

广义 Volterra 系统的稳定性

周之铭

(数学力学系)

摘 要

考虑微分方程组

$$\dot{x}_i = x_i(e_i + \sum_{j=1}^n f_{ij}(x_j)) \quad i=1,2,\dots,n \quad (1)$$

作为 n 物种广义 Volterra 系统的模型, 其中 e_i 是实常数, $f_{ij}(0) = 0, \forall i, j$. 本文讨论了 (1) 的正平衡点 (q_1, q_2, \dots, q_n) 的稳定性问题. 主要注意具有下面特征的被食者—捕食者系统:

$f'_{ii}(q_i) \leq 0, \quad f'_{ij}(q_i)f'_{ji}(q_i) < 0$ 当 $(i-j)f'_{ij}(q_i) \neq 0$ 时, 利用图论和 LaSalle 定理, 得到 (1) 的正平衡点是渐近稳定的一些充分条件.

§ 1 引言 我们考虑下面的微分方程组

$$\dot{x}_i = x_i(e_i + \sum_{j=1}^n f_{ij}(x_j)) \quad i=1,2,\dots,n \quad (1)$$

作为 n 物种广义 Volterra 系统的模型, 其中 e_i 是实常数, $f_{ij}(0) = 0$, 对所有的 i, j . 当所有的 $f_{ij}(x_j) = p_{ij}x_j$ 时, 其中 p_{ij} 是实常数, (1) 就是古典的 Lotka-Volterra 系统^[1-4]. (1) 有比较明显的生态学含意, e_i 为物种 i 的内禀增长率, 当其他物种不出现时, $e_i > 0$ 表示物种 i 以速率 e_i 增长, $e_i < 0$ 表示物种 i 以速率 e_i 死亡. $f_{ij}(x_j)$ 描述物种 j 对物种 i 的影响, 当 $f_{ij}(x_j) \equiv 0$ 时, 表示物种 j 对物种 i 无影响. 当 $n = 2, 3$ 时, (1) 的形式也曾在 [6-8] 中被研究过. 在 [4] 中, 利用 LaSalle 的推广李雅普诺夫定理及图的变换, 得到 n 物种被食者—捕食者 Volterra 系统的一个相当普遍有效的稳定性判别准则. 本文的目的就是研究在什么条件下可以利用同样的方法去处理广义 Volterra 系统 (1). 得到在某些假设条件下 (1) 的正平衡点的稳定性不受 $f_{ij}(x_j)$ 的二次及二次以上的项的影响.

§ 2 一般假设 我们假设 (1) 存在一个正的平衡点 $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, 即

$$e_i + \sum_{j=1}^n f_{ij}(q_j) = 0 \quad i=1,2,\dots,n, \quad q_i > 0, \quad \forall j \quad (2)$$

且我们只对 $x_i > 0$ 的解有兴趣.

引进如下的变量替换

本文于 1982 年 9 月收到.

$$x_i = q_i e^{y_i}, \quad w_i = q_i (e^{y_i} - 1) \tag{3}$$

及李雅普诺夫函数

$$V = \sum_{i=1}^n \alpha_i q_i (e^{y_i} - y_i - 1)$$

其中 α_i 是待定的正常数。

假设所有的函数 f_{ij} 都可以在 q_j 的某一邻域展成幂级数:

$$f_{ij}(x_j) = f_{ij}(q_j) + f'_{ij}(q_j)(x_j - q_j) + \frac{f''_{ij}(q_j)}{2!} (x_j - q_j)^2 + \dots$$

经过简单运算, (1) 可以变为

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^n (f'_{ij}(q_j) w_j + \frac{f''_{ij}(q_j)}{2!} w_j^2 + \dots) \tag{4}$$

沿着(4)的轨线计算 \dot{V} 得到

$$\dot{V} = \sum_{i,j=1}^n (\alpha_i f'_{ij}(q_j) w_i w_j + \alpha_i \frac{f''_{ij}(q_j)}{2!} w_i w_j^2 + \dots) \tag{5}$$

如果我们能够找到 $\alpha_i > 0$ 使得二次型

$$W = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i f'_{ij}(q_j) w_i w_j$$

是定负的, 那末一定存在 $w = 0$ 的一个邻域, 使得 \dot{V} 是定负的。因为 $w = 0 \iff y = 0$, 所以 \dot{V} 在 $y = 0$ 的某一邻域是定负的。注意到所有的 $\alpha_i > 0$, 知道 V 是定正的。这时由李雅普诺夫定理知道, (4) 的解 $y = 0$ 是渐近稳定的, 也就是说, (1) 的正平衡点 q 是渐近稳定的。往往不容易找到 $\alpha_i > 0$ 使得 \dot{V} 是定负的, 但在某些情况下, 容易找到 $\alpha_i > 0$ 使得 \dot{V} 是半定负的, 然后在此基础上再应用 LaSalle 定理得到渐近稳定性。

§3 被食者——捕食者系统 我们集中注意具有下面特征的被食者——捕食者系统:

$$f'_{ii}(q_i) \leq 0, \quad f'_{ij}(q_j) f'_{ji}(q_i) < 0 \quad \text{当 } (i-j)f'_{ij}(q_j) \neq 0 \text{ 时} \tag{6}$$

为了简单起见, 令

$$f'_{ij}(q_j) = p_{ij} \quad \forall i, j$$

称矩阵 $P = (p_{ij})$ 为(1)在点 q 的主矩阵。我们将会看到(1)的一些有关性质可以由它的主矩阵所决定。以下假设(1)满足条件(6)。在这个条件下, (1)可以由一个图来表示。

(1)在点 q 的图就是(1)在点 q 的主矩阵的图。如在[4]中一样, $P = (p_{ij})$ 的图是 n 个顶点 $1, 2, \dots, n$ 的一个结构, 其中顶点 i 和顶点 j 是相邻的, 当且只当 $p_{ij} \neq 0$ 时, 相邻的顶点用一条边连结起来; 如果 $p_{ii} < 0$, 在顶点 i 有一个黑点, 如果 $p_{ii} = 0$, 在顶点 i 有一空圈。我们假设(1)的图是连通的。直接连结两个黑点的边称为**强链扣**, 否则称为**弱链扣**。我们用 $(1, 2, \dots, m)$ 和 $[1, 2, \dots, m]$ 分别表示一条**路径**和**圈**, 其中顶点 $1, 2, \dots, m$ 是依次地连结起来的。除了这些从[4]中借用的约定外, 我们利用标准的图论术语(例如在[9]中所使用

的)。应用这些术语, $P = (p_{ij})$ 的图, 因而(1)的图是连通的、无向的, 除了对于黑点之外不标定的。

§4 稳定容许性 我们定义(1)在点 q 的扰动是变化到一个新的系统(1)', 它具有与(1)同样的图, 除了附加的黑点往往是容许的外, 即 $\tilde{p}_{ii} \leq 0, \forall i$, 对 $i \neq j, \tilde{p}_{ij} = 0$, 当且只当 $p_{ij} = 0$ 时; 且 $\tilde{f}_{ij}^{(k)}(q_j) = 0, k \geq 2, \forall i, j$, 当且只当 $f_{ij}^{(k)}(q_j) = 0$ 。(1)的扰动是微小的, 如果它的主矩阵的扰动是微小的。正如在[4]中一样, 如果 $\max_{i,j} |\tilde{p}_{ij} - p_{ij}|$ 是微小的, $P = (p_{ij})$ 的扰动是微小的。

定义1 (1)在点 q 是容许的, 如果存在正常数 α_i , 使得在某一包含 $w = 0$ 的区域 Ω 内 $\dot{V} \leq 0$, 且在 Ω 内

$$\dot{V} = 0 \Rightarrow p_{ii}w_i = 0, \forall i$$

(1)在点 q 是稳定容许的, 如果由(1)的足够小的扰动得到的每一系统(1)'在点 q 是容许的。为了简单起见, 以下我们把“(1)在点 q 是稳定容许的”简称为“(1)是稳定容许的”。

我们假设

$$f_{ij}^{(k)}(q_j) = 0, k \geq 2, \forall i \text{ 当 } p_{ij} = 0 \text{ 时} \tag{7}$$

这一条件可作简单的生态解释: 如果物种 j 的数量对自身的增长率没有影响时, 则它也不会对其他物种 i 的增长率具有复杂的影响, 即它对其他物种 i 的增长率的影响最多是线性的。

在假设(7)下, (5)中的 \dot{V} 可表成下列形式:

$$\dot{V} = \sum_{i,j=1}^n \left(\alpha_i p_{ij} + \frac{\alpha_i f_{ij}''(q_j)}{2!} \text{sign}|p_{jj}|w_j + \alpha_i \frac{f_{ij}'''(q_j)}{3!} \text{sign}|p_{jj}|w_j^2 + \dots \right) w_i w_j \tag{8}$$

容易证明下面的引理:

引理 假设(7)成立, 且(1)的图是一树, 那末(1)是稳定容许的。

证明 将(8)改写成

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i^*j} \alpha_i p_{ij} w_i w_j + \sum_{j=1}^n \left[\alpha_j p_{jj} + \sum_{i=1}^n (\alpha_i w_i \frac{f_{ij}''(q_j)}{2!} \text{sign}|p_{jj}| + \right. \\ & \left. + \alpha_i w_i \frac{f_{ij}'''(q_j)}{3!} \text{sign}|p_{jj}|w_j + \dots \right) w_j^2 \end{aligned}$$

对于树, 我们可以选取 $\alpha_i > 0$ 使得

$$\alpha_i p_{ij} + \alpha_j p_{ji} = 0 \quad i \neq j \tag{9}$$

当顶点 i 与顶点 j 是相邻时。这时 $\sum_{i^*j} \alpha_i p_{ij} w_i w_j$ 变为0, 又选取足够小的 $|w|$ 使得对于每个 $p_{jj} < 0$ 都有

$$T_j = \alpha_j p_{jj} + \sum_{i=1}^n (\alpha_i w_i \frac{f''_{ij}(q_j)}{2!} - \text{sign}|p_{jj}| + \alpha_i w_i \frac{f''_{ij}(q_j)}{3!} - \text{sign}|p_{jj}| w_j + \dots) < 0$$

注意 $\alpha_j > 0$ 可以由(9)式所决定。令

$$\Omega = \{ (w_1, w_2, \dots, w_n) | T_j < 0, \text{对 } p_{jj} < 0 \}$$

显然, Ω 是包含 $w = 0$ 的一个区域。因此在区域 Ω 上, $\dot{V} \leq 0$ 且当 $\dot{V} = 0$ 时, 容易看出 $p_{ii} w_i = 0, V_i$, 所以(1)是容许的。从 \dot{V} 的表达式中同样看出(1)也是稳定容许的。证毕。

定理1 如果(1)是稳定容许的, 则它的图中的每一个圈一定最少包含一个强链扣。证明类似于文[4]中定理1的证明, 在此从略。

定义2^[5] 圈 $[1, 2, \dots, m]$ 的偏对称度就是

$$A = R + \frac{1}{R} - 2, \text{ 其中 } R = \frac{|p_{12} p_{23} \dots p_{m1}|}{|p_{21} p_{32} \dots p_{1m}|}$$

定义3^[5] 直接连结顶点 i 和顶点 j 的强链扣的强度由下式量度:

$$B_{ij} = \frac{p_{ii} p_{jj}}{|p_{ij} p_{ji}|}$$

假设图中的每一圈都有一强链扣。设最少有一圈真正出现, 选取一圈然后破其强链扣。如果仍然有圈, 选取另一圈, 然后破其强链扣, 继续这种步骤, 得到一组强链扣 $\{L_{ij}\}$ 的集合, 其中 L_{ij} 是联结顶点 i 到顶点 j 的强链扣, 使得全破了它们, 可以将图化为一树。令 $n(i)$ 代表指标 i 出现在 $\{L_{ij}\}$ 中作为 L 的下标的次数。因为移去强链扣 L_{ij} 后, 图是一树, 所以经过移动后, 从顶点 i 到顶点 j 只有唯一的一条简单路径。恢复一条链扣 L_{ij} , 得到唯一的一个圈, 记这个圈的偏对称度为 A_{ij} 。

有了这些记号后, 我们得到与[5]中类似的:

定理2 假设(7)成立, (1)的图经过移去强链扣 $\{L_{ij}\}$ 后产生一树, 那末(1)是稳定容许的, 如不等式

$$A_{ij} < 4B_{ij}/(n(i)n(j))$$

得到满足, 对 $\{L_{ij}\}$ 中的每一对指标 (i, j) 。

只需注意到(8)中 \dot{V} 的特殊形式, 证明与[5]中的完全相同。

对于其它的关于稳定容许性的条件, 可以参看[5]。

§5 图的约化 本节假设(7)成立, (1)是容许的, 且只考虑使得在 $\dot{V} = 0$ 的那些解, 即考虑满足 LaSalle 定理的不变集合。如在[4]中一样, 我们扩充符号的含意: 在顶点 i 上放一个黑点 \bullet 去表示 $w_i = 0$, 用 \oplus 表示 $w_i = \text{常数}$ 。

下面就是 \bullet 或 \oplus 的约化规则:

约化规则

i) 假如顶点 i 上有 \bullet 或 \oplus , 且除了只有一个相邻于 i 的顶点 j 外, 所有相邻于 i 的顶点都具有 \bullet , 则在顶点 j 上可放 \bullet 。

ii) 假如顶点 i 上有 \bullet 或 \oplus , 且除了只有一个相邻于 i 的顶点 j 外, 所有相邻于 i 的顶点都具有 \bullet 或 \oplus , 则在顶点 j 上可放 \oplus 。

iii) 假如顶点 i 上有 \circ , 且相邻于 i 的每顶点都具有 \bullet 或 \oplus , 则在顶点 i 上可放 \oplus 。

现在我们证明i), 对于除了顶点 i, j 外的每一个顶点 l 都进行考察。如果 $p_{ll} < 0$, 必有 $w_l = 0$; 如果 $p_{ll} = 0$, 当顶点 l 与 i 相邻时, 则由假设顶点 l 具有 \bullet , 即 $w_l = 0$, 当顶点 l 不与 i 相邻时, 则 $p_{il} = 0$, 这由假设(7)得 $f_{il}^{(k)}(q_l) = 0, k \geq 2$, 故(4)式中 w_l 的系数全为0。对于顶点 j , $p_{jj} = 0$ 而 $p_{ij} \neq 0$, 由假设(7), $f_{ij}^{(k)}(q_i) = 0, k \geq 2$. 对于顶点 i , 因为具有 \bullet 或 \oplus 所以 $\dot{y}_i = 0$, 又 $p_{ii} < 0$, 则 $w_i = 0$, 如果 $p_{ii} = 0$, 则由(7), $f_{ii}^{(k)}(q_i) = 0, k \geq 2$. 综上所述, 最后(4)式变为 $0 = p_{ij}w_j$, 所以 $w_j = 0$, 即在顶点 j 上可放 \bullet , 约化规则i)证毕. ii), iii)可同样证得。

§6 稳定性的一般判别准则 有了以上准备, 我们可以平行地将[4]中的结果移到系统(1)上来。例如我们可以有如下的定理:

基本定理 假设(7)成立, 且(1)在点 q 是稳定容许的, 则反复经过约化规则后最终可以得到(1)的图在每个顶点上都具有 \bullet , 则正平衡点 q 是渐近稳定的。

定理3 假设(7)成立, (1)是稳定容许的, (1)的图最多只有一个度数为1的顶点, 即最多有一个自由端点, 则正平衡点 q 是渐近稳定的。

最后我们作一个一般的注记: [4]中的两个主要思想是 $P = (p_{ij})$ 的稳定容许性及约化规则, 即黑点在图中的传播。在假设(7)下, (1)的稳定容许性差不多完全与 (p_{ij}) 的稳定容许性一样, 除了前者是在 $w = 0$ 的某一邻域上, 而后者则在整个 w 的空间这一点外。约化规则是完全一样的。因此, [4]中关于稳定性的定理可以适用于本文讨论的系统。不过, [4]中讨论全局渐近稳定性。而这里只讨论局部渐近稳定性。根据这个注记, 关于系统(1)的更多的定理及其证明, 可以参看[4]。

参 考 文 献

- 1 Goel N.S., Maitra S.C., Montroll E. W., *Rev. Modern Phys.*, 43(1971), 231-276.
- 2 Goh B. S., *Amer. Naturalist*, III, 911(1977), 135-143.
- 3 Leung A., *Math. Biosci.*, 29(1976), 85-98.
- 4 Redheffer R., Zhou Z. (周之铭), *Nonlinear Analysis*, 5(1981), 12, 1309-1329.
- 5 Redheffer R., Zhou Z. (周之铭), *SIAM. J. Alg. Disc. Meth.*, 3(1982), 1, 122-134.
- 6 Cunningham W.J., *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.*, 40(1954), 709; *Bull. Math. Biophys.*, 17(1955), 101.
- 7 Hutchinson G. E., *Ecology*, 28(1947), 319-321.
- 8 Lin J., Kahn P.B., *J. Math. Biology*, 5(1978), 257-268.
- 9 Harary F. (中译本), 图论, 上海科技出版社, 1980.

Stability for Generalized Volterra Systems

Zhou Zhiming

Abstract

We consider the systems of differential equations

$$\dot{x}_i = x_i \left(e_i + \sum_{j=1}^n f_{ij}(x_j) \right) \quad i=1,2,\dots,n \quad (1)$$

as a model for n -species generalized Volterra systems, where e_i are real constants, $f_{ij}(0) = 0, \forall i, j$. In the present paper, we investigate stability problems for the positive critical point (q_1, q_2, \dots, q_n) of (1). Special attention is paid to the prey-predator systems characterized by:

$$f'_{ii}(q_i) \leq 0, \quad f'_{ii}(q_i) f'_{ij}(q_i) < 0 \quad \text{Whenever } (i-j) f'_{ij}(q_i) \neq 0.$$

Using graph theory and LaSalle's theorem, we establish sufficient conditions for asymptotic stability of the positive critical point of (1).