epsilon S^*_\beta$，得到的结果推广了〔6〕的有关定理，并且改进了〔6〕的定理1，从而得到准确的结果。

引理1[1]　如果$p\in Q_\alpha$或$p\in P_\alpha$，那么，对$|z|=r<1$有

$$\left|\frac{p'(z)}{p(z)}\right|\leqslant\frac{2(1-\alpha)}{(1-r)[1+(1-2\alpha)r]}$$

引理2[7]　若$w\in H$且适合$|w(z)|\leqslant|z|$，又$p(z)=\frac{1+Dw(z)}{1+Bw(z)}$，其中$-1\leqslant D<B\leqslant 1$，则对$|z|=r<1$有

$$Re\left\{\frac{zw'(z)}{(1+Bw(z))(1+Dw(z))}\right\}\leqslant\frac{-1}{(B-D)^2}\left[Re\left\{\frac{D}{p(z)}+Bp(z)\right\}\right.$$
$$\left.-\frac{r^2|Bp(z)-D|^2-|1-p(z)|^2}{(1-r^2)|p(z)|}-(B+D)\right]$$

引理3[7]　设$p(z)=\frac{1+Dp(z)}{1+Bp(z)}$，其中$w\in H$且适合$|w(z)|\leqslant|z|$，又$-1\leqslant D<B\leqslant 1$，则对$C\geqslant B$，当$|z|=r<1$时有

$$Re\left\{Cp(z)+\frac{D}{p(z)}\right\}-\frac{r^2|Bp(z)-D|^2-|1-p(z)|^2}{(1-r^2)|p(z)|}$$
$$\geqslant C\frac{1+Dr}{1+Br}+D\frac{1+Br}{1+Dr}\qquad 当R_0\leqslant R_1$$

$$Re\left\{Cp(z)+\frac{D}{p(z)}\right\}-\frac{r^2|Bp(z)-D|^2-|1-p(z)|^2}{(1-r^2)|p(z)|}$$
$$\geqslant\frac{2}{1-r^2}\left\{(1+D)^{\frac{1}{2}}\left[(1+C)-(CD+D+B^2+C)r^2\right.\right.$$
$$\left.\left.+D(B^2+C)r^4\right]^{\frac{1}{2}}-(1-BDr^2)\right\}\qquad 当R_0\geqslant R_1$$

其中　$$R_0=\left[\frac{(1+D)(1-Dr^2)}{(1+C)-(C+B^2)r^2}\right]^{\frac{1}{2}},\qquad R_1=\frac{1+Dr}{1+Br},$$

定理1　设$f\in N$，$g\in V_{\lambda,\beta}$。如果$\frac{f}{g}\in Q_\alpha$，则f在$|z|<r_0$内单叶且星形。其中，r_0是如下方程的最小正根：

$$\begin{aligned}Q_1(r)\equiv\ &1+2[2(\alpha-1)+(\beta-1)]r+2[(2\beta-1)(\alpha-1)-(2\alpha-1)(\alpha+1)\\&-(2\alpha-1)(\beta-2)]r^2+2[(2\alpha-1)(3\alpha-2)-\beta(2\alpha-1)\\&-(2\alpha-1)(2\beta-1)(\alpha-1)]r^3+(2\alpha-1)(2\beta-1)(2\alpha-1)r^4=0\end{aligned}$$

当 $R_0'\leqslant R_1'$

$$Q_2(r)\equiv\frac{1}{1-\alpha}\left\{2[\alpha(2-\beta)A]^{\frac{1}{2}}-A+\beta-2\alpha\right\}-\frac{2(1-\alpha)r}{(1-r)[1+(1-2\alpha)r]}=0$$

当 $R_0'\geqslant R_1'$.

其中 $$a=\beta+\lambda-\lambda\beta$$

$$R_0'=\left\{\frac{a[1-(2a-1)r^2]}{(2-\beta)(1-r^2)}\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad R_1'=\frac{1+(2a-1)r}{1+r}$$

$$A=\frac{1-(2a-1)r^2}{1-r^2}$$

又界限r_0是最好的。

证明 依假设，有$q\epsilon Q_a$，使得$f=qg$，于是

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=\frac{zq'(z)}{q(z)}+\frac{zg'(z)}{g(z)} \tag{1}$$

由于$g\epsilon V_{\lambda,\beta}$，有$h\epsilon S_\beta^*$，使得

$$g(z)=\lambda h(z)+(1-\lambda)zh'(z)$$

因此

$$\frac{zg'(z)}{g(z)}=\frac{(1-\lambda)z^2h''(z)+zh'(z)}{\lambda h(z)+(1-\lambda)zh'(z)}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{zh'(z)}{h(z)} & \text{当}\lambda=1\\[2ex] \dfrac{z\left(\dfrac{zh'(z)}{h(z)}\right)'}{\dfrac{\lambda}{1-\lambda}+\dfrac{zh'(z)}{h(z)}}+\dfrac{zh'(z)}{h(z)} & \text{当}\lambda\neq1\end{cases}$$

因为 $h\epsilon S_\beta^*$，故有$p\epsilon P$使得

$$\frac{zh'(z)}{h(z)}=\beta+(1-\beta)p(z)$$

由熟知的不等式

$$Re\{p(z)\}\geqslant\frac{1-|z|}{1+|z|}$$

于是，对$|z|=r<1$有

$$Re\left\{\frac{zg'(z)}{g(z)}\right\}=Re\left\{\frac{zh'(z)}{h(z)}\right\}\geqslant\frac{1+(2\beta-1)r}{1+r} \qquad \text{当}\lambda=1 \tag{2}$$

又有

$$\frac{zg'(z)}{g(z)}=\beta+(1-\beta)p(z)+\frac{zp'(z)}{\dfrac{a}{1-a}+p(z)} \qquad \text{当}\lambda\neq1$$

若记$p_1(z)=a+(1-a)p(z)$，则得

$$\frac{zg'(z)}{g(z)}=-\frac{\lambda}{1-\lambda}+\frac{1}{1-\lambda}p_1(z)+\frac{zp_1'(z)}{p_1(z)} \tag{3}$$

易知$p_1\epsilon P_a$，于是，依从属原理有$w\epsilon H$且$|w(z)|\leqslant|z|$，使得

$$p_1(z)=\frac{1+(2a-1)w(z)}{1+w(z)} \tag{4}$$

从而
$$\frac{zp_1'(z)}{p_1(z)}=2(1-a)\frac{-zw'(z)}{[1+w(z)][1+(2a-1)w(z)]}$$

利用引理2，对$|z|=r<1$有

$$Re\left\{\frac{zp_1'(z)}{p_1(z)}\right\}\geqslant\frac{1}{2(1-a)}\left[Re\left\{\frac{2a-1}{p_1(z)}+p_1(z)\right\}\right.$$
$$\left.-\frac{r^2|p_1(z)-(2a-1)|^2-|1-p_1(z)|^2}{(1-r^2)|p_1(z)|}-2a\right] \tag{5}$$

由(3)、(4)与(5)可得，当$\lambda\neq1$，$|z|=r<1$时有

$$Re\left\{\frac{zg'(z)}{g(z)}\right\}\geqslant-\frac{\lambda}{1-\lambda}+\frac{1}{2(1-a)}\left[Re\left\{\frac{2a-1}{p_1(z)}\right.\right.$$
$$\left.\left.+(3-2\beta)p_1(z)\right\}-\frac{r^2|p_1(z)-(2a-1)|^2-|1-p_1(z)|^2}{(1-r^2)|p_1(z)|}-2a\right]$$

再利用引理3，则当$R_0'\leqslant R_1'$时，有

$$Re\left\{\frac{zg'(z)}{g(z)}\right\}\geqslant-\frac{\lambda}{1-\lambda}+\frac{1}{2(1-a)}\left[(3-2\beta)\frac{1+(2a-1)r}{1+r}+\frac{(2a-1)(1+r)}{1+(2a-1)r}-2a\right]$$
$$=\frac{1+2(2a+\beta-2)r+(2a-1)(2\beta-1)r^2}{(1+r)[1+(2a-1)r]} \tag{6}$$

而当$R_0'\geqslant R_1'$时，有

$$Re\left\{\frac{zg'(z)}{g(z)}\right\}\geqslant-\frac{\lambda}{1-\lambda}+\frac{1}{2(1-a)}\left\{\frac{2}{1-r^2}\left[2\sqrt{a(2-\beta)}\,(1-2ar^2+(2a-1)r^4)^{\frac{1}{2}}\right.\right.$$
$$\left.\left.-(1-(2a-1)r^2)\right]-2a\right\}=-\frac{\lambda}{1-\lambda}+\frac{1}{1-a}\left\{2[a(2-\beta)A]^{\frac{1}{2}}-A-a\right\} \tag{7}$$

由(1)、(2)、(6)、(7)与引理1，对$|z|=r<1$,有

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}\geqslant\begin{cases}\dfrac{Q_1(r)}{(1-r^2)[1+(2a-1)r][1+(1-2a)r]} & \text{当 } R_0'\leqslant R_1' \quad (8)\\ Q_2(r) & \text{当 } R_0'\geqslant R_1' \quad (9)\end{cases}$$

由于当$r\epsilon(0,1)$时，R_0'单调上升而R_1'单调下降，又当$r=0$时，$R_0'<R_1'$而当r接近1时$R_0'>R_1'$,因此，关于r的方程$R_0'=R_1'$在区间$(0,1)$内有唯一的一个根，记它为$r(\beta,a)$。不难得知，当$r\epsilon[0,r(\beta,a)]$时有$R_0'\leqslant R_1'$，及方程$Q_1(r)=0$在$(0,1)$内有根，于是，从(8)可知，当方程$Q_1(r)=0$的最小正根$r'\leqslant r(\beta,a)$时，在$|z|<r'$内恒有

$Re\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\}>0$,从而$r_0=r'$.如果$r'>r(\beta,\alpha)$，由于当$R_0'=R_1'$时(8)的右端等于(9)的右端，因此，(9)的右端当$r=r(\beta,\alpha)$时取正值。又易知当r接近1时，(9)的右端取负值。这就说明方程$Q_2(r)=0$在区间$(r(\beta,\alpha),1)$内有根。记其中最小的根为r''。从(9)可知，在$|z|<r''$内恒有$Re\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\}>0$,因此这时$r_0=r''$。

界限r_0是最好的。因为如果对应有$R_0'\leqslant R_1'$，这时取

$$h(z)=\frac{z}{(1+z)^{2-2\beta}}$$

$$g(z)=\lambda h(z)+(1-\lambda)zh'(z) \tag{10}$$

$$f(z)=\frac{1-z}{1+(1-2\alpha)z}g(z) \tag{11}$$

我们不难验明，当$z=r_0$时$Re\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\}=0$.又如果对应有$R_0'>R_1'$，这时取

$$h(z)=\frac{z}{(1-2bz+z^2)^{1-\beta}}$$

其中常数b由等式

$$\frac{1-2\alpha br_0+(2\alpha-1)r_0^2}{1-2br_0+r_0^2}=(\frac{\alpha}{2-\beta}A_0)^{\frac{1}{2}}$$

确定，其中$A_0=\frac{1-(2\alpha-1)r_0^2}{1-r_0^2}$。而函数$g$与$f$分别由(10)与(11)给出。可以验明，当$z=r_0$时，$Re\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\}=0$.证完。

注 1 在定理1中，若取$\lambda=1$，$\beta=0$及$\alpha=\frac{1}{2}$，则得〔2〕的定理3；若取$g(z)\equiv z$，$\alpha=\frac{1}{2}$，则得〔2〕的定理1；若取$\lambda=1$，$\beta=0$及$\alpha=0$，则得〔3〕的定理3；若取$g(z)\equiv z$，$\alpha=0$,则得〔3〕的定理1（$n=1$的情形）；若取$\lambda=1$，则得〔4〕的定理4。又定理1也推广并改进了〔5〕的定理3。

定理 2 设$f\epsilon N,g\epsilon V_{\lambda\cdot\beta}$.如果$\frac{f}{g}\epsilon P_\alpha$,那么，$f$在$|z|<r_0$内单叶且星形。其中$r_0$与定理1给出的$r_0$相同。

由定理1的证明并注意到引理1，便可得知定理2成立。

一般说，定理2的结果不是最好的，但它改进了〔5〕的定理1。

类似于定理1，可证：

定理 3 设$f\epsilon N,h\epsilon K_\beta$且

$$g(z)=\lambda h(z)+(1-\lambda)zh'(z)$$

若$\frac{f'}{g'}\epsilon Q_\alpha$,则$f$在$|z|<r_0$内单叶且是凸的。其中的$r_0$与定理1给出的$r_0$相同。

注 2 在定理3中，若取$\lambda=1$，则得〔4〕的定理6。

定理 4　设$f\epsilon N$，$g\epsilon S_\beta^*$.若$\frac{f}{g}\epsilon P_\alpha$,则当$|z|=r<1$时有

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\frac{1+2(2-2\alpha-\beta)r+(1-2\alpha)(1-2\beta)r^2}{(1-r)[1+(1-2\alpha)r]}\tag{12}$$

这个结果是准确的。

证明　由假设，有$f=gp$,其中$p\epsilon P_\alpha$.于是

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=\frac{zg'(z)}{g(z)}+\frac{zp'(z)}{p(z)}$$

利用不等式

$$\left|\frac{zg'(z)}{g(z)}\right|\leqslant\frac{1+(1-2\beta)r}{1-r}\qquad(|z|=r<1)$$

及引理 1，即可得(12)。

容易验证，若取

$$g(z)=\frac{z}{(1+z)^{2-2\beta}},\qquad f(z)=\frac{z[1+(2\alpha-1)z]}{(1+z)^{3-2\beta}}$$

及$z=r$，则不等式(12)中的等号成立。证完。

推论　设 $g\epsilon S_\beta^*$,$\lambda\epsilon[0,1]$. 若

$$f(z)=\lambda g(z)+(1-\lambda)zg'(z)$$

则对$|z|=r<1$有

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\frac{1+2(2-2\alpha-\beta)r+(1-2\alpha)(1-2\beta)r^2}{(1-r)[1+(1-2\alpha)r]}\tag{13}$$

其中$\alpha=\lambda+\beta-\lambda\beta$.又结果是准确的，若取

$$g(z)=\frac{z}{(1+z)^{2-2\beta}}$$

则不等式(13)中的等号当$z=r$时成立。

证明　易见$\frac{f}{g}\epsilon P_\alpha$.由定理 4 即得推论。

注 3　[6]的定理 1 当$\alpha\epsilon[0,\frac{1}{2})$时不是最好的结果，推论改进了它，从而得到准确的结果。

参考文献

〔1〕 Shaffer, D. B., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 37(1973), 517-520.
〔2〕 MacGregor, T.H., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 14(1963), 521-524.
〔3〕 ——, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 14(1963), 514-520.
〔4〕 Shaffer, D. B., *J. Math. Anal. and Appl.*, 45(1974), 73-80.
〔5〕 吴卓人，复旦大学学报，2(1980)，157-161.
〔6〕 吴卓人，数学学报，2(1981)，283-290.
〔7〕 Karunakaran, V., *Pacif. J. Math.*, 61(1975), 173-182.

On the Radius of Starlikeness of Certain Analytic Functions

Lin Hezeng

Abstract

Let N be the class of functions f which are analytic in the unit disk $|z|<1$ and satisfy the conditions $f'(0)-1=f(0)=0$. Let Q_a denote the class of functions analytic in $|z|<1$ with expansion $p(z)=1+a_2z^2+\cdots$, which satisfy the inequality $|p(z)-\frac{1}{2a}|<\frac{1}{2a}$, $0\leqslant a<1$. Let $V_{\lambda,\beta}$ denote the class of functions $g(z)=\lambda h(z)+(1-\lambda)zh'(z)$, where h is a starlike function of order β for $\beta\in[0,1)$ and $\lambda\in[0,1]$. Our principal result is the determination of the radius of starlikeness for the family of functions f which satisfy the conditions $f\in N$ and $\frac{f}{g}\in Q_a$ where $g\in V_{\lambda,\beta}$.