

高斯—泊松点过程的收敛

裴 祥
(数学力学系)

本文沿用文[1]中的记号和术语。按照文[2]、[3]的定义,称 S 上的点过程 ξ 为 Gauss—Poisson 过程($G-P$ 过程),如果存在 $S, S \times S$ 上的局部有限测度 λ 和 H ,满足:

- 1) $H(A \times B) \leq \min(\lambda(A), \lambda(B))$, 凡 $A, B \in \mathbf{B}$;
- 2) $H(dt \times ds) = H(ds \times dt)$

使得 ξ 有如下形式的 Laplace 变换:

$$L_{\xi}(f) \triangleq Ee^{-\xi f} = \exp \left\{ \int (e^{-f(t)} - 1) \lambda(dt) + \frac{1}{2} \iint (e^{-f(t)} - 1) (e^{-f(s)} - 1) H(dt \times ds) \right\}, \text{ 凡 } f \in \mathbf{F}c. \quad (1)$$

在上面的定义中取 $H=0$,便得到以 λ 为强度测度的 Poisson 点过程。

设 $\xi_{nj}, n \in N, j=1, 2, \dots, k_n$ 是 S 上点过程的无穷小三角序列,命 $\xi_n = \sum_j \xi_{nj}$. 称序列

$\xi_n, n \in N$ 为无穷小迭加。

定理1 设 ξ 是 S 上的 $G-P$ 过程,其 L 变换如(1).为使无穷小迭加序列 $\xi_n, n \in N$ 关于 M 中的 vague 拓扑依分布收敛于 ξ ,充分必要条件为:对于任意的有界集 $B \in \mathbf{B}$ 及任意的 $I, J \in \mathbf{B}$,下列各式在 $n \rightarrow \infty$ 时成立

- i) $\sum_j P(\xi_{nj} B > 2) \rightarrow 0$,
- ii) $\sum_j P(\xi_{nj} I = 1, \xi_{nj} J = 1) \rightarrow \lambda(I \cap J) - H((I \cap J) \times (I \cap J)) + H((I \setminus J) \times (J \setminus I))$,
- iii) $\sum_j P(\xi_{nj} I = 2) \rightarrow \frac{1}{2} H(I \times I)$.

证明 文[3]中已证明 $G-P$ 过程是无穷可分的,并且指出其典则测度 \tilde{P} 满足

$$\tilde{P}(\mu \in M; \mu(S) > 2) = 0$$

命 ϕ_1, ϕ_2 分别是 $S, S \times S$ 到 M 中的如下可测变换:

$$\text{对任意 } s \in S, \phi_1(s) = \delta_s \in M,$$

$$\text{对任意 } (s, t) \in S \times S, \phi_2(s, t) = \delta_s + \delta_t \in M,$$

命 \tilde{P}_1, \tilde{P}_2 分别是 $\lambda(dt) - H(dt \times S), H(dt \times ds)$ 在变换 ϕ_1, ϕ_2 之下的像,则不难证明

本文1982年4月收到

$\tilde{P} = \tilde{P}_1 + \frac{1}{2}\tilde{P}_2$, 并且对于任意的 $I, J \in \mathbf{B}$ 有

$$\tilde{P}(\mu: \mu(I) = 2) = \frac{1}{2}H(I \times I),$$

$$\tilde{P}(\mu: \mu(I) = 1, \mu(J) = 1) = \lambda(I \cap J) - H((I \cap J) \times (I \cap J)) + H((I \setminus J) \times (J \setminus I)).$$

利用这些关系式并应用文[1]中的定理6.1即可得到本定理的证明。

以下设 $\mathbf{S} = [0, \infty)$, 以 $D = D[0, \infty)$ 记定义于 \mathbf{S} 上的全体右连续左极限存在的函数。按照文[4]的方法在 D 中产生 Stone 拓扑 \mathbf{D} 。定义从 \mathbf{N} 到 D 的变换 $T: \mu \rightarrow T\mu$ 如下: 对 $\mu \in \mathbf{N}$, 有 $T\mu \in D$ 使

$$(T\mu)(t) = \mu([0, t]), \quad t \geq 0,$$

由文[4]的定理2可知 T 是可测的。因此如果 ξ 是 \mathbf{S} 上的点过程, 则 $T\xi$ 是 D 中的随机元; 对于每个 $t \geq 0$, $(T\xi)(t)$ 是随机变量 $\xi([0, t])$ 。我们总假定以概率1有

$$\xi(\{0\}) = (T\xi)(0) = 0.$$

对于 \mathbf{S} 上的点过程无穷小三角序列 $\{\xi_n\}$ 及其迭加 $\{\xi_n\}$, 我们以 $T\xi_n \xrightarrow{d} T\xi$ 表示作为 D 中的随机元, 序列 $\{T\xi_n\}$ 关于 \mathbf{D} 依分布收敛于 $T\xi$ 。

定理2 设 ξ 是 $\mathbf{S} = [0, \infty)$ 上的简单 $G-P$ 过程。为使 $T\xi_n \xrightarrow{d} T\xi$, 充分必要条件为: 对任意的 $B \in \mathbf{B}\lambda$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$i) \sum_j P(\xi_{nj} B > 2) \rightarrow 0;$$

$$ii) \sum_j P(\xi_{nj} B = 1) \rightarrow \lambda(B) - H(B \times B);$$

$$iii) \sum_j P(\xi_{nj} B = 2) \rightarrow \frac{1}{2}H(B \times B).$$

证明 命 $A_\xi = \{t \in [0, \infty): \xi(\{t\}) = 0, a.s.\}$

对属于 A_ξ 的正数 a , 以 $D[0, a]$ 记 D 中的元在 $[0, a]$ 上的限制, 并在 $D[0, a]$ 中引入 Skorohod- J_1 拓扑。定义 \mathbf{N} 到 $D[0, a]$ 中的变换 $T_a: \mu \rightarrow T_a\mu$ 使对每个 $\mu \in \mathbf{N}$, $T_a\mu \in D[0, a]$ 并且

$$(T_a\mu)(t) = \mu([0, t]), \quad t \in [0, a],$$

T_a 是可测的。由[4]中定理3', $T\xi_n \xrightarrow{d} T\xi$ 的充分必要条件为: 对每个 $a \in A_\xi$ 有 $T_a\xi_n \xrightarrow{d} T_a\xi$ (关于 $D[0, a]$ 中的 Skorohod 拓扑)。所以

必要性 如果 $T\xi_n \xrightarrow{d} T\xi$, 则对于任意正整数 m 及任意的 $t_1, \dots, t_m \in A_\xi$ 有

$$((T\xi_n)(t_1), \dots, (T\xi_n)(t_m)) \xrightarrow{d} ((T\xi)(t_1), \dots, (T\xi)(t_m)),$$

于是对于任意有限个端点属于 A_ξ 的左开右闭区间 I_1, \dots, I_m 有

$$(\xi_n I_1, \dots, \xi_n I_m) \xrightarrow{d} (\xi I_1, \dots, \xi I_m).$$

由文[1]的定理4.2 知 $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, 再由定理1知 $i) \sim iii)$ 必成立;

充分性反之, 设 $i) \sim iii)$ 成立。定义 $[0, \infty)$ 上的有限测度

$$Q = a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2$$

其中 $a_1 = \lambda(B) - H(B \times B)$, $a_2 = \frac{1}{2}H(B \times B)$.

由条件 $i) \sim iii)$ 可推知 $[0, \infty)$ 上的有限测度序列 $\sum_j P(\xi_{nj} B e^\bullet)$, $n \in N$ 弱收敛于测度 Q , 从而对于任意 $t \geq 0$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_j (1 - Ee^{-t\xi_{nj} B}) = \int_0^\infty (1 - e^{-tx}) Q(dx) \tag{2}$$

上式右端是 $t \geq 0$ 的连续函数.

由于 $\{\xi_{nj}\}$ 的无穷小性质蕴含

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_j (1 - Ee^{-t\xi_{nj} B}) = 0, \quad t \geq 0,$$

所以

$$\sum_j \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k} (1 - Ee^{-t\xi_{nj} B})^k \leq \left\{ \sum_j (1 - Ee^{-t\xi_{nj} B}) \right\} \frac{\sup_j (1 - Ee^{-t\xi_{nj} B})}{1 - \sup_j (1 - Ee^{-t\xi_{nj} B})}$$

$$\longrightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty), \quad t \geq 0,$$

又因为

$$-\log Ee^{-t\xi_n B} = -\sum_j \log Ee^{-t\xi_{nj} B}$$

$$= \sum_j (1 - Ee^{-t\xi_{nj} B}) + \sum_j \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k} (1 - Ee^{-t\xi_{nj} B})^k,$$

所以对 $t \geq 0$ 有

$$-\lim_{n \rightarrow \infty} \log Ee^{-t\xi_n B} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_j (1 - Ee^{-t\xi_{nj} B}) \tag{3}$$

结合(2), 这说明随机变量序列 $\xi_n B, n \in N$ 的 L 变换收敛于一个关于 t 连续的函数, 从而序列 $\xi_n B, n \in N$ 弱收敛. 再由文[1]中的引理 4.5 知序列 $\xi_n, n \in N$ 是在依分布收敛意义下相对紧的.

又由测度 Q 的定义及(2)、(3)可知当 $|z| \leq 1$ 时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EZ^{\xi_n B} = \exp \{ -(a_1 + a_2) + (a_1 + a_2 z)z \}$$

$$= \exp \{ (z-1)\lambda(B) + \frac{1}{2}(z-1)^2 H(B \times B) \} = Ez^{\xi B},$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n B = 0) = P(\xi B = 0) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n B \geq 2) = P(\xi B \geq 2),$$

由于 ξ 是简单的, 故由文[1]中的定理 4.7 知 $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$. 由此并利用文[5]中定理 26 可推出 $T_{a_n} \xi_n \xrightarrow{d} T_a \xi$ 对一切 $a \in A_\xi$ 成立, 所以 $T \xi_n \xrightarrow{d} T \xi$. 证毕.

在定理 1 和 2 中令 $H = 0$, 则得到 Poisson 过程的特例. 定理 2 在 ξ 为 Poisson 过程时的相应结果曾为 Straf 所得到^[6]. 但他的证明要求强度测度 λ 对于 $[0, \infty)$ 上的勒贝格测度 L 绝对连续并要求 $\left| \frac{d\lambda}{dL} \right|$ 有界. 由于对 Poisson 过程而言, 简单性等价于

$$\lambda(\{t\}) = 0, \text{ 凡 } t \in [0, \infty) \quad (4)$$

而 $\lambda \ll L$ 是较(4)更强的假定。因此由定理可见条件 $\lambda \ll L$ 可放宽为条件(4), 而 $\left| \frac{d\lambda}{dL} \right|$ 有界的假设则是不必要的。

参 考 文 献

- [1] Kallenberg O., *Random Measure*, Akademie-Verlag, Berlin, (1976).
- [2] Newman D.S., *J. Appl. Prob.*, 7(1970), 338-358.
- [3] Milne R.K. and Westcott M., *Adv. Appl. Prob.*, 4(1972), 151-176.
- [4] Lindvall T., *J. Appl. Prob.*, 10(1973), 109-121.
- [5] Grandell, J., *Adv. Appl. Prob.*, 9 (1977), 502-525.
- [6] Iglehart, D.L., *Stoch. Proc. Appl.*, 2 (1974), 211-239.

The Convergence of Gauss-Poisson Point Process

Pei Xiang

Abstract

Let X be a fixed locally compact second countable Hausdorff topological space with Borel algebra \mathbf{A} , $M(X)$ denotes the set of all Radon measures on X and is endowed with the vague topology, and $\{\xi_{nj}, j=1,2,\dots,k_n, n=1,2,\dots\}$ be an infinitesimal triangular array of point processes on X , and let $\xi_n = \sum_j \xi_{nj}$ be the superposition of $\xi_{n1}, \dots, \xi_{nk_n}$.

Theorem 1. Let ξ be a Gauss-Poisson process on X with parameters λ and H , where λ and H are Radon measures on X and $X \times X$ respectively, then $\{\xi_n\}$ converges in distribution to ξ with respect to the vague topology in $M(X)$ iff

$$1) \lim_n \sum_j P(\xi_{nj}B > 2) = 0,$$

for all bounded $B \in \mathbf{A}$,

$$2) \lim_n \sum_j P(\xi_{nj}I = 1, \xi_{nj}J = 1) = \lambda(I \cap J) - H((I \cap J) \times (I \cap J)) + H((I \setminus J) \times (J \setminus I)),$$

$$3) \lim_n \sum_j P(\xi_{nj}I = 2) = \frac{1}{2} H(I \times I),$$

for all bounded $I, J \in \mathbf{A}$ with $\lambda(\partial I) = \lambda(\partial J) = 0$.

Theorem 2. Let $X = (0, \infty)$ and ξ be a simple G-P process on X with parameters λ and H , then $\{\xi_n\}$ converges in distribution to ξ with respect to the Stone topology in $D(0, \infty)$ iff

$$1) \lim_n \sum_j P(\xi_{nj}B > 2) = 0,$$

$$2) \lim_n \sum_j P(\xi_{nj}B = 1) = \lambda(B) - H(B \times B),$$

$$3) \lim_n \sum_j P(\xi_{nj}B = 2) = \frac{1}{2} H(B \times B),$$

for all bounded $B \in \mathbf{A}$ with $\lambda(\partial B) = 0$.