旋转周期结构的振动问题

蔡承武　吴福光

（数学力学系）

摘　要

本文用单一子结构的固有振型表达了整体结构的谐影响系数，并考虑了在谐干扰力作用下拟旋转周期结构的强迫振动，扩展了Thomas[1]，Fricker和Potter[2]的工作．

旋转周期结构是由N个几何与物理性质完全相同的子结构组成，这N个子结构的位置关于某一轴是对称的，整个结构绕该轴旋转$2\pi/N$的整数倍角度时，结构的几何位置不变。Thomas[1]用有限元分析旋转周期结构的固有频率，将问题归结为求解单一子结构的Hermite矩阵特征值方程。Fricker和Potter[2]在Thomas工作的基础上，考虑阻尼矩阵可以解耦的情形，用振型迭加法分析瞬态响应。

本文定义了旋转坐标，在旋转坐标下结构的运动方程为N组单一子结构的方程，概括了文〔1〕的全部结果；考虑不能解耦的阻尼系统，应用文〔3〕的方法得到了响应对单一子结构的固有振型的展开式，从而得到了谐影响系数的表达式。在此基础上，对拟旋转周期结构，提出了一种精确的分析方法。

一、旋转坐标下的运动方程

为了利用周期性，将各子结构作相同的有限元剖分，各子结构对应节点的节点位移的定义应具有旋转周期性，节点位移的编号方式相同，两子结构间的公共节点的自由度只能属于其中一个子结构，因此，离散化的各子结构位移矢量之间不存在公共自由度，子结构按其几何位置的顺序编号．用有限元分析，整结构离散化运动方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}+\mathbf{K}\mathbf{X}=\mathbf{F} \tag{1}$$

其中$\mathbf{X}$为整结构的位移矢量，它由各子结构的位移矢量$X_p(P=1,2,\cdots,N)$依次排列而成，$\mathbf{M}$、$\mathbf{C}$、$\mathbf{K}$、$\mathbf{F}$分别为整结构的质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵和干扰力矢量。刚度矩阵一般可表为$N\times N$个子矩阵，第i行、第j列子矩阵记为$\mathbf{K}_{ij}$，每一子矩阵均为$J\times J$方阵，J是单一子结构的自由度。由结构的旋转周期性可得：

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{K}_{11}=\mathbf{K}_{22}=\cdots=\mathbf{K}_{NN},\\&\mathbf{K}_{1j}=\mathbf{K}_{2,j+1}=\cdots=\mathbf{K}_{N-j+1,N}=\mathbf{K}_{N-j+2,1}=\cdots=\mathbf{K}_{N,j-1}.\\&\qquad\qquad(j=2,3,\cdots,N)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

本文1983年2月收到．

对于M、C也存在与(2)相似的关系。

在复数域上的NJ维矢量空间，取一组标准正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{NJ}$，称为旋转坐标的坐标矢量，它们的定义如下：

$$\mathbf{E}_p\equiv[\boldsymbol{\varepsilon}_{(p-1)J+1},\boldsymbol{\varepsilon}_{(p-1)J+2},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{pJ}]\equiv\frac{1}{\sqrt{N}}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_J\\ e^{ip\psi}\mathbf{I}_J\\ e^{i2p\psi}\mathbf{I}_J\\ \vdots\\ e^{i(N-1)p\psi}\mathbf{I}_J\end{pmatrix},\quad (p=1,2,\cdots,N)\tag{3}$$

其中$\psi=2\pi/N$，$\mathbf{I}_J$为J阶单位矩阵。

作坐标变换，令

$$\mathbf{X}=\mathbf{E}\Theta\tag{4}$$

其中

$$\mathbf{E}\equiv[\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2,\cdots\mathbf{E}_N]\equiv[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{NJ}],$$

$$\Theta=[\boldsymbol{\theta}_1^T,\boldsymbol{\theta}_2^T,\cdots,\boldsymbol{\theta}_N^T]^T$$

$\boldsymbol{\theta}_p(p=1,2,\cdots,N)$为$J$维矢量。可以直接验证，E为$U$矩阵[注]，即

$$\mathbf{E}^*\mathbf{E}=\mathbf{I}_{NJ}$$

其中$\mathbf{E}^*$表示E的共轭转置矩阵，$\mathbf{I}_{NJ}$为NJ阶单位矩阵。

将式(4)代入运动方程(1)，并以$\mathbf{E}^*$左乘等式两端，便得到旋转坐标下的运动方程

$$\mathbf{M}_\theta\ddot{\Theta}+\mathbf{C}_\theta\dot{\Theta}+\mathbf{K}_\theta\Theta=\mathbf{F}_\theta\ ,\tag{5}$$

其中

$$\mathbf{M}_\theta=\mathbf{E}^*\mathbf{M}\mathbf{E},\ \mathbf{C}_\theta=\mathbf{E}^*\mathbf{C}\mathbf{E},\ \mathbf{K}_\theta=\mathbf{E}^*\mathbf{K}\mathbf{E},\ \mathbf{F}_\theta=\mathbf{E}^*\mathbf{F}.$$

K_θ的第r行，第s列子矩阵记为$\mathbf{k}_{rs}(r,s=1,2,\cdots,N)$，它为$J$阶方阵。应用式(2)，经矩阵运算后得到

$$\mathbf{k}_{rs}=\mathbf{E}_r^*\mathbf{K}\mathbf{E}_s=0\ \ (r\neq s)\tag{6}$$

$$\mathbf{k}_r\equiv\mathbf{k}_{rr}=\mathbf{E}_r^*\mathbf{K}\mathbf{E}_r=\mathbf{K}_{11}+\sum_{n=2}^{N}\mathbf{K}_{1n}e^{i(n-1)r\psi}\tag{7}$$

对于复杂约束的情形[1]

$$\mathbf{K}_{11}=\sum_{p=1}^{N}\mathbf{K}_{11}^{(p)},\quad \mathbf{K}_{1n}=\mathbf{K}_{1n}^{(1)}+\mathbf{K}_{1n}^{(n)},\quad (n=2,3,\cdots,N)\tag{8}$$

上式中矩阵的上标表示对刚度矩阵作出贡献的子结构编号。

利用旋转周期性可得

$$\mathbf{K}_{11}=\mathbf{K}_{11}^{(1)}+\sum_{p=2}^{N}\mathbf{K}_{(N+2-p),(N+2-p)}^{(1)}=\sum_{p=1}^{N}\mathbf{K}_{pp}^{(1)}.$$

$$\mathbf{K}_{1n}^{(n)}e^{i(n-1)r\psi}=\mathbf{K}_{p1}^{(1)}e^{i(N+1-p)r\psi}=\mathbf{K}_{p1}^{(1)}e^{-i(p-1)r\psi},\ (n=2,3,\cdots,N)$$

其中$p=N+2-n$。后一个式子对n求和得

[注]实际上，“E为U矩阵”与“$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{NJ}$是一组标准正交基”这两个结论是等价的

$$\sum_{n=2}^{N}\mathbf{K}_{1n}^{(n)}e^{i(n-1)r\psi}=\sum_{p=2}^{N}\mathbf{K}_{p1}^{(1)}e^{-i(p-1)r\psi}$$

将以上各式代入(7)便得

$$\mathbf{k}_r=\sum_{p=1}^{N}\mathbf{K}_{pp}^{(1)}+\sum_{p=2}^{N}\mathbf{K}_{1p}^{(1)}e^{i(p-1)r\psi}+\sum_{p=2}^{N}\mathbf{K}_{p1}^{(1)}e^{-i(p-1)r\psi},\ (r=1,2,\cdots,N) \tag{9}$$

$\mathbf{k}_r$是Hermite矩阵（即$\mathbf{k}_r^*=\mathbf{k}_r$），它由单一子结构的刚度矩阵所确定。

$\mathbf{K}_\theta$可表为

$$\mathbf{K}_\theta=\begin{bmatrix}\ddots & & \\ & \mathbf{k}_r & \\ & & \ddots\end{bmatrix} \tag{10}$$

将式(9)、(10)中有关$\mathbf{K}$的分块矩阵换成$\mathbf{M}$或$\mathbf{C}$的对应分块矩阵，便可得到$\mathbf{M}_\theta$或$\mathbf{C}_\theta$。$\mathbf{K}_\theta$、$\mathbf{M}_\theta$、$\mathbf{C}_\theta$均为分块对角矩阵，运动方程(5)分解为N组J个变量的微分方程组：

$$\mathbf{m}_r\ddot{\boldsymbol{\theta}}_r+\mathbf{c}_r\dot{\boldsymbol{\theta}}_r+\mathbf{k}_r\boldsymbol{\theta}_r=\mathbf{f}_r,\ (r=1,2,\cdots,N) \tag{11}$$

其中$\mathbf{m}_r$, $\mathbf{c}_r$分别为$\mathbf{M}_\theta$，$\mathbf{C}_\theta$的第r个对角块，$\mathbf{f}_r$可表为

$$\mathbf{f}_r=\mathbf{E}_r^*\mathbf{F},\ (r=1,2,\cdots,N) \tag{12}$$

由于$\mathbf{m}_r$、$\mathbf{c}_r$、$\mathbf{k}_r$分别由单一子结构的质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵所确定，因此旋转坐标下的运动方程可称为单一子结构的运动方程。

二、Hermite 矩阵特征值方程

首先回顾一下无阻尼自由振动的一些结论。令(11)式右端$\mathbf{f}_r=0$，并以$\boldsymbol{\theta}_r=\boldsymbol{\varphi}_r e^{i\omega t}$代入方程的左端，得到Hermite矩阵特征值方程

$$(\mathbf{k}_r-\omega^2\mathbf{m}_r)\boldsymbol{\varphi}_r=\mathbf{0},\ (r=1,2,\cdots,N) \tag{13}$$

对任一r值均存在J个实特征值$\omega_{r,1}^2$, $\omega_{r,2}^2$, $\cdots$, $\omega_{r,J}^2$及对应的J个复特征矢量$\boldsymbol{\varphi}_r^{(1)}$, $\boldsymbol{\varphi}_r^{(2)}$, $\cdots$, $\boldsymbol{\varphi}_r^{(J)}$。特征方程(13)的$N$组方程是不完全独立的，按式(9)可以证明$\mathbf{k}_{N-r}=\overline{\mathbf{k}_r}$，类似地有$\mathbf{m}_{N-r}=\overline{\mathbf{m}}_r$。特征对之间存在如下关系：

$$\omega_{N-r,s}^2=\omega_{r,s}^2,\quad \boldsymbol{\varphi}_{N-r}^{(s)}=\overline{\boldsymbol{\varphi}}_r^{(s)}\qquad (s=1,2,\cdots,J,\quad r=1,2,\cdots,N-1)$$

当$r=N$时，$\mathbf{k}_r$, $\mathbf{m}_r$均为实对称矩阵，这时特征矢量是实的。如果N为偶数，则$r=N/2$时，特征矢量也是实的。

特征矢量的正交归一化条件为

$$\boldsymbol{\varphi}_r^{(s)*}\mathbf{m}_r\boldsymbol{\varphi}_r^{(t)}=\delta_{st},\ (s,t=1,2,\cdots,J)$$

其次讨论无阻尼陀螺系统，令$\boldsymbol{\theta}_r=\boldsymbol{\varphi}_r e^{\omega t}$代入自由振动方程，得到

$$(\omega^2\mathbf{m}_r+\omega\mathbf{c}_r+\mathbf{k}_r)\boldsymbol{\varphi}_r=0,\ (r=1,2,\cdots,N) \tag{14}$$

对于无阻尼陀螺系统，$\mathbf{C}$为科利奥里矩阵，是反对的，$\mathbf{c}_r$是斜Hermite矩阵。可以证明以下结论：

(1) 特征值是纯虚数（当$\mathbf{K}$、$\mathbf{M}$正定）

(2) $\omega_{N-r,s}=\overline{\omega}_{r,s}=-\omega_{r,s}$, $\boldsymbol{\varphi}_{N-r}^{(s)}=\overline{\boldsymbol{\varphi}}_{r}^{(s)}$ $(s=1,2,\cdots,2J)$

最后，讨论不能解耦的阻尼系统，特征值方程的形式仍为式(14)，此时$\mathbf{c}_r$与$\mathbf{k}_r$、$\mathbf{m}_r$一样为Hermite矩阵。特征值是复数，具有非正的实部，特征值成共轭对出现。

三、响应按单一子结构固有振型展开

1.无阻尼受迫振动

在旋转坐标下的运动方程为

$$\mathbf{m}_r\ddot{\boldsymbol{\theta}}_r+\mathbf{k}_r\boldsymbol{\theta}_r=\mathbf{f}_r,\quad (r=1,2,\cdots,N) \tag{15}$$

令

$$\boldsymbol{\theta}_r=\Phi_r\mathbf{q}_r \tag{16}$$

其中

$$\Phi_r=[\boldsymbol{\varphi}_r^{(1)},\boldsymbol{\varphi}_r^{(2)},\cdots,\boldsymbol{\varphi}_r^{(J)}],$$

$\boldsymbol{\varphi}_r^{(s)}(s=1,2,\cdots,J)$为正交归一化的特征矢量，$\mathbf{q}_r$为主坐标。正交归一化条件可表为

$$\Phi_r^*\mathbf{m}_r\Phi_r=\mathbf{I}_J,\quad \Phi_r^*\mathbf{k}_r\Phi_r=\Omega_r^2,$$

其中 Ω_r^2为J个特征值组成的对角矩阵，即

$$\Omega_r^2=\begin{bmatrix}\ddots & & \\ & \omega_{r,s}^2 & \\ & & \ddots\end{bmatrix}$$

以(16)代入(15)，并用 Φ_r^*左乘方程两端，便得主坐标的运动方程

$$\ddot{\mathbf{q}}_r+\Omega_r^2\mathbf{q}_r=\mathbf{Q}_r\quad (r=1,2,\cdots N) \tag{17}$$

其中

$$\mathbf{Q}_r=\Phi_r^*\mathbf{E}_r^*\mathbf{F}=\Phi_r^*\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N}e^{-i(n-1)r\psi}\mathbf{F}_n \tag{18}$$

$\mathbf{F}_n$为作用在第n个子结构上的干扰力矢量。

考虑谐干扰力$\mathbf{F}=\mathbf{F}_0e^{i\lambda t}$作用下的稳态响应，令

$$\mathbf{q}_r=\mathbf{q}_{r0}e^{i\lambda t},$$

以上式代入(17)解得响应的振幅矢量

$$\mathbf{q}_{r0}=(\Omega_r^2-\lambda^2\mathbf{I}_J)^{-1}\Phi_r^*\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N}e^{-i(n-1)r\psi}\mathbf{F}_{n0} \tag{19}$$

$\mathbf{F}_{n0}$为$\mathbf{F}_n$的振幅。以上式代入(16)便得$\boldsymbol{\theta}_r$的振幅

$$\boldsymbol{\theta}_{r0}=\Phi_r(\Omega_r^2-\lambda^2\mathbf{I}_J)^{-1}\Phi_r^*\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N}e^{-i(n-1)r\psi}\mathbf{F}_{n0} \tag{20}$$

于是，按式(4)可得响应的振幅

$$\mathbf{X}_0=\sum_{r=1}^{N}\mathbf{E}_r\boldsymbol{\theta}_{r0}=\sum_{r=1}^{N}\mathbf{E}_r\Phi_r(\Omega_r^2-\lambda^2\mathbf{I}_J)^{-1}\Phi_r^*\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N}e^{-i(n-1)r\psi}\mathbf{F}_{n0} \tag{21}$$

由于$\mathbf{E}_{N-r}=\overline{\mathbf{E}}_r$，$\Phi^{(s)}_{N-r}=\overline{\Phi}^{(s)}_r$，$\omega_{N-r,s}=\omega_{r,s}$，展开式给出实的矢量。第$j$个子结构的振幅矢量为

$$\mathbf{X}_{j0}=\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}e^{i(j-n)r\psi}\sum_{s=1}^{J}\frac{\boldsymbol{\varphi}_r^{(s)}\boldsymbol{\varphi}_r^{(s)*}}{\omega_{r,s}^2-\lambda^2}\mathbf{F}_{n0} \tag{22}$$

在第l个子结构的第m个自由度上作用一单位振幅的谐干扰力，在第j个子结构第k个自由度上产生的谐振动的振幅称为谐影响系数，记为$\beta(j,k;l,m)$，从(22)可得

$$\beta(j,k;l,m)=\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}e^{i(j-l)r\psi}\sum_{s=1}^{J}\frac{\varphi_{r,k}^{(s)}\overline{\varphi}_{r,m}^{(s)}}{\omega_{r,s}^2-\lambda^2}$$

式中$\varphi_{r,k}^{(s)}$表示特征矢量$\boldsymbol{\varphi}_r^{(s)}$的第$k$个分量。容易证明，谐影响系数具有对称性，即

$$\beta(j,k;l,m)=\beta(l,m;j,k).$$

2.无阻尼陀螺系统

在旋转坐标下的运动方程与式(11)相同，其中$\mathbf{m}_r$，$\mathbf{k}_r$为Hermite矩阵，$\mathbf{c}_r$为斜Hermite矩阵。

引入单一子结构的$2J$维状态矢量

$$\mathbf{z}_r=\begin{Bmatrix}\dot{\boldsymbol{\theta}}_r\\ \boldsymbol{\theta}_r\end{Bmatrix} \tag{23}$$

方程(11)等价于

$$\mathbf{A}_r\mathbf{z}_r+\mathbf{B}_r\dot{\mathbf{z}}_r=\mathbf{g}_r,\quad(r=1,2,\cdots,N) \tag{24}$$

其中

$$\mathbf{A}_r=\begin{bmatrix}\mathbf{m}_r & 0\\ 0 & \mathbf{k}_r\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}_r=\begin{bmatrix}0 & -\mathbf{m}_r\\ \mathbf{m}_r & \mathbf{c}_r\end{bmatrix},\quad \mathbf{g}_r\begin{Bmatrix}0\\ \mathbf{f}_r\end{Bmatrix} \tag{25}$$

显然，$\mathbf{A}_r$为Hermite矩阵，$\mathbf{B}_r$为斜Hermite矩阵。

特征值方程$(\mathbf{A}_r+\omega\mathbf{B}_r)\mathbf{Z}_r=\mathbf{0}$存在$2J$个虚特征值$\omega_{r,1},\omega_{r,2},\cdots,\omega_{r,2J}$和对应的特征矢量$\mathbf{Z}_r^{(1)},\mathbf{Z}_r^{(2)},\cdots,\mathbf{Z}_r^{(2J)}$，不难证明，对应于$\omega_{r,s}$的左特征矢量为$\overline{\mathbf{Z}}_r^{(s)}$。注意$\mathbf{Z}_r^{(s)}$与$\boldsymbol{\varphi}_r^{(s)}$的关系为

$$\mathbf{Z}_r^{(s)}=\begin{Bmatrix}\omega_{r,s}\boldsymbol{\varphi}_r^{(s)}\\ \boldsymbol{\varphi}_r^{(s)}\end{Bmatrix}$$

可令
$$\mathbf{Z}_r^{(s)*}\mathbf{B}_r\mathbf{Z}_r^{(s)}=2\omega_{r,s}\boldsymbol{\varphi}_r^{(s)*}\mathbf{m}_r\boldsymbol{\varphi}_r^{(s)}+\boldsymbol{\varphi}_r^{(s)*}\mathbf{c}_r\boldsymbol{\varphi}_r^{(s)}=2\omega_{r,s} \tag{26}$$

作为特征矢量$\mathbf{Z}_r^{(s)}$的归一化条件。

由特征值方程与(26)可得

$$\mathbf{Z}_r^{(s)*}\mathbf{A}_r\mathbf{Z}_r^{(s)}=-2\omega_{r,s}^2$$

考虑强迫振动的响应，令

$$\mathbf{z}_r = \psi_r \mathbf{q}_r, \tag{27}$$

其中$\mathbf{q}_r$为$2J$维矢量，称为广义坐标，

$$\psi_r = [\mathbf{Z}_r^{(1)}, \mathbf{Z}_r^{(2)}, \cdots, \mathbf{Z}_r^{(2J)}] = \begin{bmatrix} \Phi_r \Omega_r \\ \Phi_r \end{bmatrix}$$

而Ω_r为以$\omega_{r,1}, \omega_{r,2}, \cdots \omega_{r,2J}$为对角元的对角矩阵，

$$\Phi_r = [\varphi_r^{(1)}, \varphi_r^{(2)}, \cdots, \varphi_r^{(2J)}]$$

以(27)代入(24)，并以Ψ_r^*左乘等式两端得到

$$2\Omega_r \dot{\mathbf{q}}_r - 2\Omega_r^2 \mathbf{q}_r = \mathbf{Q}_r \tag{28}$$

式中

$$\mathbf{Q}_r = \psi_r^* \mathbf{g}_r = \Phi_r^* \mathbf{f}_r = \Phi_r^* \mathbf{E}_r^* \mathbf{F} \tag{29}$$

考虑谐干扰力作用下的谐振动，设

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 e^{i\lambda t}, \quad \mathbf{q}_r = \mathbf{q}_{r0} e^{i\lambda t} \tag{30}$$

将上式代入方程(28)，解得

$$\mathbf{q}_{r0} = \mathbf{V}_r \Phi_r^* \mathbf{E}_r^* \mathbf{F}_0 \tag{31}$$

其中$\mathbf{V}_r$为$2J$阶对角矩阵

$$\mathbf{V}_r = \frac{1}{2} \Omega_r^{-1} (i\lambda \mathbf{I}_{2J} - \Omega_r)^{-1}$$

从(27)可得

$$\theta_r = \Phi_r \mathbf{q}_r \tag{32}$$

从(4)得

$$\mathbf{X} = \sum_{r=1}^{N} \mathbf{E}_r \theta_r = \sum_{r=1}^{N} \mathbf{E}_r \Phi_r \mathbf{q}_r \tag{33}$$

以(31)的$\mathbf{q}_{r0}$代替上式中的$\mathbf{q}_r$，便得响应的振幅

$$\mathbf{X}_0 = \sum_{r=1}^{N} \mathbf{E}_r \Phi_r \mathbf{V}_r \Phi_r^* \mathbf{E}_r^* \mathbf{F}_0$$

从上式可得第j个子结构的振幅

$$\mathbf{X}_{j0} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} e^{i(j-n)r\psi} \sum_{s=1}^{2J} \frac{\varphi_r^{(s)} \varphi_r^{(s)*}}{2\omega_{r,s}(i\lambda - \omega_{r,s})} \mathbf{F}_{n0}$$

谐影响系数为

$$\beta(j,k;l,m) = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{N} e^{i(j-l)r\psi} \sum_{s=1}^{2J} \frac{\varphi_{r,k}^{(s)} \overline{\varphi}_{r,m}^{(s)}}{2\omega_{r,s}(i\lambda - \omega_{r,s})}$$

3.阻尼系统

旋转坐标下的运动方程(11)仍化为(24)的形式，其中

$$\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} -\mathbf{m}_r & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{k}_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{m}_r \\ \mathbf{m}_r & \mathbf{c}_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_r = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_r \end{Bmatrix}.$$

$\mathbf{A}_r, \mathbf{B}_r$均为Hermite矩阵。

考虑一对特征值方程

$$(\mathbf{A}_r+\omega\mathbf{B}_r)\mathbf{Z}_r=0 \tag{34}$$

$$(\mathbf{A}_{N-r}+\omega\mathbf{B}_{N-r})\mathbf{Z}_{N-r}=0 \tag{35}$$

由于$\mathbf{A}_{N-r}=\overline{\mathbf{A}_r}$，$\mathbf{B}_{N-r}=\overline{\mathbf{B}_r}$，将(35)取转置得

$$\mathbf{Z}^T_{N-r}(\mathbf{A}_r+\omega\mathbf{B}_r)=0$$

由此可见，对应于特征值ω，(35)的右特征矢量是(34)对应于同一特征值的左特征矢量。我们规定(34)和(35)的$2J$个特征值的排列次序相同，即$\omega_r^{(s)}=\omega_{N-r}^{(s)}$($s=1,2,\cdots,2J$)，则特征矢量的正交归一化条件可表为

$$\psi^T_{N-r}\mathbf{B}_r\Psi_r=\mathbf{I}_{2J}，\ \psi^T_{N-r}\mathbf{A}_r\psi_r=-\Omega_r \tag{36}$$

下面讨论强迫振动，以$\mathbf{z}_r=\Psi_r\mathbf{q}_r$代入方程(24)再以$\Psi^T_{N-r}$左乘等式两端，应用(36)得

$$\dot{\mathbf{q}}_r-\Omega_r\mathbf{q}_r=\mathbf{Q}_r \tag{37}$$

其中

$$\mathbf{Q}_r=\psi^T_{N-r}\mathbf{g}_r=\Phi^T_{N-r}\mathbf{f}_r=\Phi^T_{N-r}\mathbf{E}^*_r\mathbf{F}.$$

考虑$\mathbf{F}$为简谐力，以(30)代入(37)解得

$$\mathbf{q}_{r0}=(i\lambda\mathbf{I}_{2J}-\Omega_r)^{-1}\Phi^T_{N-r}\mathbf{E}^*_r\mathbf{F}_0. \tag{38}$$

由(4)、(32)、(38)得稳态响应的振幅为

$$\mathbf{X}_0=\sum_{r=1}^{N}\mathbf{E}_r\Phi_r(i\lambda\mathbf{I}_{2J}-\Omega_r)^{-1}\Phi^T_{N-r}\mathbf{E}^*_r\mathbf{F}_0.$$

从而可得第j个子结构响应的振幅为

$$\mathbf{X}_{j0}=\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}e^{i(j-n)r\psi}\sum_{s=1}^{2J}\frac{\boldsymbol{\varphi}_r^{(s)}\boldsymbol{\varphi}_{N-r}^{(s)T}}{i\lambda-\omega_{r,s}}F_{n0}$$

谐影响系数为

$$\beta(j,k;l,m)=\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}e^{i(j-l)r\psi}\sum_{s=1}^{2J}\frac{\varphi_{r,k}^{(s)}\varphi_{N-r,m}^{(s)}}{i\lambda-\omega_{r,s}}$$

四、拟旋转周期结构

本节对两种稍微破坏了结构周期性的情形给出精确解法。首先考虑对第j个子结构增加一个约束的情形，设约束方程可表为

$$\mathbf{a}^T\mathbf{X}_j=0 \tag{39}$$

$\mathbf{a}$为已知的J维实矢量。增加约束后的系统为真实系统，可以应用文[4]的方法处理，将约束代之以作用在第j个子结构上的J维约束反作用力$\mathbf{P}_j$，当$\mathbf{X}_j$满足约束方程(39)时，$\mathbf{P}_j$在$\mathbf{X}_j$上所作的功应等于零，即必须满足

$$\mathbf{P}_j^T \mathbf{X}_j = 0 \tag{40}$$

其中$\mathbf{X}_j$为满足(39)的任意J维矢量。比较(39)与(40)可知

$$\mathbf{P}_j = \mathbf{a}\mu$$

μ依赖于时间t。当系统作谐振动时，$\mathbf{P}_j$可表为

$$\mathbf{P}_j = \mathbf{a}\mu_0 e^{i\lambda t} \tag{41}$$

真实系统等价于旋转周期结构在第j个子结构上作用有附加的"干扰力"$\mathbf{P}_j$,强迫(39)式得到满足。

现以无阻尼系统为例来说明方法的基本思想。当第j个子结构作用有谐干扰力$\mathbf{P}_j$时，第j个子结构响应的振幅可从式(22)得到

$$\mathbf{X}_{j0} = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{J}\frac{\boldsymbol{\varphi}_r^{(s)}\boldsymbol{\varphi}_r^{(s)*}}{\omega_{r,s}^2-\lambda^2}\mathbf{a}\mu_0$$

代入约束条件(39)，得到

$$\mathbf{A}\mu_0 = 0$$

其中

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}^T\left(\sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{J}\frac{\boldsymbol{\varphi}_r^{(s)}\boldsymbol{\varphi}_r^{(s)*}}{\omega_{r,s}^2-\lambda^2}\right)\mathbf{a} \tag{42}$$

真实系统的频率方程为

$$|\mathbf{A}| = 0 \tag{43}$$

当有m个约束时，以上诸式中的$\mathbf{a}$便是$J\times m$矩阵，μ与μ_0为m维矢量，而$\mathbf{A}$为$m\times m$矩阵，频率方程的形式不变。

考虑受约束结构在谐干扰力$\mathbf{F}=\mathbf{F}_0 e^{i\lambda t}$作用下的强迫振动。在$\mathbf{F}$与$\mathbf{P}_j$作用下第$j$个子结构响应的振幅为

$$\mathbf{X}_{j0} = \frac{1}{N}\left[\sum_{r=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}e^{i(j-n)r\psi}\sum_{s=1}^{J}\frac{\boldsymbol{\varphi}_r^{(s)}\boldsymbol{\varphi}_r^{(s)*}}{\omega_{r,s}^2-\lambda^2}\mathbf{F}_{n0} + \sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{J}\frac{\boldsymbol{\varphi}_r^{(s)}\boldsymbol{\varphi}_r^{(s)*}}{\omega_{r,s}^2-\lambda^2}\mathbf{a}\mu_0\right]$$

代入约束条件(39)得

$$\mathbf{A}\mu_0 = \mathbf{B} \tag{44}$$

其中$\mathbf{A}$由(42)表达，

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}^T\sum_{r=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}e^{i(j-n)r\psi}\sum_{s=1}^{J}\frac{\boldsymbol{\varphi}_r^{(s)}\boldsymbol{\varphi}_r^{(s)*}}{\lambda^2-\omega_{r,s}^2}\mathbf{F}_{n0}.$$

当系统受到m个约束时，$\mathbf{A}$为$m\times m$实对称矩阵，$\mathbf{B}$为m维实矢量。从方程(44)可解得μ_0，从而确定约束反力及响应。

考虑拟旋转周期结构的第二种情形，当第j个子结构有一小缺口，缺口边缘面力为零。这个结构等价于受约束的旋转周期结构，约束条件就是原缺损部份作用在其它部份上的节点力为零。假想将缺口补上，使它与其它子结构的几何形状相同，这个子结构的

节点位移可分三部份

$$\mathbf{X}_j = [\mathbf{X}^T_{j(1)}, \mathbf{X}^T_{j(2)}, \mathbf{X}^T_{j(3)}]^T$$

其中$\mathbf{X}_{j(2)}$为缺口边缘节点的节点位移矢量，$\mathbf{X}_{j(3)}$为补缺口部份的节点位移矢量，其余节点的位移矢量记作$\mathbf{X}_{j(1)}$。单一子结构的有限元动力方程记为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & 0 \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{23} \\ 0 & \mathbf{M}_{32} & \mathbf{M}_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{X}}_{j(1)} \\ \ddot{\mathbf{X}}_{j(2)} \\ \ddot{\mathbf{X}}_{j(3)} \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & 0 \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} \\ 0 & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_{j(1)} \\ \mathbf{X}_{j(2)} \\ \mathbf{X}_{j(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{j(1)} \\ \mathbf{F}_{j(2)} \\ \mathbf{F}_{j(3)} \end{Bmatrix}$$

$\mathbf{X}_{j(3)}$只影响与缺口边缘节点自由度对应的运动方程，这个影响实际上是不存在的。因此需要满足约束条件

$$\mathbf{M}_{23}\ddot{\mathbf{X}}_{j(3)} + \mathbf{K}_{23}\mathbf{X}_{j(3)} = 0$$

考虑谐振动时，上式可表为

$$(\mathbf{K}_{23} - \lambda^2\mathbf{M}_{23})\mathbf{X}_{j(3)} = \mathbf{0} \tag{45}$$

其中λ为谐振动的圆频率，$\mathbf{X}_{j(3)}$应理解为有关自由度的振幅。若写成(39)的形式，可令

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{32} - \lambda^2\mathbf{M}_{32} \end{bmatrix}$$

至此，问题已可按前面讨论过的情形处理。必须指出，$\mathbf{X}_{j(3)}$中对$\mathbf{X}_{j(2)}$产生影响的自由度数目不能小于$\mathbf{X}_{j(2)}$的自由度数，否则约束条件(45)将不可能满足。

参　考　文　献

〔1〕D. L. Thomas, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 14(1979), 81—102.

〔2〕A.J.Fricker, S. Potter, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 17(1981), 957—974.

〔3〕谭忠棠、吴福光，多自由度线性系统阻尼受迫振动的统一解法，中山大学学报（自然科学版），1982， 1.

〔4〕胡海昌，多自由度线性阻尼系统的振动问题，固体力学学报，1980，1.

On the Vibration of Rotationally Periodic Structures

Cai Chengwu　　Wu Fuguang

Abstract

In this paper the harmonic forced vibrations of rotationally periodic structures for undamped gyroscope systems and damped systems have been considered. The harmonic influence coefficients are expanded in terms of the eigenvectors of a single substructure.

Rotationally quasi-periodic structures are discussed. The exact solutions for the harmonic forced vibrations of such structures are represented using expanded forms of the eigenvectors which are associated with the rotationally periodic structures.