点过程产生的σ域族上几个鞅空间的结构

周 健 伟

(数学力学系)

§1. 引言和准备

设$(\Omega,\mathbf{F},P)$为完备概率空间。称随机过程$N=(N_t)_{t\geq 0}$为标记点过程，若它的样本函数是零初值右连左极阶梯函数，在有限区间上至多只有有限个跳跃点。令$T_0(\omega)=0$，$T_n(\omega)=\inf\{t>T_{n-1}(\omega): N_t(\omega)\neq N_{T_{n-1}}(\omega)\}$，$n\geq 1$；$\Delta_n(\omega)=\Delta N_{T_n}(\omega)I_{(T_n(\omega)<\infty)}$，$n\geq 1$。即$T_n(\omega)$是$N_\cdot(\omega)$的第$n$个跳跃点、$\Delta_n(\omega)$是第$n$次跳跃的跃度。则$N_t$可表为$N_t(\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}\Delta_n(\omega)I_{(T_n(\omega)\leq t)}$。令

(C_1)　　$\mathbf{F}_t=\sigma\{N_s,s\leq t\}$的完备化，$t\geq 0$。则$(\mathbf{F}_t)_{t\geq 0}$满足通常条件[1]。

随机变量序列$(\Delta_n)_{n\geq 1}$的值域.除去零这一点后所得集合E称为标记的集合。假定

(C_2)　　$E=\{a_1,\cdots,a_k\}$。其中$a_1,\cdots,a_k$是两两不等的实数。

对每个$i(1\leq i\leq k)$令$N_t^i(\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}I_{(T_n(\omega)\leq t)}I_{(\Delta_n(\omega)=a_i)}$，$t\geq 0$。则$N^i$为简单点过程，且$i\neq j$时$N^i$与$N^j$没有公共跳跃点。不难证明$\mathbf{F}_t=\sigma\{N_s^i,s\leq t,1\leq i\leq k\}$的完备化。

由〔3〕每个$N^i(1\leq i\leq k)$可唯一地分解为$N_t^i=m_t^i+A_t^i,t\geq 0$。其中$m^i$为零初值局部鞅，$A^i$为零初值可料增过程。称$A^i$为$N^i$的补偿元。设

(C_3)　　m^i为BMO鞅，$1\leq i\leq k$。

(C_4)　　A^i连续，$1\leq i\leq k$。

除非特别声明，本文到处假设满足条件(C_1)至(C_4)。

本文还采用以下记号和定义：

1） 把$\sum_{i=1}^{k}$均简记为Σ(对其它指标求和仍照常标明)，$\max_{1\leq i\leq k}$均简记为max。

2） $\mathbf{L}$为零初值局部鞅空间。$\mathbf{H}^1$为使$\|X\|_{H^1}=\mathbf{E}([X,X]_\infty^{1/2})<\infty$的$X\in\mathbf{L}$的空间.$\mathbf{H}^2$为使$\|X\|_{H^2}=(\mathbf{E}[X,X]_\infty)^{1/2}<\infty$的$X\in\mathbf{L}$的空间，即零初值平方可积鞅空间。对局部鞅$X$，令$\|X\|_{BMO}^2=\sup_T ess.\sup\mathbf{E}([X,X]_\infty-[X,X]_{T-}|\mathbf{F}_T)$。其中$T$跑遍一切停时。BMO为使

$\|X\|_{BMO}<\infty$的$X\epsilon\mathbf{L}$的空间。$\mathbf{H}^1$,$\mathbf{H}^2$和BMO都是Banach空间。

3）记可料σ域为$\mathbf{P}$，对每个i $(1\leqslant i\leqslant k)$，用$\mu^i(H)=\mathbf{E}[\int_0^\infty I_H(t,\cdot)dA_t^i]$，$H\epsilon\mathbf{P}$来定义$([0,\infty[\times\Omega,\mathbf{P})$上一个测度。$(C_3)$和$(C_4)$保证$\mu^i$是有限测度（§3命题3）。记$(\mu^1(H),\cdots,\mu^k(H))$为$\mu(H)$。

4）设$f=(f^1,\cdots,f^k)$为可料向量过程（指每个分量f^i为可料过程）。$L^1(\mu)$表示使$\|f\|_{L^1(\mu)}=\Sigma\int|f^i|d\mu^i=\Sigma\mathbf{E}\int_0^\infty|f_t^i|\,dA_t^i<\infty$的$f$的全体。$L^2(\mu)$表示使$\|f\|_{L^2(\mu)}=[\Sigma\int(f^i)^2d\mu^i]^{1/2}=[\Sigma\ \mathbf{E}\int_0^\infty(f_t^i)^2dA_t^i]^{1/2}<\infty$的$f$的全体。$L^\infty(\mu)$表示使$\|f\|_{L^\infty(\mu)}=\max\ ess.\sup|f_t^i(\omega)|<\infty$（本性上确界按测度$\mu^i$对一切$t\geqslant0$和$\omega\epsilon\Omega$取的）的$f$的全体。它们都是Banach空间。由每个$\mu^i$均为有限测度可知$L^\infty(\mu)\subset L^2(\mu)\subset L^1(\mu)$。

5）对$f\epsilon L^1(\mu)$（对应地，$L^2(\mu)$，$L^\infty(\mu)$），将按轨道的Lebesgue-Stieltjes积分$\Sigma\int_0^t f_s^i\,dm_s^i$记为$U_1(f)(t)$（对应地，$U_2(f)(t)$，$U_\infty(f)(t)$）。

6）对每个$i(1\leqslant i\leqslant k)$，设$\nu^i$为$([0,\infty[\times\Omega,\mathbf{P})$上取有限实值的有限可加集函数，且当$\mu^i(H)=0$时有$\nu^i(H)=0$。$\Phi^i$表示使$\|\nu^i\|=\sup\{\sum_{n=1}^{l}|\nu^i(H_n)|;H_1,\cdots,H_l\epsilon\mathbf{P},H_m\cap H_n=\phi$凡$m\neq n\}<\infty$的$\nu^i$的全体。令$\Phi=\{\nu=(\nu^1,\cdots,\nu^k);\nu^i\epsilon\Phi^i,1\leqslant i\leqslant k\}$，它在范数$\|\nu\|=\max\|\nu^i\|$下是Banach空间。

本文得到的下述定理刻划了标记点过程N产生的σ域族$(\mathbf{F}_t)_{t\geqslant0}$上几个鞅空间$\mathbf{H}^1$，$\mathbf{H}^2$，BMO以及BMO的对偶空间的结构。

定理1　U_1是$L^1(\mu)$到$\mathbf{H}^1$上的一个同构，且$(\sqrt{2k}\max\|m^i\|_{BMO})^{-1}\leqslant\|U_1\|\leqslant1$。

定理2　U_2是$L^2(\mu)$到$\mathbf{H}^2$上的一个同构，且保持范数不变。

定理3　U_∞是$L^\infty(\mu)$到BMO上的一个同构，且$\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant\|U_\infty\|\leqslant\sqrt{10k}\max\|m^i\|_{BMO}$

现设$\nu=(\nu^1,\cdots,\nu^k)\epsilon\Phi$。对$Y\epsilon$BMO，记$U_\infty^{-1}(Y)$为$f=(f^1,\cdots,f^k)$，用

$$W_\nu(Y)=\Sigma\int f^i\,d\nu^i \tag{1}$$

定义BMO空间上一个线性泛函W_ν。

定理4　BMO的对偶空间BMO*为Φ。更确切地说，由(1)式给出的映射$W:\nu\mapsto W_\nu$是Φ到BMO*上的一个同构，且$(\sqrt{10k}\max\|m^i\|_{BMO})^{-1}\leqslant\|W\|\leqslant\sqrt{2k}$。

在$E=\{1\}$（即N为简单点过程）且补偿元$A_t=\int_0^t\lambda_s ds$（λ为非负可料过程，称为N的随机强度）的特殊情形，定理1、3和4被[4]得到。我们的结果推广了[4]中结果。我们还在§3中讨论使(C_3)成立的条件，在§4中给出满足本文条件，但不满足[4]中条件的一类简单点过程的例子。

[5]的鞅表示定理在[4]中起重要作用。但[5]的Ω是特殊的，[4]的Ω是一般的，所以[4]引用[5]的定理是不合适的。本文所用[3]或[6]中鞅表示定理对Ω没有限制。当$E=$

{1}时也可利用〔7〕中定理19.1，因为〔7〕引理18.4后的注1对Ω所加的限制是不必要的。

引理1 设Y为平方可积鞅，则

$$\|Y\|_{BMO}\leqslant\sqrt{5}\sup\{|\mathbf{E}[X,Y]_\infty|;\ 当\|X\|_{H^1}=1\}.$$

这可由〔2〕定理11.20得到。这里只要求$(\mathbf{F}_t)$满足通常条件，不需要条件(C_1)。

引理2 过程$M\in\mathbf{L}$的充要条件为：存在可料过程f^i，$1\leqslant i\leqslant k$，使得对每个$t\geqslant0$，$a.s.$有$\sum\int_0^t|f_s^i|\,dA_s^i<\infty$，且$M_t=\sum\int_0^t f_s^i\,d\,m_s^i$。

这可由〔3〕37页定理6得到（我们已将〔3〕中的$E=\{1,\cdots,k\}$改为条件(C_2)，但〔3〕定理6仍成立。因为若将N的跃度Δ_n取值a_i处均改为i，$1\leqslant i\leqslant k$，得到一个新的点过程$\overline{N}$，但并不改变N^i和$(\mathbf{F}_t)$，从而不改变m^i，A^i，空间$\mathbf{L}$等）。实际上这也是〔6〕定理5.4的一个特例。这里不需要条件(C_3)和(C_4)。

引理3 设可料过程f^i，g^i，$1\leqslant i\leqslant k$满足对每个$t\geqslant0$，$a.s.$ 有$\sum\int_0^t|f_s^i|\,dA_s^i<\infty$和$\sum\int_0^t|g_s^i|\,dA_s^i<\infty$。则有$[\sum\int_0^\cdot f_s^i\,dm_s^i,\sum\int_0^\cdot g_s^i\,dm_s^i]_t=\sum\int_0^t f_s^i\,g_s^i dN_s^i$。

证 令$M_t=\sum\int_0^t f_s^i\,dm_s^i$和$\overline{M}_t=\sum\int_0^t g_s^i\,dm_s^i$。由引理2，$M$和$\overline{M}$都属于$\mathbf{L}$，且显然是有限变差局部鞅。由$A^i$连续知$\Delta M_s=\sum f_s^i\Delta N_s^i$，$\Delta\overline{M}_s=\sum g_s^i\Delta N_s^i$。再注意$i\neq j$时$N^i$与$N^j$没有公共跳跃点，即得$[M,\overline{M}]_t=\sum_{s\leqslant t}[(\sum f_s^i\Delta N_s^i)(\sum g_s^i\Delta N_s^i)]=\sum_{s\leqslant t}\sum f_s^i\,g_s^i\Delta N_s^i=\sum\int_0^t f_s^i\,g_s^i dN_s^i$。

这里不需要条件(C_3)。

§2. 定理的证明

定理1的证明 设$f=(f^1,\cdots,f^k)\in L^1(\mu)$。由引理2和3，$U_1(f)\in\mathbf{L}$ 且$\|U_1(f)\|_{H^1}=\mathbf{E}[\sum\int_0^\infty(f_t^i)^2\,dN_t^i]^{1/2}=\mathbf{E}[\sum\sum_t(f_t^i\Delta N_t^i)^2]^{1/2}\leqslant\mathbf{E}\sum\sum_t|f_t^i|\Delta N_t^i=\mathbf{E}\sum\int_0^\infty|f_t^i|\,dN_t^i=\mathbf{E}\sum\int_0^\infty|f_t^i|\,dA_t^i=\|f\|_{L^1(\mu)}<\infty$。即$U_1(f)\in\mathbf{H}^1$，且$|U_1|\leqslant1$。故$U_1$是$L^1(\mu)$到$\mathbf{H}^1$内的线性连续映射。

对$X\in\mathbf{H}^1\subset\mathbf{L}$，由引理2可表为$X_t=\sum\int_0^t f_s^i\,dm_s^i$，其中$f^i$为可料过程，$1\leqslant i\leqslant k$，且$\sum\int_0^t|f_s^i|\,dA_s^i<\infty$，凡$t\geqslant0$。往证$f=(f^1,\cdots,f^k)\in L^1(\mu)$。令$\overline{X}_t=\sum\int_0^t|f_s^i|\,dm_s^i$，由引理2和3，$\overline{X}\in\mathbf{L}$，且$[\overline{X},\overline{X}]_t=\sum\int_0^t(f_s^i)^2\,dN_s^i=[X,X]_t$。故$\|\overline{X}\|_{H^1}=\|X\|_{H^1}<\infty$，$\overline{X}\in\mathbf{H}^1$。令$\overline{X}_t^i=\int_0^t|f_s^i|\,dm_s^i$，由引理2，$\overline{X}^i\in\mathbf{L}$。当$i\neq j$时$\overline{X}^i$与$\overline{X}^j$没有公共跳跃点，故有

$$\left[\overline{X},\overline{X}\right]_t=\sum_s\sum_t(\sum\Delta\overline{X}_s^i)^2=\sum_s\sum_t\sum(\Delta\overline{X}_s^i)^2=\sum[\overline{X}^i,\overline{X}^i]_t\qquad(2)$$

由此可知$\overline{X}^i\in\mathbf{H}^1$，$1\leqslant i\leqslant k$。由Fefferman不等式和(2)式有

$$\|f\|_{L^1(\mu)}=\Sigma\mathbf{E}\int_0^\infty|f_t^i|\,dA_t^i=\Sigma\,\mathbf{E}\int_0^\infty|f_t^i|\,dN_t^i=\Sigma\,\mathbf{E}\,\sum_t(|f_t^i|\,\Delta N_t^i\cdot\Delta N_t^i)$$

$$=\Sigma\mathbf{E}\,\sum_t(|f_t^i|\,\Delta m_t^i\cdot\Delta m_t^i)=\Sigma\mathbf{E}\,[\overline{X}^i,m^i]_\infty\leqslant\Sigma\sqrt{2}\|\overline{X}^i\|_{H^1}\|m^i\|_{BMO}$$

$$\leqslant\sqrt{2}\max\|m^i\|_{BMO}\cdot\mathbf{E}\Sigma([\overline{X}^i,\ \overline{X}^i]_\infty^{1/2})\leqslant\sqrt{2}\max\|m^i\|_{BMO}$$

$$\cdot\mathbf{E}(k\Sigma[\overline{X}^i,\ \overline{X}^i]_\infty)^{1/2}=\sqrt{2k}\max\|m^i\|_{BMO}\|X\|_{H^1}<\infty\tag{3}$$

即$f\in L^1(\mu)$。于是$X_t=U_1(f)(t)$。这说明象空间为整个$\mathbf{H}^1$。由(3)式可知映射U_1为一一的，且$\|U_1\|\geqslant(\sqrt{2k}\max\|m^i\|_{BMO})^{-1}$。

定理2的证明　设$f=(f^1,\cdots,f^k)\in L^2(\mu)$。由引理2和3，$U_2(f)\in\mathbf{L}$，且$\|U_2(f)\|_{H^2}^2=\mathbf{E}\,\Sigma\int_0^\infty(f_t^i)^2\,dN_t^i=\mathbf{E}\,\Sigma\int_0^\infty(f_t^i)^2dA_t^i=\|f\|_{L^2(\mu)}^2<\infty$，这说明$U_2$是$L^2(\mu)$到$\mathbf{H}^2$内的保范线性连续映射。

设$X\in\mathbf{H}^2\subset\mathbf{L}$，由引理2，$X_t=\Sigma\int_0^t f_s^i\,dm_s^i$，其中$f=f(f^1,\cdots,f^k)$满足$\Sigma\int_0^t|f_s^i|\,dA_s^i<\infty$。由引理3，$\mathbf{E}[X,X]_\infty=\mathbf{E}\,\Sigma\int_0^\infty(f_t^i)^2\,dN_t^i=\mathbf{E}\Sigma\int_0^\infty(f_t^i)^2dA_t^i=\|f\|_{L^2(\mu)}^2$。故$\|f\|_{L^2(\mu)}<\infty$，$f\in L^2(\mu)$，这说明$X=U_2(f)$。因此象空间为整个$\mathbf{H}^2$。

注　从证明中看到这里不需要条件(C_3)。

定理3的证明　设$f\in L^\infty(\mu)$。对任意$X\in\mathbf{H}^1$，由定理1，存在$g=U_1^{-1}(X)\in L^1(\mu)$，使$X_t=\Sigma\int_0^t g_s^i\,dm_s^i$。由引理3和定理1有

$$|\mathbf{E}[X,U_\infty(f)]_\infty|\leqslant\mathbf{E}|\Sigma\int_0^\infty f_t^i\,g_t^idN_t^i|\leqslant\mathbf{E}\,\Sigma\int_0^\infty|f_t^i\,g_t^i|\,dN_t^i=\mathbf{E}\,\Sigma\int_0^\infty|f_t^i\,g_t^i|\,dA_t^i$$

$$\leqslant\|f\|_{L^\infty(\mu)}\|g\|_{L^1(\mu)}\leqslant\|f\|_{L^\infty(\mu)}\sqrt{2k}\max\|m^i\|_{BMO}\|X\|_{H^1}\tag{4}$$

另一方面，由$f\in L^\infty(\mu)\subset L^2(\mu)$和定理2知$U_\infty(f)\in\mathbf{H}^2$。由引理1和(4)式，$\|U_\infty(f)\|_{BMO}\leqslant\sqrt{5}\sup\{|\mathbf{E}[X,U_\infty(f)]_\infty|;\text{当}\|X\|_{H^1}=1\}\leqslant\sqrt{10k}\max\|m^i\|_{BMO}\|f\|_{L^\infty(\mu)}$。这表示$U_\infty(f)\in\mathbf{BMO}$，且$\|U_\infty\|\leqslant\sqrt{10k}\max\|m^i\|_{BMO}$。故$U_\infty$是$L^\infty(\mu)$到$\mathbf{BMO}$内的线性连续映射。

设$Y\in\mathbf{BMO}$。对每个$g=(g^1,\cdots,g^k)\in L^1(\mu)$，令$C(g)=\mathbf{E}[U_1(g),Y]_\infty$。由Fefferman不等式和定理1有

$$|C(g)|\leqslant\sqrt{2}\|U_1(g)\|_{H^1}\|Y\|_{BMO}\leqslant\sqrt{2}\|g\|_{L^1(\mu)}\|Y\|_{BMO}\tag{5}$$

故$C(g)$为$L^1(\mu)$上线性有界泛函。记$\overline{g^i}=(\delta_{i1}g^1,\cdots,\delta_{ik}g^k)$，$1\leqslant i\leqslant k$，其中$\delta_{ij}=0$当$i\neq j$和$\delta_{ij}=1$当$i=j$。显然$\overline{g^i}\in L^1(\mu)$。令$C^i(g^i)=C(\overline{g^i})$，则$C^i$是$L^1(\mu^i)$（指满足$\|g^i\|_{L^1(\mu^i)}=\int|g^i|d\mu^i=\mathbf{E}\int_0^\infty|g_t^i|\,dA_t^i<\infty$的可料过程$g^i$的空间）上的线性泛函，且由(5)式有

$$|C^i(g^i)|=|C(\overline{g^i})|\leqslant\sqrt{2}\|\overline{g^i}\|_{L^1(\mu)}\|Y\|_{BMO}=\sqrt{2}\|g^i\|_{L^1(\mu^i)}\|Y\|_{BMO}\tag{6}$$

故C^i是$L^1(\mu^i)$上线性有界泛函。因此存在$f^i\in L^\infty(\mu^i)$（指满足$\|f^i\|_{L^\infty(\mu^i)}=\text{ess.sup}|f_t^i(\omega)|$

$<\infty$的可料过程f^i的空间)，使对一切$g^i \epsilon L^1(\mu^i)$有

$$C^i(g^i)=\int f^i g^i d\mu^i = \mathbf{E}\int_0^\infty f_t^i \ g_t^i \ dA_t^i \tag{7}$$

令$f=(f^1,\cdots,f^k)$，由(7)式和引理3有

$$C(g)=\sum C^i(g^i)=\sum \mathbf{E}\int_0^\infty f_t^i \ g_t^i \ dA_t^i = \sum \mathbf{E}\int_0^\infty f_t^i \ g_t^i dN_t^i$$

$$= \mathbf{E}\ [U_1(g), U_\infty(f)]_\infty \tag{8}$$

对每个$X \epsilon \mathbf{H}^1$,仍用g表示$U_1^{-1}(X)$。则由$C(g)$的定义和(8)式得$\mathbf{E}[X,Y]_\infty=\mathbf{E}[X,U_\infty(f)]_\infty$，凡$X\epsilon\mathbf{H}^1$。因此$Y=U_\infty(f)$。这说明象空间为整个**BMO**。

若$f\epsilon L^\infty(\mu), g\epsilon L^1(\mu)$，则由(7)和(6)式，$\|f^i\|_{L^\infty(\mu^i)}=\sup\{|\int f^i g^i d\mu^i|$；当$\|g^i\|_{L^1(\mu^i)}=1\}=\sup\ \{|C^i(g^i)|$；当 $\|g^i\|_{L^1(\mu^i)}=1\}\leqslant\sqrt{2}\|\ U_\infty(f)\|_{BMO}$。

故 $\|f\|_{L^\infty(\mu)}\leqslant\sqrt{2}\|U_\infty(f)\|_{BMO}$，于是映射$U_\infty$为一一的且$\|U_\infty\|\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$。

定理4的证明 设$\nu=(\nu^1,\cdots,\nu^k)\epsilon\Phi$。对任意$Y\epsilon$**BMO**，由(1)式和定理3，

$$|W_\nu(Y)|\leqslant\sum|\int f^i d\nu^i|\leqslant\sum\|f^i\|_{L^\infty(\mu^i)}\|\nu^i\|\leqslant k\|f\|_{L^\infty(\mu)}\|\nu\|\leqslant k\sqrt{2}\|Y\|_{BMO}\|\nu\|.$$

这表示$W_\nu\epsilon$**BMO***,且$\|W\|\leqslant k\sqrt{2}$。故W是Φ到**BMO***内的线性连续映射。

设$B\epsilon$**BMO***，由定理3，对任意$f=(f^1,\cdots,f^k)\epsilon L^\infty(\mu)$有

$$|BU_\infty(f)|\leqslant\|B\|\ \|U_\infty(f)\|_{BMO}\leqslant\sqrt{10k}\ \max\|m^i\|_{BMO}\|B\|\|f\|_{L^\infty(\mu)},$$

故 BU_∞是$L^\infty(\mu)$上线性有界泛函。与定理 3 证明中类似地，令$\bar{f}^i=(\delta_{i1}f^1,\cdots,\delta_{ik}f^k)$和$A^i(f^i)=BU_\infty(\bar{f}^i)$，$1\leqslant i\leqslant k$。则有

$$|A^i(f^i)|\leqslant\sqrt{10k}\ \max\|m^i\|_{BMO}\|B\|\|f^i\|_{L^\infty(\mu^i)} \tag{9}$$

故A^i是$L^\infty(\mu^i)$上线性有界泛函，因此存在$\nu^i\epsilon\Phi^i$，使对一切$f^i\epsilon L^\infty(\mu^i)$有

$$A^i(f^i)=\int f^i d\nu^i \tag{10}$$

令$\nu=(\nu^1,\cdots,\nu^k)$，它属于Φ。由(10)和(1)式，对一切$f=(f^1,\cdots,f^k)\epsilon L^\infty(\mu)$有 $BU_\infty(f)=\sum BU_\infty(\bar{f}^i)=\sum A^i(f^i)=\sum\int f^i d\nu^i=W_\nu U_\infty(f)$，故$B=W_\nu$，这说明象空间为整个**BMO***。

由(10)和(9)式，$\|\nu^i\|=\|A^i\|\leqslant\sqrt{10k}\ \max\|m^i\|_{BMO}\|W_\nu\|$，故$\|\nu\|\leqslant\sqrt{10k}\ \max\|m^i\|_{BMO}\|W_\nu\|$。因此，映射$W$为一一的，且$\|W\|\geqslant(\sqrt{10k}\ \max\|m^i\|_{BMO})^{-1}$。

§3. 使 (C_3) 成立的条件

本节不假定(C_1)和(C_4)成立，只假定(C_2)成立，$(\mathbf{F}_t)$满足通常条件及N适应于$(\mathbf{F}_t)$。为讨论使(C_3)成立的条件，只要对每个固定的$i(1\leqslant i\leqslant k)$，给出使 $m^i\epsilon$**BMO** 的条件。我们还给出几个有关的结果，命题 1 至 3 的证明较简单，故从略(命题1的证明要用到[7]引理18.12)。

命题1 $m^i\in H^2$的充要条件为$E[\int_0^\infty(1-\Delta A_s^i)\,dA_s^i]<\infty$。

命题2 若A^i连续，则$m^i\in H^2$的充要条件为$EA_\infty^i<\infty$或$EN_\infty^i<\infty$。

命题3 若$m^i\in H^2$，A^i连续，则μ^i为有限测度。

命题4 若A^i连续，则$m^i\in BMO$的充要条件为：存在正常数C，使对任何停时T有

$$E[A_\infty^i-A_T^i|F_T]<C \tag{11}$$

证 充分性：在(11)中取$T=0$并取期望得$EA_\infty^i\leqslant C$。由命题2，$m^i\in H^2$。但$[m^i,m^i]_t=\sum_{s\leqslant t}(\Delta m_s^i)^2=\sum_{s\leqslant t}(\Delta N_s^i)^2=N_t^i$，故对任何停时$T$有

$$E\Big[[m^i,m^i]_\infty-[m^i,m^i]_{T-}|F_T\Big]=E[N_\infty^i-N_{T-}^i|F_T]$$

$$=\Delta m_T^i+E[A_\infty^i-A_{T-}^i|F_T]=\Delta N_T^i+E[A_\infty^i-A_T^i|F_T] \tag{12}$$

它不超过$1+C$，故$m^i\in BMO$。必要性由(12)即得。

§4. 例　子

当$E=\{1\}$时，我们给出满足本文条件，但不具有随机强度(从而不满足[4]中条件)的一类简单点过程的例子。

设$(A_t)_{t\geqslant 0}$为决定性非降连续函数，但不绝对连续。$A_0=0$，$A_\infty=\lim\limits_{t\to\infty}A_t<\infty$。由[8]定理27.2，存在某个完备概率空间$(\Omega,F,P)$及其上(广义)Poisson过程$(N_t)_{t\geqslant 0}$，使对任意$t>s\geqslant 0$，$N_t-N_s$服从参数为$A_t-A_s$的Poisson分布。记$N$产生的完备化σ域族为$(F_t)_{t\geqslant 0}$。易知$A$是$N$的补偿元且对任何停时$T$，有$E(A_\infty-A_T|F_T)\leqslant A_\infty<\infty$，由命题4知$m\in BMO$。于是条件$(C_1)$至$(C_4)$均满足。但$A_t$不绝对连续，故$N$不具有随机强度。

参 考 文 献

[1] Meyer P. A., Generation of σ-Fields by Step Processes, Sém. Probab., X. *Lect. Notes in Math.*, 511, Springer-Verlag, (1976), 118—124.

[2] 严加安，鞅与随机积分引论，上海科学技术出版社，(1981)。

[3] Rebolledo R., Sur les Applications de la Théorie des Martingales à l' Etude Statistique d'une Famille de Processus Ponctuels, *Lect. Notes in Math.*, 636, Springer-Verlag, (1978), 27—70.

[4] Morimoto H., The Dual Space of the Space BMO for a Stochastic Point Process. *Tôhoku Math. J.*, 31 (1979), 4, 519—524.

〔5〕 Boel R., Varaiya P. and Wong E., Martingales on Jump Processes I: Representation Results, *SIAM J. Control*, 13 (1975), 5, 999—1021.

〔6〕 Jacod J., Multivariate Point Processes: Predictable Projection, Radon Nikodym Derivatives, Representation of Martingales, *Z. W.*, 31 (1975), 3, 235—253.

〔7〕 Liptser R. S., Shiryayev A. N., *Statistics of Random Processes. II: Applications*. Springer-Verlag, (1978).

〔8〕 伊藤清，(刘璋温译)，概率论，科学出版社，(1963).

The Structure of Several Spaces of Martingales on a Family of σ-Fields Generated by a Point Process

Zhou Jianwei

Abstract

Let $N=(N_t)_{t\geq 0}$ be a marked point process with a finite set of marks. Under certain conditions we establish an isomorphism between several spaces of vector valued functions and the spaces H^1, H^2, BMO of martingales on a family of σ-fields generated by the point process N. We also establish an isomorphism between some space of vector valued set functions and the dual space of the space BMO. Most of the results are extensions of the corresponding results for a simple point process in [4].