关于全纯函数线性组合及其应用

何育赞

（中国科学院数学研究所）

关于全纯函数线性组合H.嘉尔当(Cartan)[1]曾推广亚纯函数奈望利纳(Nevanlinna)学理的基本定理于此情形。此后有一系列的工作[2,3]，新近在论文〔4〕、〔5〕中进一步讨论了全纯函数例外组合的某些关系并应用于代数体函数，获得异于单值解析函数的有趣结果。本文讨论全纯函数线性组合的重值，给出一个较前精确的结果，并将此结果应用于一类代数体函数和亚纯函数。

1 命$G=(g_1(x),\cdots,g_p(x))$，其中$g_j(x)$ $j=1,2,\cdots,p(\geqslant 2)$表一组$p$个超越全纯函数，且不具公共零点。$\mathrm{a}^i=(a_1^i,\cdots,a_p^i)$为$p$维复向量。如果$\{\mathrm{a}^i\}$中任意$p$个向量都是线性无关的，则称向量组$\{\mathrm{a}^i\}_{i=1,2,\cdots,q(\geq p)}$是可容许的，令$F_i(x)=\mathrm{a}^i\cdot G=a_1^i g_1(x)+\cdots+a_p^i g(x)$，如果向量组$\{\mathrm{a}^i\}_{i=1,2,\cdots,q}$是可容许的，则函数组合集$\{F_i(x)\}_{i=1,2,\cdots,q}$是可容许的，令数$\lambda$表$g_j(x)$ $j=1,2,\cdots p$之间为齐次复系数线性关系的最大个数。

对于每一点x，定义

$$u(x)=\max_{1\leqslant j\leqslant p}\{\ln|g_i(x)|\}$$

并置

$$T(r,G)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\varphi})d\varphi-u(0)$$

和

$$N_{p-1}(r,F_i)=\int_0^n\frac{n_{p-1}(t,F_i)-n_{p-1}(0,F_i)}{t}dt+n_{p-1}(0,F_i)\ln r$$

其中$n_{p-1}(t,F_i)$表$F_i(x)$于$|x|<t$内之零点个数，其重级$\tau\leqslant p-1$者按其重级计算，重级$\tau\geqslant p-1$者只计算$p-1$次。文〔1〕曾证明次之基本定理：

设$G(x)=(g_1(x),\cdots,g_p(x)$如上所述，又设$\lambda=0$，$\{F_i(x)\}_{i=1,2,\cdots q}$是可容许的函数组合集，则有

$$(q-p)T(r,G)<\sum_{i=1}^{q}N_{p-1}(r,F_i)+S(r\ G)\tag{1}$$

其中

$$S(r,G)=0(\ln(r\ T(r,G)))$$

于无穷级时可能须除去一串区间叙列I，在其上 $\int_I r^{\alpha-1}dr<\infty$，$\alpha\geqslant 0$。

今设 $\gamma(\geqslant p-1)$ 为一整数，$N^{\gamma)}_{p-1}(r,F_i)$ 表 $F_i(x)$ 的零点密指标，其重级 $\tau<p-1$ 时按重级计算，当 $p-1\leqslant\tau\leqslant\gamma$ 时计算 $p-1$ 次，当 $\tau<\gamma$ 时略去不计。并令 $N^{(\gamma+1}_{p-1}(r,F_i)=N_{q-1}(r,F_i)-N^{\gamma)}_{p-1}(r,F_i)$。注意到

$$N^{(\gamma+1}_{p-1}(r,F_i)\leqslant\frac{p-1}{\gamma+1}N^{(\gamma+1}(r,F_i)$$

则(1)可化为

$$(q-p)T(r,G)<\sum_{i=1}^{q}N^{\gamma_i)}_{p-1}(r,F_i)+\sum_{i=1}^{q}N^{(\gamma_i+1}_{p-1}(r,F_i)+S(r,G)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{q}N^{\gamma_i)}_{p-1}(r,F_i)+\sum_{i=1}^{q}\frac{p-1}{\gamma_i+1}N^{(\gamma_i+1}(r,F_i)+S(r,G)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{q}\frac{\gamma_i-p+2}{\gamma_i+1}N^{\gamma_i)}_{p-1}(r,F_i)+\left(\sum_{i=1}^{q}\frac{p-1}{\gamma_i+1}\right)T(r,G)+S(r,G)$$

于是得到

$$\left(\sum_{i=1}^{q}\frac{\gamma_i-p+2}{\gamma_i+1}-p\right)T(r,G)<\sum_{i=1}^{q}\frac{\gamma_i-p+2}{\gamma_i+1}N^{\gamma_i)}_{p-1}(r,F_i)+S(r,G) \qquad (2)$$

据此不等式有

定理1 设 $G=(g_1(x),\cdots,g_p(x))$ 又设 $\lambda=0$，$\{F_i\}_{i=1,2,\cdots q(\geqslant p)}$ 为可容许函数组合集，

令
$$\delta^{\gamma_i)}_{p-1}(F_i)=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N^{\gamma_i)}_{p-1}(r,F_i)}{T(r,G)}$$

则有

$$\sum_{i=1}^{q}\frac{\gamma_i-p+2}{\gamma_i+1}\delta^{\gamma_i)}_{p-1}(F_i)\leqslant p \qquad (3)$$

注1 当 $\gamma_1=\cdots=\gamma_q=\gamma$ 时，即为〔7〕中的结果。特别地，若 $\delta^{\gamma_i)}_{p-1}(F_i)=1$，我们称 $F_i(x)$ 为 γ_i 级简约满例外组合，然则由定理1可得，$2p-3$ 级简约满例外组合不超过 $2p$ 个或 $2p-2$ 级简约满例外组合不超过 $2p-1$ 个。

注2 在〔5〕中曾讨论总亏量与数 λ 的关系。由(3)可知，当 $\sum\frac{\gamma_i-p+2}{\gamma_i+1}\delta^{\gamma_i)}_{p-1}(F_i)>p$ 时，必有 $\lambda\geqslant1$。

系 命 $G=(g_1(x),\cdots,g_p(x)$ 和 λ 如定理1中所设，则若存在 $p-1$ 个、$2p-2$ 级简约满例外组合时，至多还有 p 个 $2p-3$ 级简约满例外组合，即两种满例外组合总数仍为 $2p-1$ 个。（它改进了注1中所述的结果）

2 命 $G_j=(g^j_1(x),\cdots g^j_p(x)\quad(j=1,2,\cdots,p)$ 并设 $det(g^j_k(x))_{kj=1,\cdots,p}\neq0$，令 $a^i=(a^i_1,\cdots,a^i_p)$，向量组 $\{a^i\}_{i=1,2,\cdots,q(\geqslant p)}$ 是可容许的，继命 $F^j_i(x)$

$=\sum_{k=1}^{p} a_k^i \quad g_k^j(x)$ $(i=1,2,\cdots,q, j=1,2,\cdots p)$，对每一固定的$j$应用不等式(1)便得

$$\left(\sum_{i=1}^{q}\frac{\gamma_i-p+2}{\gamma_i+1}-p\right)T(r,G_j)<\sum_{i=1}^{q}\frac{\gamma_i-p+2}{\gamma_i+1}N_{p-1}^{\gamma_i)}(r,F_i^j)+S(r,G_j)$$

再对j求和即得

$$\left(\sum_{i=1}^{q}\frac{\gamma_i-p+2}{\gamma_i+1}-p\right)\sum_{j=1}^{p}T(r,G_j)<\sum_{i=1}^{q}\frac{\gamma_i-p+2}{\gamma_i+1}\sum_{j=1}^{p}N_{p-1}^{\gamma_i)}(r,F_i^j)+S(r)$$

其中

$$S(r)=\sum_{j=1}^{p}S(r,G_j)$$

我们令$F_i(x)$表以$F_i^1(x),\cdots,F_i^p(x)$之公共零点为零点的全纯函数，其重级计$F_i^j(x)$ $j=1,2,\cdots,p$中最低级者，由于

$$\sum_{j=1}^{p}N_{p-1}^{\gamma_i)}(r,F_i^j)\leqslant pN_{p-1}(r,F_i)+\sum_{j=1}^{p}\left(N_{p-1}^{\gamma_i)}(r,F_i^j)-N_{p-1}^{\gamma_i)}(r,F_i)\right)$$

和[1]

$$\sum_{i=1}^{q}N_{p-1}(r,F_i)\leqslant\sum_{j=1}^{p}T(r,G_j)+O(1)$$

便得

$$\left(\sum_{i=1}^{q}\frac{\gamma_i-p+2}{\gamma_i+1}-p\frac{2\gamma-3+p}{\gamma+1}\right)\sum_{j=1}^{p}T(r,G_j)<\sum_{i=1}^{q}\frac{\gamma_i-p+2}{\gamma_i+1}\sum_{j=1}^{p}\left(N_{p-1}^{\gamma_i)}(r,F_i^j)\right.$$
$$\left.-N_{p-1}^{\gamma_i)}(r,F_i)\right)+S(r) \tag{4}$$

其中　$\gamma=\max\limits_{1<i<q}\{r_i\}$

据此不等式，有

定理2　命$(g_k^j(x))_{k,j=1,2,\cdots,p}$为$p\times p$全纯函数方阵，且$det(g_k^j(x))_{p\times p}\neq0$，对每一固定$j$全纯函数组$g_k^j(x)$ $(k=1,2,\cdots,p)$线性无关，且无公共零点，则不可能存在可容许向量组$\{a^i\}$和q个整数γ_i $(i=1,2,\cdots q)$，满足

$$\sum_{i=1}^{q}\frac{\gamma_i-p+2}{\gamma_i+1}-p\frac{2\gamma+3-p}{\gamma+1}>0 \tag{5}$$

其中$\gamma=\max\limits_{1<j<q}\{\gamma_i\}$，同时使得对每一固定的$i(i=1,2,\cdots,q)$ p个线性组合$F_i^j(x)=\sum_{k=1}^{p}a_k^i\ g_k^j(x)$ $(j=1,2,\cdots,p)$按下述方式取相同之零点：当重级$\tau\leqslant p-1$时零点及重级

相同，当重级$\tau>\gamma_i$者略去不计，当重级$\tau\in[p-1,\gamma_i]$时，只计算$p-1$次。

注 当$\gamma_1=\cdots=\gamma_q=p^2-1, q=2p+1$时，即得[7]中的结论。作为定理2的另一个特殊情形是：当$\gamma_1=p^2-p, \gamma_2=p^2-2, \gamma_3=\cdots\gamma_q=p^2-1, q=2p+1$，则唯一性定理成立。它改进了中[7]的结果。

3 命$u(x)$为方程

$$\phi(x,u)\equiv A_v(x)u^v+\cdots+A_0(x)=0 \tag{6}$$

所确定的v值代数体函数。我们称$u(x)$是一般型代数体函数，如果$A=(A_v(x),\cdots,A_0(x))$中函数是线性无关的。应用第1节中的结果，有

定理3 命$u(x)$为(6)所确定的一般型代数体函数，$a_i\ (i=1,2,\cdots,q)$为q个判别的复数，则有

$$\left(\sum_{i=1}^{q}\frac{\gamma_i-v+1}{\gamma_i+1}-v-1\right)T(r,u)<\sum_{i=1}^{q}\frac{\gamma_i-v+1}{\gamma_i+1}N_v^{(\gamma_i)}\left(r,\frac{1}{u-a_i}\right)+S(r,u) \tag{7}$$

事实上，表示式

$\phi(x,a_i)\equiv A_v(x)a_i^v+\cdots+A_0(x)\ \ (i=1,2,\cdots,q)$是$A=(A_v(x),\cdots,A_0(x)$的可容许组合集，应用(2)于$A$和$\phi(x,a_i)$，并注意到

$$|vT(r,u)-T(r,A)|<0(1)$$

和

$$N_v^{(\gamma_i)}(r,\Psi(x,a_i))=vN_v^{(\gamma_i)}\left(r,\frac{1}{u-a_i}\right)$$

使得所求的基本不等式(7)。

据不等式(7)我们有

系 命$u(x)$如定理3中所设，令

$$\delta_v^{(\gamma_i)}(a_i)=1-\varlimsup_{r=\infty}\frac{N_v^{(\gamma_i)}\left(r,\frac{1}{u-a_i}\right)}{T(r,u)}$$

则有

$$\sum_{i=1}^{q}\frac{\gamma_i-v+1}{\gamma_i+1}\delta_v^{(\gamma_i)}(a_i)\leqslant v+1 \tag{8}$$

特别地，若$\delta_v^{(\gamma)}(a)=1$，我们称a为γ级简约满亏值，然则v值一般型代数体函数至多有$\left[\frac{(v+1)(\gamma+1)}{\gamma-v+1}\right]$个$\gamma$级简约满亏值，其中$[a]$表数$a$的整数部分。

应用定理2于一般型代数体函数，我们有次之定理

定理4 命$u_j(x)$为方程

$$\phi_j(x,u_j)\equiv A_v^j(x)u_j^v+\cdots+A_0^j(x)=0 \qquad (j=0,1,\cdots,v) \tag{9}$$

所确定的一般型代数体函数，且设$det(A_i^j(x))_{i,j=0,2,\cdots,v}\neq 0$，则不存在$q$个复数$a_i$ ($i=$

$1,2,\cdots,q$)和q个整数$r_i(\geqslant v)$满足

$$\sum_{i=1}^{q}\frac{\gamma_i-v+1}{\gamma_i+1}-(v+1)\frac{2\gamma+2-v}{\gamma+1}>0 \tag{10}$$

其中$r=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant q}\{r_i\}$，使得$v+1$个代数体函数对$q$个$a_i(i=1,2,\cdots,q)$按下述方式取相同的值点：当重级$\tau\leqslant v$时值点与重级相同，当重级$\tau>r_i$时不计，而当$\tau\in[v,r_i]$时，只计$v$次。

4　关于亚纯函数的第二基本定理[6]中曾有一个推广，即特征函数以取值低级的亚纯函数的密指标来界囿，本文应用全纯函数线性组合的结果，简单地得到一个在牵涉重值时的一种推广。

定理 5　命$f(x)$为$|x|<\infty$亚纯的函数，$\varphi_1(x),\cdots,\varphi_{p-1}(x)$是$p-1$个线性无关的亚纯函数，它们不具公共零点，且满足

$$T(r,\varphi_j)=o[T(r,f)]\qquad j=1,2,\cdots,p-1. \tag{11}$$

继命
$$\phi_j(x)=\sum_{j=1}^{p-1}a_j^i\varphi_j(x)\qquad i=1,2,\cdots,q.$$

设$\{a^i\}_{i=1\cdots q}$是可容许向量组，其中$a^i=(a_1^i,\cdots,a_{p-1}^i,-1)$。则有

$$\left(\sum_{i=1}^{q}\frac{\gamma_i-p+2}{\gamma_i+1}-p-o(1)\right)T(r,f)<\sum_{i=1}^{q}\frac{\gamma_i-p+2}{\gamma_i+1}N_{p-1}^{r)}\left(r,\frac{1}{f-\phi_i}\right)$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{q}\frac{\gamma_i-p+2}{\gamma_i+1}\right)N_{p-1}^{r)}(r,f)+S(r) \tag{12}$$

其中 $\gamma=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant q}\{\gamma_i\}$。

证　首先可以找到全纯函数$\varphi(x)\not\equiv0$，满足$T(r,\varphi)=o[T(r,f)]$，使得$\varphi\varphi_j$ ($j=1,2,\cdots,p-1$)是全纯函数且不具公共零点。令$\varphi(x)f(x)=g_p(x)/g(x)$，其中$g_p(x)$和$g(x)$为不具公共零点的全纯函数，继令$G=(g_1(x),\cdots,g_p(x))=(g\varphi\varphi_1,\cdots,g\varphi\varphi_{p-1},g_p)$易知它是一组$p$个线性无关的全纯函数，且不在同一点取零为值。事实上，如若不然，存在

$c_j\in C(j=1,2,\cdots p)$ $\sum\limits_{j=1}^{p}|c_j|\neq0$，使得

$$c_1g_1(x)+\cdots+c_pg_p(x)\equiv0, \tag{13}$$

分两种情形讨论，i)若$c_p=0$，则(13)成为

$$c_1g_1(x)+\cdots+c_{p-1}g_{p-1}(x)\equiv0$$

其中　$\sum\limits_{j=1}^{p-1}|c_j|\neq0$，由于$\varphi g\not\equiv0$，从而

$$c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_{p-1}\varphi_{p-1}(x)\equiv0$$

这与　$\varphi_1(x),\cdots,\varphi_{p-1}(x)$是线性无关的假设矛盾，

ii) 若 $c_p\neq 0$，则(13)能写为

$$g_p(x)=-\frac{c_1}{c_p}g_1(x)-\cdots-\frac{c_{p-1}}{c_p}g_{p-1}(x)$$

从而有

$$f(x)=-\frac{c_1}{c_p}\varphi_1(x)-\cdots-\frac{c_{p-1}}{c_p}\varphi_{p-1}(x)$$

这与条件(11)矛盾。

现令$F_i(x)=\sum_{j=1}^{p}a_j^i g_j(x)$，其中$a_p^i=-1(i=1,\cdots,q)$，由假设$\{F_i(x)\}$是可容许函数组合集，应用不等式(2)便得

$$\left(\sum_{i=1}^{q}\frac{\gamma_i-p+2}{\gamma_i+1}-p\right)T(r,G)<\sum_{i=1}^{q}\frac{\gamma_i-p+2}{\gamma_i+1}N_{p-1}^{(r_i)}(r,F_i)+S(r,G)$$

但知[1]

$$T(r,g_h/g_k)<T(r,G)+O(1)$$

特别地，对$k\neq p$我们有

$$T(r,f)=T\left(r,\frac{g_1}{g_k}\varphi_k\right)\leqslant T(r,g_p/g_k)+T(r,\varphi_k)$$

$$\leqslant T(r,G)+T(r,\varphi_k)+O(1)\leqslant T(r,G)+o[T(r,f)]$$

即有

$$(1-o(1))T(r,f)<T(r,G)$$

另方面，由于$F_i(x)$和

$$F_i^*(x)=F_i(x)/\varphi(x)g(x)=a_1^i\varphi_1(x)+\cdots+a_{p-1}^i\varphi_{p-1}(x)-f(x)$$

$$=\phi_i(x)-f(x)$$

的零点有次之关系

$$N_{p-1}^{(r_i)}(r,F_i)\leqslant N_{p-1}^{(r_i)}\left(r,\frac{1}{f-\phi_i}\right)+N_{p-1}^{(r_i)}\left(r,\frac{1}{g}\right)+N_{p-1}^{(r_i)}\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)$$

$$\leqslant N_{p-1}^{(r_i)}\left(r,\frac{1}{f-\phi_i}\right)+N_{p-1}^{(r)}(r,f)+o[T(r,f)]$$

结合上述诸式便得(12)。

参 考 文 献

〔1〕Cartan H., Sur les Zeros des Combinaisons Linéaires de p Foncfions Holomorphes Données, *Mathematica*, Cluj, t7(1933), 5—29.

〔2〕熊庆来, Sur les Foncfions Méromorphes et les Foncfions Algébroides Extensions d'un Théorême de M. R. Nevanlinna, *Mem. Sci. Math.*, 139, Paris.

〔3〕Виттих Гансв., Новейщие исследования по однозначным аналитиическим фунгкиям,(1960).

〔4〕Niino K and Ozawa M., Deficiencies of an Entire Algebroid Function. Kōdai. *Math. Sem. Rep.*, 22(1970), 98-113.

〔5〕Toda N., Sur Quelgues Combinaisons Linéaires Exceptionnelles au Sens de Nevanlinna, Ⅱ, *J. Math. Soc. Japan*, 25 (1973), 1, 158—167.

〔6〕庄圻泰, Une Généralisation dúne Inégalité de Nevanlinna, *Scientia Sinica*, XIII (1964), 6, 887—895.

〔7〕杨乐，亚纯函数及函数组合的重值，数学学报，14(1964)，3，428—437.

〔8〕何育赞, Sur un Problème D'unicité Relatif aux Foncfions Algébroïdes. *Scientia, Sinica*, XIV (1965), 2, 174—180.

On Systems of Holomorphic Functions and Their Applications

He Yuzan

Abstract

A generalization of the Nevanlinna theory to the systeme of holomorphic functions was initiated by H. Cartan. In present paper, we considered the influence of multiplicity, and obtained a second main theorem in its precise form. By using the theorem we discussed the defect relations and uniqueness theorem, then we applied the second main theorem to algebroid functions and meromorphic functions, and proved simply a generalization of second main theorem on meromorphic function where the counting functions for the meromorphic function grow slowly instead of constants.