

扰动不稳定发展的能量判据 及其移动规律的物理分析

贺海晏

(气象学系)

摘要

本文利用准地转位势涡度方程研究了纬向基本气流中扰动不稳定发展及其移动规律的动力学问题、根据所得到的扰动增长率公式和波速公式,讨论了基本气流、扰动结构及大尺度地形对扰动的发展,特别是对其移动规律的影响。结果表明,扰动的正—斜压联合不稳定发展的能量判据是 $\{\bar{K}, k'\} + \{\bar{P}, p'\} > 0$,发展扰动的移动规律与中性扰动的移动规律相比有着明显不同的特点,大尺度地形对扰动的发展和移动都有直接影响。

关于扰动发展的物理机制,历来存在着两种观点^[1]。一种认为,扰动的发展是能量转换的结果;另一种观点则认为它是叠加在不稳定的基本气流上的小扰动的自发增长。郭晓岚^[2]最早将Layleigh关于平行流稳定性理论的结果推广到旋转大气的情形,得出了一个正压不稳定判据;后来,Charney等人^[3]又导出了一个正—斜压联合不稳定判据。一些作者^[4-6]从能量的角度出发,研究过正压波动和斜压波动的发展问题,更好地揭示了扰动不稳定发展的物理本质。本文导出的扰动不稳定发展的能量判据表明,可以把上述两种观点统一起来,用能量相互转换的机制来统一阐明扰动的正压不稳定、斜压不稳定或正—斜压联合不稳定发展的物理机制。

罗斯贝波速公式不能反映出扰动处于发展状态时的移动规律。本文导出了一个更完整的波速公式,由此讨论了与正压发展、斜压发展或正—斜压联合发展相伴随的扰动的移动规律。结果表明,发展扰动与中性扰动在移动规律上有重大差异,大气中常见的斜槽切断现象总是与扰动的特定的发展状况相联系的,中性波速公式则不能解释这种现象。

大地形对扰动的发展和移动都有重要作用^[6-8]。本文在扰动的增长率和波速公式中引进平均地形和扰动地形的作用,讨论了它们对大气扰动的发展和移动的影响。

一、基本方程

准地转涡度方程和热力学方程可分别写为

● 1982年12月收到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_h \cdot \nabla_p\right)(\nabla^2 \phi + f) = f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (1.1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_h \cdot \nabla_p\right) \frac{\partial \phi}{\partial p} = -\frac{\sigma}{f_0} \omega \quad (1.2)$$

式中, $\vec{V}_h \equiv \vec{k} \wedge \nabla \phi$ 为水平风速矢; $\phi \equiv \phi/f_0$ 为地转流函数; ϕ 为重力位势; f_0 为常值柯氏参数. ω 为 p -铅直速度; $\sigma \equiv -\alpha \partial \ln \theta / \partial p$ 为静力稳定度参数, 设为气压 p 的函数, 且本文只涉及 $\sigma > 0$ 的情形; α 为空气比容; θ 为位温; ∇^2 为二维拉普拉斯算子.

由(1.1)和(1.2)式可得位势涡度方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_h \cdot \nabla_p\right) q = 0 \quad (1.3)$$

其中,

$$q \equiv \nabla^2 \phi + f + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right)$$

为位势涡度.

令

$$\begin{cases} q = \bar{q}(y, p) + q'(x, y, p, t), \\ \phi = \bar{\phi}(y, p) + \phi'(x, y, p, t), \\ u = U(y, p) + u'(x, y, p, t), \\ v = v'(x, y, p, t), \end{cases} \quad (1.4)$$

$U(y, p)$ 为带状基本气流. 利用(1.4)可得线性化扰动位势涡度方程,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) q' + v' \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0 \quad (1.5)$$

其中,

$$\begin{aligned} \bar{q} &\equiv \nabla^2 \bar{\phi} + f + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial p} \right) \\ q' &\equiv \nabla^2 \phi' + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

分别为基本和扰动位势涡度.

若考虑地形作用, 将采用下述边界条件:

$$\phi' = 0, \quad \text{当 } y = \pm d, \quad (1.7)$$

$$\omega' = 0, \quad \text{当 } p = 0, \quad (1.8)$$

$$\omega' = \omega'_0 = -\rho_0 g \left(U_0 \frac{\partial h'}{\partial x} + v'_0 \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} \right), \quad \text{当 } p = p_0, \quad (1.9)$$

其中, ω' 为扰动 p -“铅直”速度; p_0 为地面气压; d 为区域的南北半宽度; \bar{h} 为纬向平均地形高度; h' 为扰动地形高度; 下标“0”表示地面值.

二、增长率及波速公式

设方程(1.5)具有如下形式的解:

$$\phi' = \Psi(y, p) e^{i(kx - \nu t)} \quad (2.1)$$

$\Psi(y, p)$ 为振幅函数; k 为纬向波数; ν 为圆频率; 对于非中性波, Ψ 及 ν 均须为复数, 我们将记作

$$\begin{cases} \Psi = \Psi_r + i\Psi_i; \\ \nu = \nu_r + i\nu_i; \quad \text{或 } C = C_r + iC_i; \end{cases} \quad (2.2)$$

其中,

$$i \equiv \sqrt{-1}, \text{ 下标 } r \text{ 和 } i \text{ 分别表示实部和虚部.}$$

$C \equiv \nu/k$ 为波速. 利用(2.1)及(1.6), 则(1.5)式可写成

$$(U - C)\mathcal{L}(\Psi) + \Psi \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

\mathcal{L} 为按下式定义的微分算子:

$$\mathcal{L}(\quad) \equiv \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \right) \right] (\quad) \quad (2.4)$$

将(2.2)代入(2.3)式, 分离实部和虚部得

$$\begin{cases} (U - C_r)\mathcal{L}(\Psi_r) + C_i\mathcal{L}(\Psi_i) + \Psi_r \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0 \\ (U - C_r)\mathcal{L}(\Psi_i) - C_i\mathcal{L}(\Psi_r) + \Psi_i \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} (U - C_r)\mathcal{L}(\Psi_i) - C_i\mathcal{L}(\Psi_r) + \Psi_i \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0 \\ (U - C_r)\mathcal{L}(\Psi_r) + C_i\mathcal{L}(\Psi_i) + \Psi_r \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

用 Ψ_i 及 Ψ_r 分别乘(2.5)式和(2.6)式后, 相减得

$$(U - C_r)[\Psi_i\mathcal{L}(\Psi_r) - \Psi_r\mathcal{L}(\Psi_i)] + C_i[\Psi_r\mathcal{L}(\Psi_r) + \Psi_i\mathcal{L}(\Psi_i)] = 0 \quad (2.7)$$

类似地, 用 Ψ_r 及 Ψ_i 分别乘(2.5)和(2.6)式后, 相加得

$$\begin{aligned} & (U - C_r)[\Psi_r\mathcal{L}(\Psi_r) + \Psi_i\mathcal{L}(\Psi_i)] + C_i[\Psi_r\mathcal{L}(\Psi_i) - \Psi_i\mathcal{L}(\Psi_r)] \\ & + |\Psi|^2 \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

我们将分别用(2.7)式和(2.8)式导出增长率及波速公式. 在对(2.7)和(2.8)式积分之前, 先利用热力学方程将边界条件(1.8)和(1.9)作适当改写. 热力学方程(1.2)的线性化形式为:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi'}{\partial p} + v' \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) = -\frac{\sigma}{f_0} \omega' \quad (2.9)$$

令

$$\omega' = \Omega(y, p) e^{i(kx - \nu t)} \quad (2.10)$$

将解式(2.1)式及(2.10)式代入(2.9)式得

$$(U - C) \frac{\partial \Psi}{\partial p} - \Psi \frac{\partial U}{\partial p} = ia\Omega \quad (2.11)$$

$a \equiv \sigma/(f_0 k)$, 令 $\Omega = \Omega_r + i\Omega_i$, 则(2.11)式分离实部和虚部可得

$$(U - C_r) \frac{\partial \Psi_r}{\partial p} + C_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial p} = \Psi_r \frac{\partial U}{\partial p} - a\Omega_i \quad (2.12)$$

$$(U - C_r) \frac{\partial \Psi_i}{\partial p} - C_i \frac{\partial \Psi_r}{\partial p} = \Psi_i \frac{\partial U}{\partial p} + a \Omega_r \quad (2.13)$$

用类似于推导(2.7)和(2.8)式的方法,可由(2.12)和(2.13)式得

$$(U - C_r) \left(\Psi_i \frac{\partial \Psi_r}{\partial p} - \Psi_r \frac{\partial \Psi_i}{\partial p} \right) + C_i \frac{\partial |\Psi|^2}{\partial p} = -a(\Omega_r \Psi_r + \Omega_i \Psi_i) \quad (2.14)$$

$$(U - C_r) \frac{\partial |\Psi|^2}{\partial p} + C_i \left(\Psi_r \frac{\partial \Psi_i}{\partial p} - \Psi_i \frac{\partial \Psi_r}{\partial p} \right) = |\Psi|^2 \frac{\partial U}{\partial p} + a(\Omega_r \Psi_i - \Omega_i \Psi_r) \quad (2.15)$$

因此,边界条件(1.8)及(1.9)可改写成

$$(U - C_r) \left(\Psi_i \frac{\partial \Psi_r}{\partial p} - \Psi_r \frac{\partial \Psi_i}{\partial p} \right) + C_i \frac{\partial |\Psi|^2}{\partial p} = \begin{cases} 0, & \text{当 } p = 0 \\ -a(\Omega_{or} \Psi_{or} + \Omega_{oi} \Psi_{oi}), & \text{当 } p = p_0 \end{cases} \quad (2.16)$$

或

$$\begin{aligned} & (U - C_r) \frac{\partial |\Psi|^2}{\partial p} + C_i \left(\Psi_r \frac{\partial \Psi_i}{\partial p} - \Psi_i \frac{\partial \Psi_r}{\partial p} \right) \\ & = \begin{cases} |\Psi_0|^2 \frac{\partial U}{\partial p}, & \text{当 } p = 0, \\ |\Psi_0|^2 \frac{\partial U}{\partial p} + a(\Omega_{or} \Psi_{oi} - \Omega_{oi} \Psi_{or}), & \text{当 } p = p_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.17)$$

我们可以将决定 C_i 和 C_r 的问题分别归纳下面二个问题:

$$(I) \begin{cases} (U - C_r) [\Psi_i \mathcal{L}(\Psi_r) - \Psi_r \mathcal{L}(\Psi_i)] + C_i [\Psi_r \mathcal{L}(\Psi_r) + \Psi_i \mathcal{L}(\Psi_i)] = 0 \\ \Psi_r = \Psi_i = 0, & \text{当 } y = \pm d \\ \frac{f_0^2}{\sigma} \left[(U - C_r) \left(\Psi_i \frac{\partial \Psi_r}{\partial p} - \Psi_r \frac{\partial \Psi_i}{\partial p} \right) + C_i \frac{\partial |\Psi|^2}{\partial p} \right] \\ = \begin{cases} 0, & \text{当 } p = 0 \\ -\frac{f_0}{k} (\Omega_{or} \Psi_{or} + \Omega_{oi} \Psi_{oi}), & \text{当 } p = p_0 \end{cases} \end{cases}$$

及

$$(II) \begin{cases} (U - C_r) [\Psi_r \mathcal{L}(\Psi_r) + \Psi_i \mathcal{L}(\Psi_i)] + C_i [\Psi_r \mathcal{L}(\Psi_i) \\ - \Psi_i \mathcal{L}(\Psi_r)] + |\Psi|^2 \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0, \\ \Psi_r = \Psi_i = 0, & \text{当 } y = \pm d \\ \frac{f_0^2}{\sigma} \left[(U - C_r) \frac{\partial |\Psi|^2}{\partial p} + C_i \left(\Psi_r \frac{\partial \Psi_i}{\partial p} - \Psi_i \frac{\partial \Psi_r}{\partial p} \right) \right] \\ = \begin{cases} \frac{f_0^2}{\sigma} |\Psi_0|^2 \frac{\partial U}{\partial p}, & \text{当 } p = 0 \\ \frac{f_0^2}{\sigma} |\Psi_0|^2 \frac{\partial U}{\partial p} + \frac{f_0}{k} (\Omega_{or} \Psi_{oi} - \Omega_{oi} \Psi_{or}), & \text{当 } p = p_0 \end{cases} \end{cases}$$

在整个区域 τ_p : $0 \leq x \leq L$, $-d \leq y \leq d$, $0 \leq p \leq p_0$ 上积分问题(I)和(II)得

$$C_i = \frac{\int_{\tau_p} \left[U \frac{\partial}{\partial y} \left(\psi_i \frac{\partial \Psi_r}{\partial y} - \psi_r \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) - \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial U}{\partial p} \left(\psi_i \frac{\partial \Psi_r}{\partial p} - \psi_r \frac{\partial \Psi_i}{\partial p} \right) \right] d\tau_p}{\int_{\tau_p} \left(\left| \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|^2 + k^2 |\Psi|^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial p} \right|^2 \right) d\tau_p} - \int_{-d}^d \int_0^L \frac{f_0}{k} (\Omega_{or} \Psi_{or} + \Omega_{oi} \Psi_{oi}) dx dy$$

$$\int_{\tau_p} \left(\left| \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|^2 + k^2 |\Psi|^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial p} \right|^2 \right) d\tau_p \tag{2.18}$$

及

$$C_r = \frac{\int_{\tau_p} U \left(\left| \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|^2 + k^2 |\Psi|^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial p} \right|^2 \right) d\tau_p}{\int_{\tau_p} \left(\left| \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|^2 + k^2 |\Psi|^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial p} \right|^2 \right) d\tau_p} + \frac{\int_{\tau_p} \left[-U \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{|\Psi|^2}{2} + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial U}{\partial p} \frac{\partial}{\partial p} \frac{|\Psi|^2}{2} - |\Psi|^2 \frac{\partial q}{\partial y} \right] d\tau_p}{\int_{\tau_p} \left(\left| \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|^2 + k^2 |\Psi|^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial p} \right|^2 \right) d\tau_p} - \int_{-d}^d \int_0^L \left[\frac{f_0}{\sigma} |\Psi|^2 \frac{\partial U}{\partial p} \right]_{p=0}^{p=p_0} dx dy$$

$$\int_{\tau_p} \left(\left| \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|^2 + k^2 |\Psi|^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial p} \right|^2 \right) d\tau_p - \int_{-d}^d \int_0^L \frac{f_0}{k} (\Omega_{or} \Psi_{oi} - \Omega_{oi} \Psi_{or}) dx dy$$

$$\int_{\tau_p} \left(\left| \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|^2 + k^2 |\Psi|^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial p} \right|^2 \right) d\tau_p \tag{2.19}$$

式中,

$$d\tau_p \equiv dx dy dp$$

$$\tau_p \equiv \int_0^{p_0} \int_{-d}^d \int_0^L dx dy dp$$

$L = 2\pi/k$ 为纬向波长.

为了便于说明(2.18)和(2.19)式的物理意义,可将它们进一步改写.如此,我们定义:

$$\overline{(\quad)} \equiv \frac{1}{L} \int_0^L (\quad) dx \quad (2.20)$$

$$\langle\langle (\quad) \rangle\rangle \equiv \frac{1}{\tau_p} \int_0^{p_0} \int_{-d}^d \int_0^L (\quad) d\tau_p \quad (2.21)$$

由此定义,应有

$$\overline{\sin(kx - v_r t)} = \overline{\cos(kx - v_r t)} = \overline{\sin(kx - v_r t) \cos(kx - v_r t)} = 0$$

$$\text{及 } \overline{\sin^2(kx - v_r t)} = \overline{\cos^2(kx - v_r t)} = \frac{1}{2}$$

我们将取各扰动量的值为:

$$\begin{cases} u' = \text{Re}\left(-\frac{\partial\Psi'}{\partial y}\right) \\ v' = \text{Re}\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial x}\right) \\ \phi' = \text{Re}(f_0\Psi') \\ \omega' = \text{Re}[\Omega e^{i(kx - vt)}] \end{cases} \quad (2.22)$$

$\text{Re}(\quad)$ 表示取实部的运算.容易证明下列关系成立:

$$\begin{cases} \left| \frac{\partial\Psi'}{\partial y} \right|^2 + k^2 |\Psi|^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \left| \frac{\partial\Psi'}{\partial p} \right|^2 = 4 \left[\frac{(u'^2 + v'^2)}{2} \right. \\ \left. + \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{\partial\phi'}{\partial p} \right)^2 \right] e^{-2\nu_i t} \\ \Psi_i \frac{\partial\Psi_r}{\partial y} - \Psi_r \frac{\partial\Psi_i}{\partial y} = \frac{2}{k} (\overline{u'v'}) e^{-2\nu_i t} \\ \Psi_r \frac{\partial\Psi_i}{\partial p} - \Psi_i \frac{\partial\Psi_r}{\partial p} = \frac{2}{f_0^2 k} \overline{\left(\frac{\partial\phi'}{\partial x} \frac{\partial\phi'}{\partial p} \right)} e^{-2\nu_i t} \\ |\Psi|^2 = \frac{2}{f_0^2} \overline{\phi'^2} e^{-2\nu_i t} \\ \Im_r \Psi_r + \Omega_i \Psi_i = -\frac{2}{f_0} \overline{(\phi'\omega')} e^{-2\nu_i t} \\ \Im_r \Psi_i - \Omega_i \Psi_r = -\frac{2}{k} \overline{(v'\omega')} e^{-2\nu_i t} \end{cases} \quad (2.23)$$

利用(2.20)、(2.21)及(2.23), 可将(2.18)及(2.19)式改写成

$$2\nu_i = \frac{\int_{\tau_p} \left[U \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial U}{\partial p} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial x} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \right] d\tau_p - \int_{-d}^d \int_0^L (\overline{\phi'_0 \omega'_0}) dx dy}{\int_{\tau_p} \left[\frac{(u'^2 + v'^2)}{2} + \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial p} \right)^2 \right] d\tau_p} \quad (2.24)$$

$$C_y = \langle U \rangle + \frac{\int_{\tau_p} \left[\frac{1}{f_0} U \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'\phi'}) + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial U}{\partial p} (\overline{\phi' \frac{\partial \phi'}{\partial p}}) - \frac{1}{f_0^2} \overline{\phi'^2} \frac{\partial q}{\partial y} \right] d\tau}{2 \int_{\tau_p} \left[\frac{(u'^2 + v'^2)}{2} + \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial p} \right)^2 \right] d\tau} + \frac{- \int_{-d}^d \int_0^L \left[\frac{1}{\sigma} \overline{\phi'^2} \frac{\partial U}{\partial p} \right]_{p=0}^{p=p_0} dx dy + \frac{f_0}{k^2} \int_{-d}^d \int_0^L (\overline{v'_0 \omega'_0}) dx dy}{2 \int_{\tau_p} \left[\frac{(u'^2 + v'^2)}{2} + \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial p} \right)^2 \right] d\tau} \quad (2.25)$$

(2.24)及(2.25)即扰动的增长率及波速公式。当不计地形作用时, 可取 $\omega'_0 = 0$, 这时(2.24)和(2.25)式分别简化为:

$$2\nu_i = \frac{\int_0^{p_0} \int_{-d}^d \left[U \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial U}{\partial p} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial x} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \right] dy dp}{\int_0^{p_0} \int_{-d}^d \left[\frac{(u'^2 + v'^2)}{2} + \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial p} \right)^2 \right] dy dp} \quad (2.26)$$

$$C_y = \langle U \rangle + \frac{\int_0^{p_0} \int_{-d}^d \left[\frac{1}{f_0} U \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'\phi'}) + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial U}{\partial p} (\overline{\phi' \frac{\partial \phi'}{\partial p}}) - \frac{1}{f_0^2} \overline{\phi'^2} \frac{\partial q}{\partial y} \right] dy dp}{2 \int_0^{p_0} \int_{-d}^d \left[\frac{(u'^2 + v'^2)}{2} + \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial p} \right)^2 \right] dy dp} + \frac{\int_{-d}^d \left[\frac{1}{\sigma} \overline{\phi'^2} \frac{\partial U}{\partial p} \right]_{p=0}^{p=p_0} dy}{2 \int_0^{p_0} \int_{-d}^d \left[\frac{(u'^2 + v'^2)}{2} + \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial p} \right)^2 \right] dy dp} \quad (2.27)$$

关于地形作用的影响,将在后面专门讨论。下面先利用(2.26)和(2.27)式讨论扰动的的发展和移动规律。

三、扰动不稳定发展的能量判据

(2.26)式可改写成

$$2v_i = \frac{\{\overline{K, k'}\} + \{\overline{P, p'}\}}{[K'] + [P']} \quad (3.1)$$

其中

$$\begin{aligned} [K'] &\equiv \int_0^{p_0} \int_{-d}^d \int_0^L \frac{1}{2} (u'^2 + v'^2) dx dy dp \\ &= L \int_0^{p_0} \int_{-d}^d \frac{1}{2} \overline{(u'^2 + v'^2)} dy dp \end{aligned} \quad (3.2)$$

为扰动动能。

$$\begin{aligned} [p'] &\equiv \int_0^{p_0} \int_{-d}^d \int_0^L \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial p} \right)^2 dx dy dp \\ &= L \int_0^{p_0} \int_{-d}^d \frac{1}{2\sigma} \overline{\left(\frac{\partial \phi'}{\partial p} \right)^2} dy dp \end{aligned} \quad (3.3)$$

为扰动有效位能。

$$\{\overline{K, k'}\} \equiv L \int_0^{p_0} \int_{-d}^d U \frac{\partial}{\partial y} \overline{(u'v')} dy dp \quad (3.4)$$

为平均动能 \overline{K} 与扰动动能 k' 间的转换率(或称为转换线)。

$$\{\overline{P, p'}\} \equiv L \int_0^{p_0} \int_{-d}^d \frac{1}{\sigma} \frac{\partial U}{\partial p} \overline{\left(\frac{\partial \phi'}{\partial x} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right)} dy dp \quad (3.5)$$

为平均有效位能 \overline{P} 与扰动有效位能 p' 之间的转换率。

(3.1)式表明,扰动的增长率(v_i)与平均气流和扰动之间的动能转换率 $\{\overline{K, k'}\}$ 及位能转换率 $\{\overline{P, p'}\}$ 的代数和成正比。以后,我们将称前者为正压能量转换,后者为斜压能量转换。由(2.26)或(3.1)可写出扰动不稳定发展的判据为:

$$\int_0^{p_0} \int_{-d}^d U \frac{\partial}{\partial y} \overline{(u'v')} dy dp + \int_0^{p_0} \int_{-d}^d \frac{1}{\sigma} \frac{\partial U}{\partial p} \overline{\left(\frac{\partial \phi'}{\partial x} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right)} dy dp \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0, \text{ 则 } v_i \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \begin{matrix} \text{扰动发展} \\ \text{中性} \\ \text{衰减} \end{matrix} \quad (3.6a)$$

转换率。

由此可见,各种能量转换函数是以(3.9b)的形式相互联系的,不是彼此独立无关的。条件 $v_i > 0$ 与条件 $\partial[K']/\partial t > 0$ 或 $\partial[p']/\partial t > 0$,或 $\partial[E']/\partial t > 0$ 均是等价的。

四、扰动移动规律的物理分析

用类似于[9]的方法可以验证,对于正压中性波的情形($U = \text{常}$),波速公式(2.27)退化为Hauwitz波或Rossby波速公式。这时扰动只能相对于基本气流西移。但是,当扰动处在正压发展,或斜压发展、或正—斜压联合发展状态时,其移动规律要比中性波的情形复杂得多。为叙述方便起见,将(2.27)式写成如下形式

$$C_r - \langle U \rangle \equiv \frac{C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5}{2[E']} \quad (4.1)$$

$$C_1 \equiv L \int_0^{p_0} \int_{-d}^d \left[\frac{1}{f_0} U \frac{\partial}{\partial y} (u' \phi') - \frac{1}{f_0^2} \phi'^2 \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \phi \right] dy dp$$

$$= \frac{L}{f_0} \int_0^{p_0} \int_{-d}^d (u' \phi') \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} dy dp$$

$$C_2 \equiv L \int_0^{p_0} \int_{-d}^d \frac{1}{\sigma} \frac{\partial U}{\partial p} (\phi' \frac{\partial \phi'}{\partial p}) dy dp = L \int_0^{p_0} \int_{-d}^d \left(\frac{R}{p\sigma} \right) U_T (\phi' T') dy dp$$

$$C_3 \equiv - \frac{L}{f_0^2} \int_0^{p_0} \int_{-d}^d \phi'^2 \beta dy dp$$

$$C_4 \equiv -L \int_{-d}^d \left[\frac{1}{\sigma} \phi'^2 \frac{\partial U}{\partial p} \right]_0^{p_0} dy = L \int_{-d}^d \left[\left(\frac{1}{\sigma} \phi'^2 U_T \right)_{p_0} - \left(\frac{1}{\sigma} \phi'^2 U_T \right)_0 \right] dy$$

$$C_5 \equiv -L \int_0^{p_0} \int_{-d}^d \frac{1}{f_0^2} \phi'^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) dy dp$$

(4.1)式左边为扰动相对于基本气流的移动速度。右边分母为总能量 $[E']$ 的二倍,恒为正值。扰动移动的方向由右边分子各项所决定,下面分别讨论这些项对扰动移动的影响。

1. 移动与正压发展的关系

正压切断作用

$$C_1 = \frac{L}{f_0} \int_0^{p_0} \int_{-d}^d (\overline{u' \phi'}) \frac{\partial U}{\partial y} dy dp$$

这一项与扰动的正压发展密切相关。它取决于基本气流的水平切变及扰动位势的东西输送。这里将只讨论北半球($f_0 > 0$)的情形。一般说来,如果急流北侧($\partial U / \partial y < 0$)与正扰动位势($\phi' > 0$)向西输送($\overline{u' \phi'} < 0$)相配合,或者急流南侧($\partial U / \partial y > 0$)与正扰动位势向东输送($\overline{u' \phi'} > 0$)相配合时,则扰动是相对于基本气流东移的($C_1 > 0$)。对于与上述情形相反的配合,则扰动是相对于基本气流西移的。图1是几种典型正压发展或衰减的螺旋波状流型,移动规律各不相同。例如,图1(a)为急流北曳式槽,流场槽前 $u' > 0$, $\phi' < 0$, 槽后 $u' < 0$, $\phi' > 0$, 即有正扰动位势向西输送($\overline{u' \phi'} < 0$), 于是有 $\overline{u' \phi'} \frac{\partial U}{\partial y} > 0$, 因此,这一项的作用将使这种流场槽相对于基本气流东移。按照正压发展判据(3.7)可知这时系统是正压发展的。所以我们称这种流场系统为正压发展东移型。

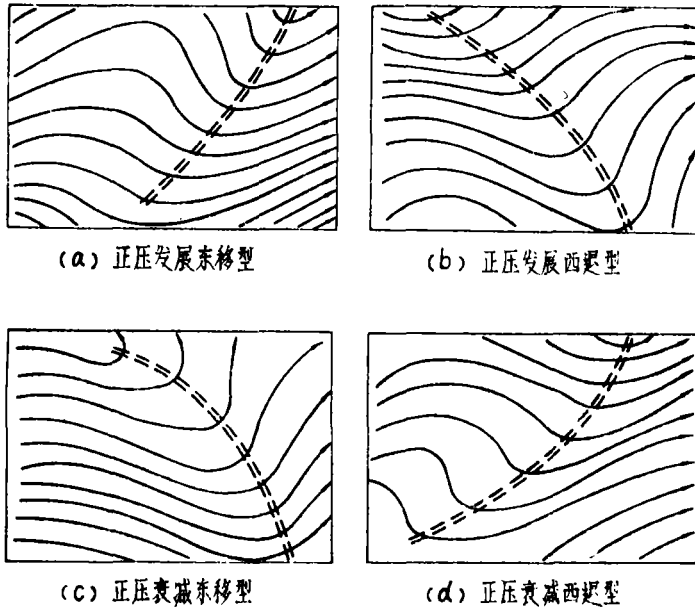


图1 螺旋波状流型 - - - 槽线

这一项可以造成正压流场斜槽的切断现象。图2所示的流场槽,急流北为导式槽,急流南侧为曳式槽。按上述规则可以判定,急流北侧属正压减弱东移型,而南侧则为正压减弱西移型。因此,对于这种型式的流场结构,这一项的作用可能会造成槽的南北切断现象。我们称这种与正压发展相联系的切断现象为正压切断现象。

2. 移动与斜压发展的关系

斜压切断作用

$$C_2 = L \int_{p_0}^0 \int_{-d}^d \left(\frac{R}{p\sigma} \overline{U_T' (\phi' T')'} \right) dy dp$$

这一项与系统的斜压发展密切相关。它取决于大气的斜压性($U_T \neq 0$)及扰动温、压场的相互配置。一般说来,如果 $U_T > 0$ (正热成风)与 $\overline{\phi'T'} > 0$ (高温伴随高压,或低温伴随低压)相配合,或者 $U_T < 0$ 与 $\overline{\phi'T'} < 0$ 相配合时,扰动将相对于基本气流东移。相反的配合时,扰动将相对于基本气流西移。

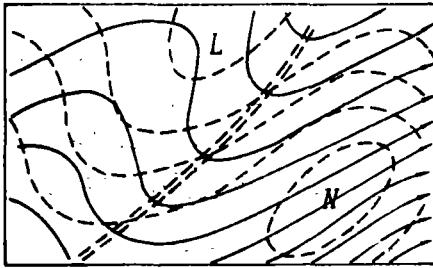


图2 正压切断和斜压切断作用图示
->流线, ---等温线, = = =槽线

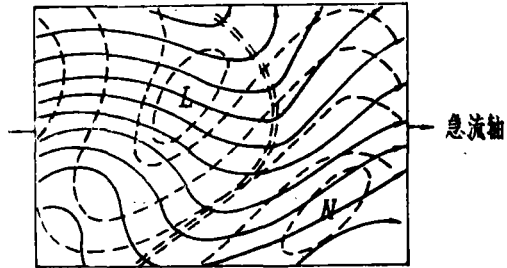


图3 正-斜压联合发展的西风带系统(正压发展东移,斜压发展西移)。图例同图2。

图3是一个典型的正-斜压联合不稳定发展的西风带(通常 $U_T > 0$)系统。温、压场结构的特点是温度槽落后于高度槽。在流场槽前, $\phi' < 0, T' > 0$;槽后有 $\phi' > 0, T' < 0$,即有 $U_T(\overline{\phi'T'}) < 0$ 。因此,这一项的作用使该系统相对于基本气流西移。我们将称这种系统为斜压发展西移型。在实际天气分析中,人们早已发现了一个经验事实,即斜压波动发展旺盛时,东移缓慢或维持准静止。这说明,在这个阶段,这一项的作用可能是较为重要的。从图3的流场槽(急流北曳式槽)来看,它是正压发展东移型的。可见对这种系统来说,虽然它既是正压发展的,又是斜压发展的,但与这两种发展相联系的移动规律却正好相反。

C_2 也可能造成斜槽的切断现象。仍以图2为例,急流北侧属斜压发展东移型,而急流南侧则属于斜压发展西移型。因而这一项的作用也可能造成这样的斜压斜槽发生南北切断现象。我们就称这种与斜压发展相联系的切断现象为斜压切断现象。

上述分析表明,不同类型的发展系统,其移动规律是很不相同的。发展系统的移动规律的这种复杂性是中性波所没有的。

3. β 作用

$$C_3 = -\frac{L}{f_0^2} \int_0^{p_0} \int_{-d}^d \phi'^2 \beta \, dy dp$$

其中, $\beta \equiv \partial f / \partial y$ 为Rossby参数,在北半球恒为正值。因此, C_3 恒为负值。其符号与扰动本身的具体结构无关。因此,在北半球, β 作用总是使扰动相对于基本气流西移的。

4. 平均气流的斜压性对扰动移动的影响

$$C_4 = L \int_{-d}^d \left[\left(\frac{1}{\sigma} \overline{\phi'^2 U_T} \right)_{p_0} - \left(\frac{1}{\sigma} \overline{\phi'^2 U_T} \right)_0 \right] dy$$

这一项主要取决于上、下界面处热成风的水平分布。如果平均而言,基本气流为图4所示的急流型分布。则有

$$\left(\frac{1}{\sigma} \overline{\phi'^2 U_T}\right)_{p_0} > 0, \quad \left(\frac{1}{\sigma} \overline{\phi'^2 U_T}\right)_0 < 0$$

即有 $C_6 < 0$ 。基本流场的这种斜压结构使扰动相对于基本气流东移。

C_6 取决于静力稳定度参数 σ 及热成风 U_T 的垂直分布，定性上不易直接判别。对此，我们不作进一步的分析。

五、大尺度地形对扰动发展和移动的影响

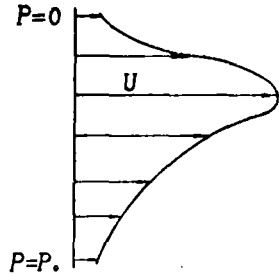


图4 平均纬向风速廓线

考虑地形的作用，我们须回到(2.24)和(2.25)式。可见，由于地形作用，会使扰动获得一个附加的增长（或增幅）率 $(v_i)_m$ 及一个附加的移速 $(Cr)_m$ 。我们将称之为地形的“增幅”作用和“加速”作用。根据(2.24)和(2.25)，并注意应用(1.9)，则可将 $(v_i)_m$ 和 $(Cr)_m$ 分别写为

$$(v_i)_m \equiv \mu^2 \int_{-d}^d U_0 \left(\phi'_0 \frac{\partial h'}{\partial X} \right) dy \tag{5.1}$$

$$(C_i)_m \equiv -\mu^2 \int_{-d}^d \frac{f_0}{k^2} \left(U_0 v'_0 \frac{\partial h'}{\partial X} + v'^2_0 \frac{\partial h'}{\partial y} \right) dy \tag{5.2}$$

其中，

$$\mu^2 \equiv \frac{\rho_0 g L}{2[E']}$$

1. 扰动地形对扰动发展和移动的影响

为了定性说明扰动地形的作用，现考虑在给定时刻 ϕ'_0 与 h' 可表示成

$$\begin{cases} \phi'_0 = \Phi_0 \cos(kx + \delta) \\ h' = h_0 \cos kx \end{cases} \tag{5.3}$$

的情形。为了简单起见，这里只考虑了流场扰动与地形扰动同波长的情况。由(5.3)有

$$\overline{\phi'_0 \frac{\partial h'}{\partial x}} = \frac{\Phi_0 h_0 k}{2} \sin \delta \tag{5.4}$$

$$\frac{f_0}{k^2} \overline{(v'_0 \frac{\partial h'}{\partial x})} = \frac{\Phi_0 h_0}{2} \cos \delta \tag{5.5}$$

可见，地形扰动与流场扰动之间的位相差 δ 起着决定性的作用。在西风 ($U_0 > 0$) 带的情形，

当 $0 < \delta < \pi$ 时， $\overline{\phi'_0 \frac{\partial h'}{\partial x}} > 0$ ， 地形增幅

$\delta = \frac{\pi}{2}$ 时， $\overline{\phi'_0 \frac{\partial h'}{\partial x}} = \frac{\Phi_0 h_0 k}{2}$ ， 增幅作用最强。

当 $\frac{\pi}{2} < \delta < \frac{3\pi}{2}$ 时， $\overline{(v'_0 \frac{\partial h'}{\partial x})} < 0$ ， 使扰动东移。

$\delta = \pi$ 时 东移最快。

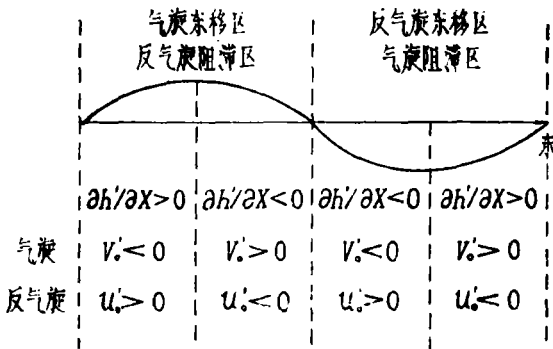


图5 东西扰动地形对扰动发展的影响

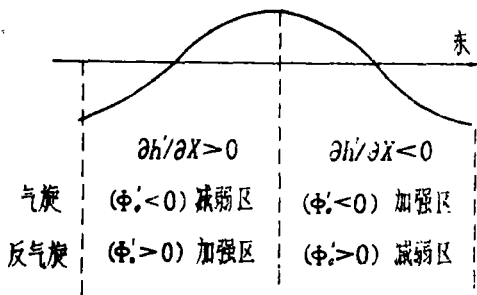


图6 东西扰动地形对扰动移动的影响

设地形扰动的一个谐波分量如图5所示。地形脊前槽后(背风坡) ($\partial h'/\partial x < 0$)是气旋($\phi'_e < 0$)加强区、反气旋($\phi'_e > 0$)减弱区。地形向风坡($\partial h'/\partial x > 0$)则是反气旋加强区或气旋减弱区。

图6是说明扰动地形对波速影响的示意图。当气旋位于地形脊区(位相差 $\delta = \pi$)时,将有 $v'_e \partial h'/\partial x < 0$,扰动将“加速”东移, $(C_i)_m > 0$;当气旋移到地形槽区时,有 $v'_e \partial h'/\partial x > 0$,扰动东移将受阻滞。所以,一般说来,地形脊区为气旋东移区、反气旋东移阻滞区;地形槽区则为反气旋东移区、气旋东移阻滞区。这些与[7]的结果及观测事实是一致的。

2. 纬向平均地形对扰动移动的影响

由(5.1)和(5.2)式可以看出,纬向平均地形 \bar{h} 只影响扰动的移动,而对扰动没有增幅作用。在北半球,平均地形北坡($\partial \bar{h}/\partial y < 0$)有“加速”扰动东移的作用。而平均地形南坡($\partial \bar{h}/\partial y > 0$)有阻滞扰动东移的作用。可见,地形南坡的作用与 β 作用同效,均是使扰动相对于基本气流西移。

六、小结与讨论

本文根据准地转的位势涡度方程研究了具有水平切变和垂直切变的纬向基本气流中的扰动的不稳定发展和移动的规律。导出了扰动的增长率及其移动速度的公式。由此讨论了基本气流的结构和扰动本身的结构以及大地形对扰动的发展和移动的影响。

1. 正-斜压联合不稳定发展的判据为

$$\{ \bar{K}, K' \} + \{ \bar{P}, P' \} = \begin{matrix} > \\ < \end{matrix}, \text{ 则 } v_i = 0, \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{matrix} \text{扰动发展} \\ \text{中性} \\ \text{衰减} \end{matrix}$$

正压不稳定和斜压不稳定是联合不稳定的两个特例。根据上述判据,可用能量转换的机制统一阐明正压不稳定,斜压不稳定及正-斜压联合不稳定发展的物理机制。并且可以根据基本状态和扰动的结构判定扰动发展的方向。

2. 在波数与时间无关及流函数满足地转近似的条件下, 扰动动能 $[K']$, 扰动位能 $[P']$ 及扰动总能量 $[K'] + [P']$ 是同步增长的。这三种能量的相对局地增长率彼此相等, 且等于 $2v_i$ 。因此, 根据振幅增长率 v_i 的符号判定扰动的发展情况和根据扰动的上述三种能量的局地变化率判定扰动的发展情况是等价的。

3. 扰动的移动与扰动的发展有密切关系, 正压发展和斜压发展对移动的影响各不相同。移动规律依具体的发展类型不同而异。实际大气中常见的“斜槽”的切断现象可能由正压切断作用或斜压切断作用或正—斜压联合切断作用造成。

4. 大地形对扰动的移动和发展均有直接影响。具体说来, 纬向平均地形的南北坡只影响扰动的移动, 南坡与 β 作用等效, 使波西退。北坡与 β 的作用相反, 使波东移。扰动地形既影响扰动的发展; 也影响扰动的移动。

参 考 文 献

- [1] 杨大升等, 动力气象学基础, 气象出版社, 1980.
- [2] Kuo, H.L., *J. Meteor.*, 6(1949), 105-122.
- [3] J. G. Charney & M. E. Stern, *J.A.S.*, 19(1962), 159-172.
- [4] 卢佩生、曾庆存, 大气科学, 5(1981), 1, 1-8.
- [5] J. R. Holton, 动力气象引论.
- [6] 伍荣生, 气象学报, 40(1982), 2, 129-137.
- [7] 陈秋士, 中国科学, 6(1980), 576-586.
- [8] 伍荣生, 气象学报, 34(1964), 11-19.
- [9] 贺海晏, 气象学报, 40(1982), 4, 408-415.

Physical Analysis of the Instability Criterion in Energy form for Developing Disturbances and Their Movements

He Haiyan

Abstract

This paper investigated the dynamics of the instability developments and the movements of the disturbances in a zonal basic current by use of a quasi-geostrophic potential vorticity equation. The effects of the structures of basic currents and disturbances and large scale topography on the developments and the movements of disturbances were discussed based on the disturbance growth rate formula and the wave speed formula derived in this paper. The results show that a barotropic-baroclinic combined instability criterion for the development of disturbances can be expressed, in energy form, as $\{ \bar{K}, K' \} + \{ \bar{P}, P' \} > 0$, and the way by which the developing disturbances move is quite different from that of neutral waves, and that large scale topography can affect not only the movements, but also the developments of disturbances directly.