

关于椭球算法的改进与应用

徐树荣

聂义勇

(中山大学计算机科学系)

(中国科学院沈阳计算所)

摘 要

本文对哈奇扬椭球算法作了若干改进:给出了加快椭球收缩的改进算法,压缩了入口长度,得到了较小的最大迭代步数估计.从计算实例表明,这些改善使算法的效率进一步提高,并可避免计算过程中由计算机有限精度引起的一些错误.

§1. 椭球算法的改善

考虑不等式组

$$Ax < b \quad (1.1)$$

其中 $A = (a_{ij})$ 是 $m \times n$ 的整数矩阵 ($n \geq 2$), b 是 m 维整数列向量. 令 a_i 表示 A 的第 i 个行向量, 定义入口长度

$$L = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \log_2(|a_{ij}| + 1) + \sum_{i=1}^m \log_2(|b_i| + 1) + \log_2 mn + 1 \quad (1.2)$$

Хачиян⁽¹⁾给出了求解(1.1)的一个多项式算法. 尔后Gács与Lovász⁽²⁾对它作了改进,其算法如下:

令 $x^0 = 0$, $A^0 = 2^{2L} I_n$ (I_n 为 n 阶单位矩阵), 一般地设有 x^K , A^K , 则

步骤1 判别 x^K 是否满足 $Ax^K < b$, 若满足, 算法停止; 否则, 有某个 i_K , 使 $a_{i_K} x^K - b_{i_K} \geq 0$. 置 $a = -a_{i_K}^T$.

步骤2 令
$$x^{K+1} = x^K + \frac{1}{n+1} \frac{A^K a}{\sqrt{a^T A^K a}} \quad (1.3)$$

$$A^{K+1} = \frac{n^2}{n^2 - 1} \left(A^K - \frac{2}{n+1} \frac{(A^K a)(A^K a)^T}{a^T A^K a} \right) \quad (1.4)$$

转入步骤1. 迭代不超过 $11n^2L$ 步.

Gács等改进的椭球算法, 比Хачиян原算法其效率提高了一个数量级, 但运算量仍然偏大. 而且随着迭代次数的增加, 在计算中往往出现负数开方, 零作除数等错误. 本文给出一种算法, 将进一步提高算法的效率, 同时在很大程度上消除了上述错误.

本文于1982年12月收到.

为简单计,假定(1.1)的系数矩阵 A 已作如下处理,使每行各元素的平方和等于1. 记向量 $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})^T$, 则点 $x^K = (x_1^K, x_2^K, \dots, x_n^K)^T$ 到超平面 $a_i^T x = b_i$ 的有向距离(x^K 到其垂足的连续长度,沿超平面法线方向 a_i 者为正)

$$\rho_i^K = a_i^T x^K - b_i \quad (i = 1, \dots, m), \text{ 而 } \rho_i^K \geq 0 \text{ 表示 } x^K \text{ 不满足 (1.1).}$$

求解(1.1)的椭球算法就是从某点 x^0 及椭球 $E^0 = \left\{ x \mid (x - x^0)^T (A^0)^{-1} (x - x^0) \leq 1 \right\}$ 开始. 一般地, 要由点 x^K 及椭球 $E^K = \left\{ x \mid (x - x^K)^T (A^K)^{-1} (x - x^K) \leq 1 \right\}$ 求点 x^{K+1} 及椭球 E^{K+1} , 使 E^K 所包含的(1.1)的解集都包含在 E^{K+1} 内, 并且 E^{K+1} 的体积比 E^K 有一定程度的缩小. 我们所考虑的改进算法就是使这种缩小尽可能地快. 为此, 在点 x^K 不满足(2.1), 即 $a_i^T x^K \geq b_i$ 的不等式中, 找 ρ^K 的最大者, 设

$$\rho^K = \rho_{i_0}^K = \max \left\{ \rho_i^K \mid \rho_i^K \geq 0 \right\}$$

$$a = -a_{i_0} = - \left(a_{i_0 1}, a_{i_0 2}, \dots, a_{i_0 n} \right)^T$$

则(1.1)的解包含在

$$\xi E^K = E^K \cap \left\{ x \mid a^T (x - x^K) \geq \rho^K \right\}.$$

之中. 显然, ξE^K 的体积不超过 E^K 的一半, 并且 ρ^K 越大, ξE^K 越小. 现在从 E^K 作新椭球 E^{K+1} , 使

- i) E^{K+1} 与 ξE^K 相切于某超平面 Π , 而 Π 的法向量为 a ;
- ii) E^{K+1} 包含 $\xi E^K \cap \{ x \mid a^T (x - x^K) = \rho^K \}$;
- iii) E^{K+1} 的体积 $\lambda(E^{K+1})$ 最小.

切点 P^K 的位置由

$$P^K = x^K + A^K a / \sqrt{a^T A^K a} \text{ 确定而 } x^{(K)} \text{ 到平面 } \Pi, \left\{ x \mid a^T (P^K - x) = 0 \right\} \text{ 的}$$

有向距离(沿 $-a$ 方向者为正)为

$$\gamma^K = a^T P^K - a^T x^K = \sqrt{a^T A^K a}.$$

显然, 当 $\gamma^K \leq \rho^K$, 即“判别条件”

$$\sqrt{a^T A^K a} \leq a_i^T x^K - b_{i_0} \tag{1.5}$$

成立时, 不等式组(1.1)是不相容的. 如果出现这种情况, 则结论已得, E^{K+1} 就不必作下去了. 故可令 $0 < \mu = \frac{\rho^K}{\gamma^K} < 1$. 用仿射变换 $Z = CY = C(x - x^K)$ 把 E^K 变成单位球, 且

使切点 P^K 在 Z 轴上, 易知 $C^T C = (A^K)^{-1}$ 且 $C \left(\frac{A^K a}{\sqrt{a^T A^K a}} \right) = (1, 0, \dots, 0)^T$. 由于仿射变换不改变向量的比值, 故 E^K 内的超平面 $-a^T x = b_i$ 变成单位球内的坐标超平面 $Z_1 = \mu$.

为了满足ii), 即 E^{K+1} 与 $E = \mu$ 的交为球 $Z_1^2 + \dots + Z_n^2 \leq 1 - \mu^2$ 可设椭球 E^{K+1} 的方程为

$$v(Z_1 - \mu - d)^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2 \leq (1 - \mu^2 + vd^2)$$

为满足i), 则 $v(1 - \mu - d)^2 = 1 - \mu^2 + vd^2$, 故 $v = \frac{1 + \mu}{1 + \mu - 2d}$

$$\begin{aligned} \therefore \lambda(E^{K+1}) &= K(n) (1 - \mu - d) (1 - \mu^2 + 2d^2)^{\frac{n-1}{2}} \\ &= (1 + \mu)^{\frac{n-1}{2}} (1 - \mu - d) (1 - \mu - 2d)^{-\frac{1-n}{2}} \end{aligned}$$

为使入 (E^{K+1}) 极小, 令 $\lambda'_d(E^{K+1}) = 0$, 得

$$d = \frac{1 - \mu}{n + 1}, \therefore v = \frac{(1 + \mu)(n + 1)}{(1 - \mu)(n - 1)}, \text{ 故 } E^{K+1} \text{ 的方程为}$$

$$\frac{(1 + \mu)(n + 1)}{(1 - \mu)(n - 1)} \left(Z_1 - \frac{\mu n + 1}{n + 1} \right)^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2 \leq \frac{n^2(1 - \mu^2)}{n^2 - 1}$$

由于 $\mu \leq Z_1 \leq 1$ 时, $Z_1(1 + \mu) - Z_1^2 - \mu \geq 0$, 知

$$\frac{n^2(1 - \mu^2)}{n^2 - 1} - \frac{(1 + \mu)(n + 1)}{(1 - \mu)(n - 1)} \left(Z_1 - \frac{\mu n + 1}{n + 1} \right)^2 \geq 1 - Z_1^2$$

故 $\xi E^K \subset E^{K+1}$, 记 $f = \left(\frac{\mu n + 1}{n + 1}, 0, \dots, 0 \right)^T$,

$$D = \text{diag} \left(\frac{(n + 1)^2}{n^2(1 - \mu)^2}, \frac{n^2 - 1}{n^2(1 - \mu)^2}, \dots, \frac{n^2 - 1}{n^2(1 - \mu)^2} \right),$$

则 E^{K+1} 为: $(Z - f)^T D (Z - f) \leq 1$. 作类似于[3]的推导, 解出 f , $(C^T D C)^{-1}$,

最后可得 $x^{K+1} = x^K + \frac{\mu n + 1}{n + 1} \frac{A^K a}{\sqrt{a^T A^K a}}$ (1.6)

$$A^{K+1} = \frac{n^2(1 - \mu^2)}{n^2 - 1} \left(A^K - \frac{2(\mu n + 1)}{(n + 1)(1 + \mu)} \frac{(A^K a)(A^K a)^T}{a^T A^K a} \right) \quad (1.7)$$

这样, 我们得到的改进算法是:

令 $x^0 = 0$, A^0 为单位矩阵的一定倍数, 一般, 设有 x^K, A^K ,

步骤1 判别(1.1), 若满足, 算法停止. 若不全满足, 必有 i_0 , 使 $a_{i_0}^T x^K \geq b_{i_0}$,

且使 $a_{i_0}^T x^K - b_{i_0} = \max$. 令 $a = -a_{i_0}^T$. 检验(1.5), 若不满足(若满足则停止), 令

$$\mu = \frac{a_{i_0}^T x^K - b_{i_0}}{\sqrt{a^T A^K a}} < 1$$

步骤2 按(1.6), (1.7)计算 X^{K+1}, A^{K+1} , 转入步骤1.

算法是多项式的, 迭代一次运算量为 $O(n^2)$, 经过多项式次数迭代后, 可得(1.1)的一个解或断言它不相容. 由于改进算法带有因子 μ , 加速椭球收缩, 可减少迭代次数. 当 $\mu = 0$ 时(1.6), (1.7)就是Gács等改进的椭球算法.

§2 入口长度的压缩

按(1.2)计算入口长度 L 远远大于 nm . 太大的 L 增加迭代步数, 同时 2^L (或 2^{2L})

将远远超出计算机所能表示的数的范围.因此,在理论允许范围内,必须尽可能压缩 L . 容易证明, L 可压缩到

$$L^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \log_2 \left(b_i^2 + \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right) + \log_2 n + 0.11 \quad (2.1)$$

事实上,根据以下引理可证明这个结论.

引理1 解集合 $\{x \mid a_i x \leq b_i, i=1,2,\dots,m, x \geq 0\}$ 的任一个顶点 $V=(V_1, \dots, V_n)^T$ 满足 $\|V\|_\infty = \max_i |V_i| < \frac{2^{L^*}}{n}$.

(证)若顶点 V 使 $a_i x = b_i \quad i \in I \subset \{1,2,\dots,m\}$, 则由克莱姆法则知, $V_i = \frac{D_i}{D}$, 其中 D, D_i 分别是 $A, (A, b)$ 的子行列式(至多相差一个符号). 由 A, b 的整数性, 推出

D, D_i 是整数, $|D| \geq 1$, 设 $D_i = \det \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_k \end{pmatrix}$ 这里 $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ 是 K 维行向量, 则

$$D_i^2 \leq \|\gamma_1\|_2^2 \cdots \|\gamma_k\|_2^2$$

这里 $\|\gamma_i\|_2 = \sqrt{(\gamma_i \gamma_i)}$ 表示向量的欧氏模, 因此,

$$|D_i| \leq \|\gamma_1\|_2 \cdots \|\gamma_k\|_2 \leq \prod_{i=1}^m \sqrt{b_i^2 + \sum_{j=1}^n a_{ij}^2} < \frac{2^{L^*}}{n}$$

由于 $|D| \geq 1$, 得 $|V_i| = \left| \frac{D_i}{D} \right| < \frac{2^{L^*}}{n}$, 从而 $\|V\|_\infty < \frac{2^{L^*}}{n}$ 证毕.

引理2 若 $a_i x < b_i \quad i=1,2,\dots,m$ 有解, 则球 $E^0 = \{x \mid \|x\|_2 \leq 2^{L^*}\}$ 与解集 $s = \{x \mid a_i x < b_i, i=1,2,\dots,m\}$ 的交的体积 $\lambda(E^0 \cap s) > 2^{-(m+1)L^*}$.

证明类似于[3]中引理2, 此处从略.

因为 A^0 由 L 确定, 所以 L^* 代替 L 之后, 使迭代步数有实质性减少, 从而提高求解效率(见算例), 实际计算表明, L^* 也是偏高的估计, 在许多情况下, 可人为地指定一个入口长度 L^* , 使求解范围限定在球 $\|x\|_2 \leq 2^{L^*}$ 之内.

一般说来, 求解不等式组(1.1)用Хачиян原椭球算法需 $O(mn^6)$ 次运算, 而用改进的椭球算法需 $O(mn^5)$ 次运算. 在此基础上, 用(2.1)计算 L^* 代替(1,2)计算的 L , 则所需运算量减少为 $O(mn^4 \log_2 n)$ 次, 如果再指定入口长度 L (对相容不等式组往往是可能的), 则所需运算减少为 $O(n^4)$ 次. 我们在IBM-370和TQ-16机上计算的若干实例均说明上述结论.

§3 最大迭代步数的细估计

椭球算法对最大迭代步数估计过高, 我们考核过的算例表明, 实际迭代步数均远小

于理论估计。对于不相容系统(1.1)，如果不使用判别条件，一直按理论估计的最大迭代步数迭代，将出现 $\frac{\text{机器零}}{\text{机器零}}$ 或有效数字严重相消的情况。因此理论上给出一个比较切合实际的最大迭代步估计是必要的。对于改进的椭球算法，不难证明，最大迭代步数是

$$K_m = (4n^2 + 6n + 2)L^* \tag{3.2}$$

定理1 对 $n \geq 2$ 的不等式组(1.1)施行改进算法(1.6),(1.7)，经 K_m 步迭代之后，或者得到(1.1)的解，或者断言(1.1)不相容。

[证]设(1.1)有解，但迭代 K_m 步后算法未中止(即未得出解)，由于(1.1)有解，故由引理2， $\lambda(E^0 \cap s) > 2^{-(n+1)L^*}$ 。因为 $\lambda(E^0) = K(n) \cdot 2^{nL^*}$ ，其中 $K(n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$ 是与 n 有关的系数。又由算法的几何结构知(见[3])相应于 x^k, A^k 的椭球

$$E^k = \{ x \mid (x - x^k)^T (A^k)^T (x - x^k) \leq 1 \}$$

满足 $\lambda(E^{k+1}) < e^{-\frac{1}{2(n+1)}} \lambda(E^k)$ ，所以经 K_m 步后，

$$\lambda(E^{K_m}) < \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} 2^{nL^*} e^{-\frac{(4n^2 + 6n + 2)L^*}{2(n+1)}} \leq \frac{8\pi^2}{15} 2^{nL^*} e^{-(2n+1)L^*} < e^{-(n+1)L^*}$$

这与(1.1)有解的结论 $\lambda(E^{K_m}) \geq \lambda(E^0 \cap s) > 2^{-(n+1)L^*}$ 矛盾。证毕。

容易验证

$$\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \begin{cases} \approx 1.3353 & (n=12) \\ \approx 0.9106 & (n=13) \\ \approx 0.5993 & (n \geq 14) \end{cases}$$

故通过与定理1类似的论证易得

定理2 $n \geq 13$ 时，对不等式组(1.1)施行改进算法，经

$$2ln2 \cdot (2n^2 + 3n + 1)L^* < 1.4(2n^2 + 3n + 1)L^*$$

步迭代后，或者得到(1.1)解，或者断言(1.1)不相容。

§4 算例表明我们的最大迭代步数估计更为切合实际。

§4. 计算实例

我们在IBM370/138，等计算机上计算了若干实例，这里仅以两例为代表。

例1 $AX = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} X < \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b_1$

其中 $A_2 = -I_9$ (I_9 是9阶单位阵)， b_2 是9维零向量。

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -5 & -4 & -7 & -6 & -7 & -3 & -8 & -11 & -2 \end{pmatrix} \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1.000005 \\ 1.000005 \\ 1.000005 \\ 1.000005 \\ 1.000005 \\ 1.000005 \\ -0.999995 \\ -0.999995 \\ -0.999995 \\ -0.999995 \\ -0.999995 \\ -0.999995 \\ -0.999995 \\ -23.999995 \end{pmatrix}$$

我们在机器上用五个方案进行了解算，所有方案得到的解(在小数点后5位进行舍入)是

$$x_1 = x_2 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 0, \quad x_3 = x_4 = x_9 = 1,$$

其计算结果如下表所示

序号	算法类型	入口长度(L)	最大迭代次数(K _m)	实际迭代次数(K _p)	计算时间(t)
1	Хачнян原算法	L = 71 (按(1.2)计算)	K _m = 91361 (按原估计K _m = 16n ² L算)	11463	24分09.14秒
2	"	L* = 29 (按(2.1)计算)	K _m = 37584 (按K _m = 16n ² L*计算)	6000	12分58.10秒
3	Gács等改进算法 (1.3), (1.4)	"	K _m = 10695 (按(3.1)计算)	4765	3分17.53秒
4	"	指定 L* = 8		2396	1分46.74秒
5	我们的改进算法 (1.6), (1.7)	L* = 29 (按(2.1)计算)	K _m = 10695 (按(3.1)计算)	1315	0分57.46秒

表中t是在IBM-370机上的计算时间，其中方案5是按实际迭代次数K_p换算成IBM-370机上的计算时间。

例2

$$\begin{pmatrix} 36 & -630 & 3360 & -7560 & 7560 & 2772 \\ & 14700 & 88200 & 211680 & -220500 & 83160 \\ & & 564480 & -1411200 & 1512000 & -582120 \\ & & & 3628800 & -3969000 & 1552320 \\ & & & & 4410000 & -1746360 \\ & & & & & 698544 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

这个矩阵的逆矩阵是Hilbert矩阵^[1]

$$H_6 = (h_{ij}), \text{ 其中 } h_{ij} = 1/(i+j-1), i, j = 1, 2, \dots, 6.$$

因此方程的精确解为

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}, x_4 = \frac{1}{4}, x_5 = \frac{1}{5}, x_6 = \frac{1}{6}.$$

我们将方程组写成下列不等式组

$$b - e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} < AX < b + e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

通过解上述不等式组求方程组的摄动解, 若取 $e = 0.00005$, 得解,

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.9999952390, & x_2 &= 0.4999972700, & x_3 &= 0.3333313389, \\ x_4 &= 0.2499984018, & x_5 &= 0.1999986555, & x_6 &= 0.1666655011. \end{aligned}$$

在[4]中, 我们将改进椭球算法用于估计线性方程组的摄动解, 得到一些初步结果。

参 考 文 献

- [1] Л. Г. Хачиян, ДОКЛ. АН. СССР, 244(1979), 5, 1093—1096.
- [2] P. Gács, L. Lovasz, *Math. Program. Stud.*, 14(1981), 61—68.
- [3] 马仲蕃、田丰, 数学的实践与认识, 1980, 2, 36—44.
- [4] 聂义勇、徐树荣, 高等学校计算数学学报(待发表).
- [5] G. E. Forsythe, C. B. Moler, 线代数方程组计算机解法(徐树荣译) 科学出版社, 1979.

Some Improvements and Applications for Ellipoidal Algorithm

Xu shurong Nie Yiyong

Abstract

In this paper we give some improvements and applications for Khachian's ellipoidal algorithm. These improvements are as follows: to give an algorithm of improvement that makes the ellipsoid compress more speedy, to compress the entrance length, to estimate maximum numbers of the iteration steps more accurately. Numerical examples show that these improvements increase practical efficiency of algorithm greatly.