

# 水中平板的水弹性振动\*

孙明光

(数学力学系)

本文利用有限元方法求解周边固定的平板的水弹性振动问题,并将计算结果与已有资料作了比较。

在讨论水弹性问题的论文中,不少假定水是可压缩的流体;本文为了简单起见,视水为不可压流体,使计算量大为减少<sup>[3,4]</sup>。

## 一、变分原理

设长方形平板置于无限的流体之中,并在它的平均位置作周期的小振幅运动。在这里重力及自由面影响均不考虑。流体假定为理想、不可压,运动无旋。

选取空间固定右手坐标系,  $xoy$  平面与板的平均振动位置相重合, 原点在板中心,  $x$  轴与板的长边平行,  $y$  轴与短边平行,  $Z$  轴垂直于  $xoy$  平面, 构成右手系。平板边长分别为  $a$  与  $b$ 。

设流体运动速度势为  $\Phi(x, y, z, t)$ , 密度为  $\rho$ ,  $V$  为流体运动的区域,  $\Gamma_H$  为板的湿面积, 则速度势  $\Phi$  应满足拉普拉斯方程:

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{在 } V \text{ 内}) \quad (1)$$

$$\text{附着条件: } -\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \frac{\partial W}{\partial t} \quad (\text{在 } \Gamma_H \text{ 上}) \quad (2)$$

其中  $W$  为板的位移,  $t$  为时间,  $n$  为板面的外法向。

离平板无穷远处, 要求  $\Phi$  正则, 即

$$\Phi = O\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad \text{当 } R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \longrightarrow \infty.$$

考虑板只作横向振动, 周边固定, 满足通常的薄板理论假设, 因而运动相对于板的平均位置  $xoy$  平面将是反对称的。在  $xoy$  平面上、板面以外, 必须满足  $\Phi(x, y, 0, t) = 0$ 。

$$\text{取 } \left. \begin{aligned} W &= W_0(x, y) \cos \omega t \\ \Phi &= -\omega \varphi_0(x, y) \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中  $\omega$  为振动频率。

本文于1980年9月收到

显然  $\varphi_0$  及  $W_0$  应满足:  $\Delta\varphi_0 = 0$  ( $V$  内)

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{\partial\varphi_0}{\partial n} = W_0 \text{ (}\Gamma_H\text{上)} \\ & \varphi_0 \rightarrow 0 \text{ (}R \rightarrow \infty\text{)} \text{ 及 } \varphi_0(x, y, 0) = 0 \text{ (板之外)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

不考虑板边的张力, 板中面应力假设为零, 则板的势能及动能如下:

$$\left. \begin{aligned} \text{势能} &= \frac{D}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left\{ (\Delta^2 W)^2 + 2(1-\mu) \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy \\ \text{能动} &= \frac{m}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 dx dy \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

这里  $m$  为单位面积板的质量,  $\mu$  为泊桑比,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^3)}$  为刚度系数,  $E$  为杨氏模量,  $h$  为板厚。

注意到, 流体压力  $p = -\rho \frac{\partial\Phi}{\partial t}$  (6)

利用格林公式可得流体动能:

$$\frac{1}{2} \iiint_V (\nabla\Phi)^2 d\tau = -\frac{1}{2} \iint_{\Gamma_H} \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial n} ds \quad (7)$$

(双面)

则流体——板系统的拉格朗日函数为:

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} \iint \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 dx dy - \frac{1}{2} \rho \iint \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial n} ds \\ &\quad - \frac{D}{2} \iint \left\{ (\nabla^2 W)^2 + 2(1-\mu) \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy \end{aligned} \quad (8)$$

将(3)代入(8), 考虑到周期振动的情形得哈密顿作用量函数为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} L dt = \pi\omega \left\{ \frac{m}{2} \iint W_0^2 dx dy + \rho \iint_{\text{双面}} \varphi_0 W_0 dx dy - \frac{D}{2\omega^2} \iint \left[ \left( \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2(1-\mu) \left[ \left( \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \right] \right] dx dy \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

由一次变分  $\delta S = 0$  (10)

即得板的变分方程。对于流体运动, 变分方程<sup>(2)</sup>为

$$\delta I(\varphi_0) = 0 \quad (11)$$

其中  $I(\varphi_0) = \frac{\rho}{2} \iiint_V \left[ \left( \frac{\partial\varphi_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\varphi_0}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial\varphi_0}{\partial z} \right)^2 \right] dv - \rho \iint_{\text{双面}} \varphi_0 W_0 ds$  (12)

以  $\gamma h = mg$  ( $\gamma$  为单位板厚时单位面积的板重) 代(10)式可写为

$$\delta(M\omega^2 - K) = 0 \quad (13)$$

其中  $M = \frac{\gamma h}{2g} \iint W_0^2 dx dy + \rho \iint_{\text{双面}} \varphi_0 W_0 dx dy$  (14)

$$K = \frac{D}{2} \iint \left\{ \left( \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left[ \left( \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy \quad (15)$$

有很多情形，如船底板，只是单面接水，因而(12)和(14)中的积分  $\iint \varphi_0 W_0 dx dy$  只需单面积分。下面我们只讨论此情形。可以证明在任何情形下  $\iint \varphi_0 W_0 dx dy > 0$ 。

### 二、频率方程的建立

在本文有限元法的计算中，对板我们采用不完全协调的4节点矩形单元，每一节点

位移为  $U_i = \begin{pmatrix} W_i \\ W_{x_i} \\ W_{y_i} \end{pmatrix}, (i=1,2,3,4)$ 。每个矩形单元的4个节点位移用列向量  $\{U\}^e$  表示：

$$\{U\}^e = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_{x_1} \\ W_{y_1} \\ \vdots \\ W_{y_4} \end{pmatrix} \quad (16)$$

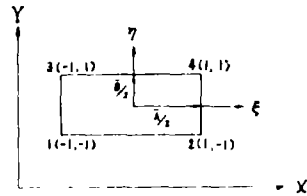


图 1

这里  $W_x = \frac{\partial W}{\partial x}, W_y = \frac{\partial W}{\partial y}$ 。

取矩形单元的局部坐标  $(\xi, \eta)$ ，如图 1 所示。

矩形单元体的位移模式表示为：

$$W_0 = [\bar{N}] \{N\}^e \quad (17)$$

其中  $[\bar{N}] = [N_1, N_{x_1}, N_{y_1}, N_2, N_{x_2}, N_{y_2}, \dots, N_{y_4}] \quad (18)$

而 
$$\left. \begin{aligned} \bar{N}_i &= \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (2 + \xi_i \xi + \eta_i \eta - \xi^2 - \eta^2) \\ \bar{N}_{x_i} &= -\frac{1}{8} \frac{A}{2} \xi_i (1 + \xi_i \xi)^2 (1 - \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \\ \bar{N}_{y_i} &= -\frac{1}{8} \frac{B}{2} \eta_i (1 + \eta_i \eta)^2 (1 - \eta_i \eta) (1 + \xi_i \xi) \end{aligned} \right\} (i=1,2,3,4). \quad (19)$$

对流体则取 8 节点的长方体单元(如图 2)取节点的参数为速度势

$\varphi_i (i=1,2, \dots, 7,8)$ 。于是列向量

$$\{\varphi\}^e = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_8 \end{pmatrix}$$

单元体的速度势模式为：

$$\varphi_0 = [N] \{\varphi\}^e \quad (20)$$

其中  $[N] = [N_1, N_2, \dots, N_8] \quad (21)$

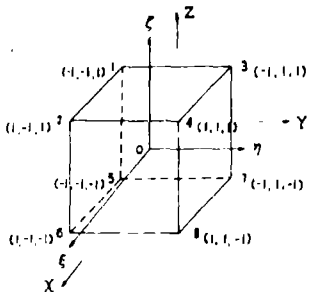


图 2

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (1 + \zeta_i \zeta) \quad i = 1, 2, \dots, 8 \tag{22}$$

将(17)、(20)代入(11)和(13)式

首先

$$\begin{aligned} & \delta \frac{\rho}{2} \iiint_e \left[ \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau \\ & = \delta \frac{\rho}{2} \iiint_e \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \end{Bmatrix} d\tau \end{aligned} \tag{23}$$

而  $\begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \end{Bmatrix} = [B_F] \{\varphi\}^e$

其中  $[B_F] = \begin{pmatrix} \frac{2}{A} & 0 & & & & \\ & \frac{2}{B} & & & & \\ 0 & & \frac{2}{C} & & & \\ & & & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} \\ & & & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \dots & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \\ & & & \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \dots & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \zeta} \end{pmatrix}_{3 \times 3} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \dots & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \dots & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \zeta} \end{pmatrix}_{3 \times 8}$

因而  $\left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right] = ([B_F] \{\varphi\}^e)^T = \{\varphi\}^{eT} [B_F]^T$

上式中  $[ ]^T$  表示矩阵的转置，以下同。故

$$\delta \frac{\rho}{2} \iiint_e \left[ \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = \{\delta \varphi\}^T [S_e] \{\varphi\}^e \tag{24}$$

其中  $[S_e] = \frac{\rho ABC}{8} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_F]^T [B_F] d\xi d\eta d\zeta$

其次考虑流体与板的耦合项： $\delta \rho \iint \varphi_0 W_0 dx dy$ 。这项积分只在平板内进行，在(20)式中令  $\zeta = 1$  便得板面上的

$$\varphi_0 = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4] \begin{Bmatrix} N'_1 \\ N'_2 \\ N'_3 \\ N'_4 \end{Bmatrix} \tag{25}$$

这里  $N'_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)$ , ( $i = 1, 2, 3, 4$ )。

故 
$$\delta\rho \int_e \varphi_0 W_0 dx dy = [\delta\varphi_1 \cdots \delta\varphi_4] [A_e] \{U\}^e \quad (\text{对流流体})$$

$$= \{\delta U\}^{eT} [A_e]^T \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{对板}) \quad (26)$$

其中 
$$[A_e]_{4 \times 12} = \frac{\rho \bar{A} \bar{B}}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} [\bar{N}_1, \bar{N}_2 \cdots \bar{N}_{12}] d\xi d\eta$$

对(14)的第一项有

$$\delta \frac{\gamma h}{2g} \int_e W_0^2 dx dy = \delta \frac{\gamma h}{2g} \int_e \{U\}^{eT} [N]^T [\bar{N}] \{U\}^e dx dy$$

$$= \{\delta U\}^e [K_e] \{U\}^e \quad (27)$$

其中 
$$[K_e]_{12 \times 12} = \frac{\gamma h \bar{A} \bar{B}}{g \cdot 4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\bar{N}]_{12 \times 1}^T [\bar{N}]_{1 \times 12} d\xi d\eta$$

$[\bar{N}]$ 由(18)式表示。

对(15)式之K现分为三部份, 第一项

$$\delta \frac{D}{2} \int_e \left( \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \right)^2 dx dy = \{\delta U\}^{eT} [T_{1e}] \{U\}^e \quad (28)$$

其中 
$$[T_{1e}]_{12 \times 12} = \frac{D \bar{A} \bar{B}}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\bar{N}_{xx} + \bar{N}_{yy}]_{12 \times 1}^T [\bar{N}_{xx} + \bar{N}_{yy}]_{1 \times 12} d\xi d\eta$$

而 
$$[\bar{N}_{xx} + \bar{N}_{yy}] = \left[ \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 N_{x1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_{x1}}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 N_{y1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_{y1}}{\partial y^2}, \dots \right]$$

第二项 
$$\delta D(1-\mu) \int_e \left( \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy = \{\delta U\}^{eT} [T_{2e}] \{U\}^e \quad (29)$$

其中 
$$[T_{2e}]_{12 \times 12} = \frac{D(1-\mu) \bar{A} \bar{B}}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\bar{N}_{xy}]_{12 \times 1}^T [\bar{N}_{xy}]_{1 \times 12} d\xi d\eta$$

而 
$$[\bar{N}_{xy}] = \left[ \frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 N_{x1}}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 N_{y1}}{\partial x \partial y}, \dots \right]$$

第三项 
$$-\delta D(1-\mu) \int_e \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} dx dy = -\{\delta U\}^{eT} [T_{3e}] \{U\}^e \quad (30)$$

其中 
$$[T_{3e}]_{12 \times 12} = \frac{D(1-\mu) \bar{A} \bar{B}}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([\bar{N}_{xx}]_{12 \times 1}^T [\bar{N}_{yy}]_{1 \times 12} + [\bar{N}_{yy}]_{12 \times 1}^T [\bar{N}_{xx}]_{1 \times 12}) d\xi d\eta$$

而 
$$[\bar{N}_{xx}] = \left[ \frac{\partial^2 \bar{N}_1}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \bar{N}_{x1}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \bar{N}_{y1}}{\partial x^2}, \dots \right]$$

$$[\bar{N}_{yy}] = \left[ \frac{\partial^2 \bar{N}_1}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \bar{N}_{x1}}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \bar{N}_{y1}}{\partial y^2} \dots \right]$$

最后, 记  $[T_e] = [T_{1e}] + [T_{2e}] + [T_{3e}]$

由各单元矩阵总合起来得总矩阵。对(12)式有

$$\sum_{i=1}^m \{\delta\varphi\}^{e_i T} [S_e]_i \{\varphi\}^{e_i} - \sum_{i=1}^n \{\delta\varphi\}^{e_i T} [A_e]_i \{U\}^{e_i} = 0$$

由此可得,  $[S]\{\varphi\} = \begin{Bmatrix} [A]\{U\} \\ 0 \end{Bmatrix}$  (31)

这里  $\{\varphi\}$  的排列是将板面上的  $\varphi_i$  先排, 然后再排其他, 这通过移动  $[S]$  的行列总是可以做到的。这里  $[S]$  及  $[A]$  是由单元矩阵  $[S_e]_i$  及  $[A_e]_i$  迭加到对应行列而得到。

类似的对(13)式进行“对号入座”迭加处理, 可以得到方程:

$$\omega^2 \left[ [K]\{U\} + [A]^T \{\varphi\} \right]_{\text{板面}} = [T]\{U\} \quad (32)$$

### 三、解法

这里的水弹性问题必须同时求解未知量  $\{U\}$  及  $\{\varphi\}$ , 因而方程组(31)和(32)必须耦合求解, 为了能在小型计算机上求解, 我们采用了分层子结构法。将板及流体作如图3的有限元分割, 且对不同深度作不同的分割, 逐层计算, 算至最上面的第一层, 将流体运动与板振动偶合起来, 由(31)求出  $\{\varphi\}$  对  $\{U\}$  之关系, 然后代入(32), 求解广义特征值问题, 计算频率  $\omega$  及振型  $\{U\}$ 。

对于广义特征值问题的求解, 我们采用快速同步叠代法<sup>(6)</sup>, 求几个最低的特征频率。

限于计算机的容量, 对板我们只分为四个单元, 对流体计算时多数只取二层, 每层也只分四个单元。我们计算了三个大小不同的板的例子, 每个例子都对不同板厚、不同水深进行了计算, 计算结果如附表:

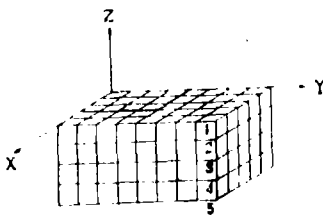


图 3

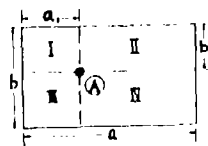


图 4

对第一个例子, 一阶共振频率由能量法计算为255赫芝(板厚5mm)和204赫芝(板厚4mm), 按鬼头方法<sup>(4)</sup>计算为166赫芝(板厚5mm)和132赫芝(板厚4mm), 而对实艇一块  $28 \times 26.5 \times 0.4$  的底板测得共振频率为240赫芝。(此时按能量法算得为211赫芝)。

对第二个例子, 由能量法计算为1200赫芝, 由鬼头方法计算为766赫芝, 而对实艇一块  $40 \times 12.8 \times 0.5$  的底板测得共振频率为392赫芝。(此时按能量法计算为1032赫芝)。实际上, 这块板边界刚性较差。

对第三个例子,由能量法计算为195赫芝,由鬼头方法计算得134赫芝。而对实艇一块 $40 \times 30 \times 0.5$ 的底板测得共振频率为95赫芝。

以上对实艇底板的实测结果来自船舶研究中心吴士冲的工作。由此可见,本文计算的共振频率值偏高,而能量法及鬼头方法的计算结果,有时低于实测值,有时高于实测值,这说明实际的船底板并不是完全固定的,本文估算的振动压力值是真值的上界。

此外,由我们计算结果可以看出,如例1情形1、3及4,当水深增加时,附加质量效应减少,自振频率增大,压力减小,这与文[1]的结果类似。同时也可以看出,板厚不均匀,局部变薄时如例1的情形5,则挠度增大,自振率降低,脉动压力也降低。还有当板厚变化时,如例1的情形1及2,板的振型变化很小,但频率则与厚度成正比变化。这些都与实际情况相符。

附表

例号	平板尺寸(图四) (cm)	情形号	板厚 (cm)	水深 (cm)	一阶共振频率 (赫芝)	振型(点A处)			压力 p 幅值 kg/cm <sup>2</sup>
						W	W <sub>x</sub>	W <sub>y</sub>	
1	a = 32 b = 28 a <sub>1</sub> = 14 b <sub>1</sub> = 13	1	0.4	25	250	4.4	1.6	-0.9	65.4
		2	0.5	25	334	4.2	1.5	-0.89	111.4
		3	0.4	90	311	5.4	2	-1.2	53.5
		4	0.4	360	372	6.6	2.4	-1.4	23.9
		5	区域10.3 其余0.4	90	288	5.6	2.9	-1.65	47.0
2	a = 40 b = 12 a <sub>1</sub> = 18 b <sub>1</sub> = 5	1	0.5	25	1565	4.2	31	-5	
		2	0.5	360	1695	2.9	44	-3.5	97.6
3	a = 40 b = 30 a <sub>1</sub> = 18 b <sub>1</sub> = 14	1	0.5	25	250	3.4	0.9	-0.6	61.2

## 参 考 文 献

- [1] Hiroshi Lsshiki 等, On the Heaving Motion of a Circular Dick in Shallow Water, 日本造船学会论文集, 136 (1974), 135.
- [2] P.N.Misra, Transverse Vibrations of a Ship Holl in Ideal Fluid Determined Through Variational Methods, J. of Ship Reseaxch, 18 (1974), 3, 185-202.
- [3] W. K. Meyerhoff, Added Masses of Thin Rectangular Calculated from Potential Theory. J. of Ship Research 14 (1970), 2.
- [4] 鬼头史城, 水中について, 造船协会杂さん第226号.
- [5] 伍德沃德, 亚音速和超音速机身尾型组合气动分析的新方法, 1976.
- [6] 蔡承武等, 桨叶的耦合振动, 中山大学学报(自然科学版), (1979), 1.

## Hydroelasticity Vibration of a Plate in Water

*Sun Mingguang*

### Abstract

In this paper, the problem for hydroelasticity vibration of a plate fixed on four sides was solved by the use of finite elements method, and the comparisons of calculating results with experimental data and known results were made.