# 主动型天线用于引力波探测的可能性探讨

唐孟希
（物理学系）

圆柱形引力波接收天线受到激发会发生纵向振动，激发后天线具有能量与引力波的无量纲振幅$h_0$的平方成正比。由于$h_0$很小，这就对换能器、前置放大器等天线的后续设备的噪声带来了严格的要求。如果设法提高天线吸收的能量，即使信噪比没有得到改善，对天线系统的工作状态也是有好处的。下面的计算表明。采用预激发振动的主动型天线可以达到这个目的。

在外加激发力和引力波联合作用下，中间支承的圆柱体天线的振动方程为

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+k\frac{\partial\xi}{\partial t}-v_s^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{1}{\rho S}(Fe+Fg), \tag{1}$$

其中$\xi=\xi(x,t)$是天线的位移，$k$是阻尼系数，$v_s$为天线中的纵波传播速度，$\rho$为材料的密度，$S$为天线的横截面积，$Fe$和$Fg$分别为激发力密度和引力波作用的起潮力密度，即天线单位长度上受的激发力和起潮力。

天线纵模振动的固有频率为

$$\omega_n=\frac{n\pi v_s}{L}\qquad(n=1,3,5,\cdots). \tag{2}$$

天线的运动可以写成各次振动模的叠加

$$\xi=\sum_{n=2l+1}e^{-\frac{k}{2}t}\varphi_n(t)\sin\frac{n\pi}{L}x. \tag{3}$$

其中$\varphi_n$满足

$$\sum_{n=2l+1}\left(\frac{d^2\varphi_n}{dt^2}+\omega_n'^2\varphi_n\right)\sin\frac{n\pi}{L}x=\frac{1}{\rho S}e^{\frac{k}{2}t}(F_e+Fg), \tag{4}$$

$$\omega_n'^2=\omega_n^2-\frac{1}{4}k^2\approx\omega_n^2. \tag{5}$$

天线在简谐力

$$F_e=F_0[\delta(x-\frac{L}{2})-\delta(x+\frac{L}{2})]\cos pt \tag{6}$$

激发下运动，可求得

$$\varphi_n=A\cos(\omega_n't+\eta_n)+\frac{4F_0e^{\frac{k}{2}t}}{M\left(\sqrt{(\omega_n^2-p^2)^2+\frac{1}{4}k^2p^2}\right)}\cos(pt-\alpha_n), \tag{7}$$

本文1982年12月收到。

其中 $\alpha_n=\operatorname{arctg}\dfrac{kp}{2(\omega_n^2-p^2)}$， $M=L\rho S$ . (8)

令$e^{-\frac{k}{2}t}\to 0$，得天线稳定振动方程为

$$\xi=\sum_{n=2l+1}\frac{4F_0}{M\sqrt{(\omega_n^2-p^2)^2+\frac{1}{4}k^2p^2}}\cos(pt-\alpha_n)\sin\frac{n\pi}{L}x. \tag{9}$$

## 一、天线在平面引力波作用下的运动

若平面引力波沿天线垂直的方向到达天线，可以算出引力波作用的起潮力密度为

$$F_g=2x\rho S\frac{d^2h_{11}}{dt^2}. \tag{10}$$

设引力波为脉冲形式

$$h_{11}(t)=\begin{cases}h_0\cos\Omega t & t\in[0,\tau]\\ 0 & t\overline{\in}[0,\tau]\end{cases} \tag{11}$$

并考虑引力波到达时刻与天线激发力之间的位相差$\beta_n$，天线的稳定振动为

$$\xi=\sum_{n=2l+1}\frac{4F_0}{M\sqrt{(\omega_n^2-p^2)^2+\frac{1}{4}k^2p^2}}\cos(pt+\beta_n-\alpha_n)\sin\frac{n\pi}{L}x. \tag{12}$$

把起潮力密度按函数族$\left\{\sin\frac{n\pi}{L}x\right\}$展开，代入(4)得天线在激发力和起潮力联合作用下$\varphi_n$满足的方程

$$\frac{d^2\varphi_n}{dt^2}+\omega_n'^2\varphi_n=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left[\frac{4F_0}{L}\cos(pt+\beta_n)-\frac{8Lh_0\Omega^2}{n^2\pi^2}\cos\Omega t\right]e^{\frac{k}{2}t}$$
$$t\in[0,\tau]. \tag{13}$$

$\varphi_n$同时应满足连续性条件

$$\left.\begin{aligned}&e^{-\frac{k}{2}t}\varphi_n\big|_{t=0}=\frac{4F_0}{M\sqrt{(\omega_n^2-p^2)^2+\frac{1}{4}k^2p^2}}\cos(pt+\beta_n-\alpha_n)\big|_{t=0}\\&\frac{d}{dt}\left[e^{-\frac{k}{2}t}\varphi_n\right]\Big|_{t=0}=\frac{d}{dt}\left[\frac{4F_0}{M\sqrt{(\omega_n^2-p^2)^2+\frac{1}{4}k^2p^2}}\cos(pt+\beta_n-\alpha_n)\right]\Big|_{t=0}\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

解(13)及(14)可得

$$\varphi_n=A_n\cos(\omega_n't+\delta_n)+e^{\frac{k}{2}t}[E_0\cos(pt+\beta_n-\alpha_n)+G_0\cos(\Omega t-\theta_n)], \tag{15}$$

其中 $\theta_n=\operatorname{arctg}\dfrac{k\Omega}{2(\omega_n^2-\Omega^2)}$， $E_0=\dfrac{4F_0}{M\sqrt{(\omega_n^2-p^2)^2+\frac{1}{4}k^2p^2}}$ (16)

$G_0=-\dfrac{8h_0\Omega^2L}{n^2\pi^2\sqrt{(\omega_n^2-\Omega^2)^2+\frac{1}{4}k^2\Omega^2}}$. $A_n,\delta_n$可由连续条件(14)定出。

## 二、共振情形下方程的解

考虑共振情形下的基模振动，这时有$\omega_1=p=\Omega$，$n=1$。由(8)，(14)，(15)及(16)得

$$\alpha_1=\theta_1=\frac{\pi}{2}，\delta_1=\frac{\pi}{2}，A_1=\frac{16h_0\omega_1L}{\pi^2k}\text{及}E_0=\frac{8F_0}{k\omega_1M}.$$

$$\xi_1=\left\{\left[\frac{8F_0\cos\beta_1}{k\omega_1M}-\frac{16h_0\omega_1L}{\pi^2k}\left(1-{}^{-\frac{k}{2}t}\right)\right]\sin\omega_1t+\right.$$

$$\left.+\frac{8F_0\sin\beta_1}{k\omega_1M}\cos\omega_1t\right\}\sin\frac{\pi}{L}x. \tag{17}$$

对于超新星爆发产生的脉冲引力波，$\omega_1\sim10^{-4}\text{sec}^{-1}$，$\tau\sim10^{-3}\text{sec}$，若天线$Q\sim10^7$，便有$\frac{k}{2}t=\frac{\omega_1}{2Q}t\ll1$。故$e^{-\frac{k}{2}}\approx1-\frac{k}{2}t$，即

$$\xi_1=\left[\left(\frac{8F_0\cos\beta_1}{k\omega_1M}-\frac{8h_0\omega_1Lt}{\pi^2}\right)\sin\omega_1t+\frac{8F_0\sin\beta_1}{k\omega_1M}\cos\omega_1t\right]\sin\frac{\pi}{L}x, \tag{18}$$

在$x=\frac{L}{2}$处可能达到的最大振幅

$$\xi_{\max}=\sqrt{\left(\frac{8F_0}{k\omega_1M}\right)^2+\left(\frac{8h_0\omega_1L\tau}{\pi^2}\right)^2-\frac{128h_0L\tau F_0}{kM\pi^2}\cos\beta_1}, \tag{19}$$

根号内有三项，第一项是天线在激发力单独作用下的本底振动，第二项是引力波引起的振动，第三项是二者耦合引起的。由于$h_0$很小，第二项与$h_0^2$成比例，第三项与$h_0$成比例，故第二项与第三项相比要小得多。把第二项略去，得

$$\xi_{\max}=\sqrt{\left(\frac{8F_0}{k\omega_1M}\right)^2-\frac{128h_0L\tau F_0}{kM\pi^2}\cos\beta_1}. \tag{20}$$

对应天线由于引力波作用引起的能量增量

$$|\triangle E_v|=\frac{1}{4}M\omega_1^2\frac{128h_0F_0L\tau}{kM\pi^2}|\cos\beta_1|, \tag{21}$$

而静态天线在同样的引力波作用下能量增量

$$|\triangle F_s|=\frac{1}{4}M\omega_1^2\left(\frac{8h_0\omega_1L\tau}{\pi^2}\right)^2 \tag{22}$$

显然，只要适当控制$F_0$，便可以使$|\triangle E_v|>|\triangle E_s|$。

$\beta_1$是天线的本底振动和引力波的位相差，它是无法事先知道的。为此，我们可以用两根同样的天线，使它们彼此以$\frac{\pi}{2}$的位相差作稳定振动，就可以保证有一根天线$|\cos\beta_1|>\frac{\sqrt{2}}{2}$。

对于我们的天线$M=2\times10^6g$，$\omega_1=9\times10^3\text{sec}^{-1}$，$L=2\times10^2\text{cm}$，$Q=10^5$。取$\tau=10^{-3}\text{sec}$，$h_0=10^{-17}$，$|\cos\beta_1|=0.7$，只要$F_0>2\times10^{-6}\text{dyne}$，便可使$|\triangle E_v|>|\triangle E_s|$。

## 三、非共振情形下方程的解：

假定激发力频率不等于天线的基频，而引力波频率与天线的基频相等，即$p=m\omega_1$，

$\Omega=\omega_1$。可得 $\alpha_1\approx 0$，$\theta_1=\dfrac{\pi}{2}$，$E_0\approx\dfrac{4F_0}{M\omega_1^2(m^2-1)}$，$G_0=-\dfrac{16h_0\omega_1 L}{k\pi^2}$，$\delta_1=\dfrac{\pi}{2}$，$A_1=\dfrac{16h_0\omega_1 L}{k\pi^2}$。在 $\dfrac{\omega_1}{2Q}t\ll 1$ 的条件下，得

$$\xi_1=\left[\frac{8h_0L\omega_1 t}{\pi^2}\sin\omega_1 t+\frac{4F_0}{M\omega_1^2(m^2-1)}\cos(m\omega_1 t+\beta_1)\right]\sin\frac{\pi}{L}x. \tag{23}$$

在 $h_0$ 的精度下，天线振动的总能量：

$$\begin{aligned}E=&\frac{1}{2}S\rho\int_{-L/2}^{L/2}\left[\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial t}\right)^2+\frac{\omega_1^2L^2}{\pi^2}\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x}\right)^2\right]dx\\ \approx&\frac{1}{4}M\left[\frac{4F_0}{M\omega_1(m^2-1)}\right]^2\cdot\left[m^2\sin^2(m\omega_1 t+\beta_1)+\cos^2(m\omega_1 t+\beta_1)\right]\\ &+\frac{4F_0h_0L}{\pi^2(m^2-1)}\left\{m\omega_1 t\sin[(m-1)\omega_1 t-\beta_1]+(m-\omega_1 t)\cos[(m-1)\omega_1 t-\beta_1]\right\}\\ &+\frac{4F_0h_0L}{\pi^2(m^2-1)}\left\{m\omega_1 t\sin[(m+1)\omega_1 t+\beta_1]-(m+\omega_1 t)\cos[(m+1)\omega_1 t+\beta_1]\right\}.\end{aligned} \tag{24}$$

第一项是天线在激发力作用下的本底振动能量，第二、三项是引力波来时天线增加的能量。增加的部分以频率 $\omega_\pm=(m\pm 1)\omega_1$ 变化。其能量变化的幅值

$$\triangle E_\pm=\frac{4h_0F_0L}{\pi^2(m^2-1)}\sqrt{(mm_1\tau)^2+(\omega_1\tau\mp m)^2}. \tag{25}$$

显然，只要适当控制 $F_0$，便可使 $|\triangle E_\pm|>|\triangle E_s|$。若取 $m=3$，我们的天线来说，$F_0>2$dyne。

## 四、讨论

（1）运用预激发的方法，可以使天线能量的增量与 $h_0$ 成正比。

（2）由于天线热噪声也与天线本底振动产生耦合，故本法不能改善信噪比。但由于此时天线处于较高的能量状态，可以降低对后续设备的要求，这与文献〔1〕的结果是符合的。

（3）在共振时，天线增加的能量与本底振动的能量同以 $\omega_1$ 的频率变化，所以无法把它们分离。但若把天线工作于非共振态，在输出中就会出现以 $\omega_\pm$ 为频率变化的能量增量，这就有可能将它们分离。

（4）为了避免激发源引入新的噪声，可以把天线激发到预定振幅后，把 $F_0$ 撤除，由高 $Q$ 天线维持时间常数很大的衰减振动，用这方法对引力波进行间断检测。

（5）对于连续引力波，由于这时引力波源的方向能够确定，可以用两根互相垂直放置的天线作比较测量：一根的轴线与引力波的入射方向平行，一根与之垂直。用外力激发它们同步振动，并调整激发力使与引力波同相，然后再测量两根天线能量的差。

## 参 考 文 献

〔1〕 J. Weber, *Phys. Lett.*, 81A, 9 (1981), 542.


# Investigation of the Possibility to Detect Gravitational Wave by Means of an Active Antenna

*Tang Mengxi*


## Abstract

The advantage would be brought by the means of adding external force to excite a cylindrical antenna before the coming of the gravitational wave. Under the action of the gravitational wave, vibrated antenna would get more energy than static antenna. It is shown that the vibrating energy got by the antenna from gravitational wave is linear in $h_0$ and $F_0$, the additional exciting force. Although the means cannot improve the signal-noise ratio, it would be active in detection of the gravitational wave. Because the antenna operates on the state of greater energy, so we can reduce the limitation to the noise to the following equipmenents, — the transducer, pre-aplifier and etc.


## 更　　正

本刊1983年第4期《扰动不稳定……》一文，由于校对疏漏，须作如下刊误：

| 错 漏 处 | 误 | 正 |
|---|---|---|
| (1.1),(1.2),(1.3)式 | $\vec{V}_k$ | $\vec{V}_h$ |
| (1.6)式 | $\partial\phi'\phi'$ $\partial p$ | $\frac{\partial\phi'}{\partial p}$ |
| I 式；(2.17) | $p=p$；$\phi$ | $p=p_0$；$\Psi$ |
| (2.22)；(2.25),(2.27) | $\Psi'$；$c_\gamma$ | $\phi'$；$c_r$ |
| (3.4)式下一行 | (………转换线) | (………转换函数) |
| (5.1)和(5.2)式 | $\frac{\partial h'}{\partial X}$，$\frac{\partial h}{\partial X}$；$\nu_0'$ | $\frac{\partial h'}{\partial x}$，$\frac{\partial h'}{\partial x}$；$v_0'$ |
| (5.5)式，及该页倒2行 | $\nu'$ | $v'$ |
| (2.24)式分母 | $\frac{(u^{12}+u^{12})}{2}$ | $\frac{(u'^2+v'^2)}{2}$ |
| *图 5 | $\partial h'/\partial X$；$V_0'$；$u_0'$ | $\partial h'/\partial x$；$v_0'$；$v_0'$ |
| *图 6 右侧文字 | $\nu_0'$； | $v_0'$； |
| 参考文献〔2〕；〔3〕 | *KVO*；*Charuey* | *KUO*；*Charney* |
| **英文摘要题目** | *Instabilty* | *Instability* |
| ………第9行 | *dased* | *based* |

*此外，图5和图6互相调换，图下说明不变。