非线性算子方程近似可解性的若干结果

陈仲英

（计算机科学系）

摘　要

本文讨论了 Banach 空间中单调类算子方程的投影近似可解性，给出了复单调算子方程近似可解的基本条件，导出了两类算子方程近似可解的充分必要条件，并研究了组合算子方程的近似可解性．这些结果改进了前人的相应结果．

假设 X 是可分且自反的 Banach 空间，X^* 为其共轭空间．$T:X\to X^*$ 是非线性算子．我们讨论算子方程

$$Tu=f \qquad (f\in X^*) \tag{1}$$

的投影法近似可解性．

假设：$\{X_n\}$为X的有限维子空间序列，$X_n\subset X_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，$\overline{\bigcup_n X_n}=X$；$\{P_n\}$为定义在 X 上的线性投影序列，$P_nX=X_n$，$P_nP_j=P_j$ 当 $n\geqslant j$，有常数 $c>0$ 使对所有 n 有$\|P_n\|\leqslant c$；$P_n^*:X^*\to X^*$是 P_n（看作由 X 到 X 中的映射）的共轭映射；$Y_n=P_n^*X^*\subset X_n^*$．

令　$T_n=P_n^*T|_{X_n}$，我们以

$$T_nu_n=P_n^*f \qquad (u_n\in X_n) \tag{2}$$

作为（1）的近似方程．

上述近似求解的计算格式称为投影逼近格式，记作 $\Gamma=\{X_n,\ P_n;\ Y_n,\ P_n^*\}$．

问题是：

(i) 近似方程（2）是否有（唯一）解?

(ii) 如果（2）有解 u_n，$\{u_n\}$是否具有某种收敛性?

(iii) 如果$\{u_n\}$具有某种收敛性，其极限是否是精确方程（1）的（唯一）解?

对上述问题的肯定回答，就是我们所说的近似可解性．现给出下面的

定义 1　方程（1）称为关于格式 Γ 唯一强近似可解的，如果存在一个$N\geqslant1$，使对每个 $n\geqslant N$，方程（2）有唯一解 $u_n\in X_n$，并且 $u_n\to u_0$，u_0 是方程（1）的唯一解；方程(1)

本文1982年12月收到．　本工作在陈铭俊副教授指导下完成

称为关于格式 Γ 近似可解的，如果存在一个 $N\geqslant 1$，使对每个 $n\geqslant N$，方程(2)有解 $u_n\in X_n$，并且当 $n\to\infty$ 时 $\operatorname{dist}(u_n, U_0)\to 0$，其中 $U_0(\neq\phi)$ 是方程(1)的解集。

本文中"$\to$"表示强收敛，"$\rightharpoonup$"表示弱收敛。

定义 2　设 X 和 Y 为 Banach 空间，T 为 X 到 Y 的映射。T 称为全连续的，如果 $x_n\rightharpoonup x\Rightarrow Tx_n\to Tx$；$T$ 称为 D-半连续的，如果 $x_n\to x\Rightarrow Tx_n\rightharpoonup Tx$；$T$ 称为 H-半连续的，如果 $x,\ y\in X, t_n>0, t_n\to 0\Rightarrow T(x+t_ny)\rightharpoonup Tx$ 当 $n\to\infty$；T 称为模糊连续的(vaguely continuous)，如果 $x,\ y\in X\Rightarrow$ 存在数列 $\{t_n\}$，$t_n>0$，$t_n\to 0$ 使得 $T(x+t_ny)\rightharpoonup Tx$ 当 $n\to\infty$；T 称为有限连续的(finitely continuous)，如果在 X 的有限维子空间中 $x_n\to x\Rightarrow$ 在 Y 中 $Tx_n\rightharpoonup Tx$。T 称为局部有界的，如果 $x_n\to x\in X\Rightarrow\{Tx_n\}$ 有界。

定义 3　设 X 为 Banach 空间，X^* 为其共轭空间，T 为 X 到 X^* 的映射。T 称为单调的，如果

$$\operatorname{Re}(Tx-Ty,\ x-y)\geqslant 0,\qquad \forall x,y\in X.$$

T 称为强单调的，如果存在由 $R^+=[0,+\infty)$ 到 R^+ 的连续严格上升的函数 $\alpha(r)$，$\alpha(0)=0$，$\lim\limits_{r\to\infty}\alpha(r)=+\infty$，使得

$$\operatorname{Re}(Tx-Ty,\ x-y)\geqslant\alpha(\|x-y\|)\|x-y\|,\qquad \forall x,y\in X.$$

T 称为复单调的，如果存在如上性质的函数 $\alpha(r)$，使得

$$|(Tx-Ty,\ x-y)|\geqslant\alpha(\|x-y\|)\|x-y\|,\qquad \forall x,y\in X.$$

近二十年来，许多作者对单调类非线性算子方程的近似可解性问题进行了一系列的研究[4-6,8-13]，本文的目的是推广和改进其中的一些基本结果，同时引出一些新的结论。

先将[6]中的一个基本结果推广到 Banach 空间和如定义 3 的较广泛的复单调意义的情形。

定理 1　设 X 为可分的自反的Banach 空间，X^* 为其共轭空间。$T:X\to X^*$ 为 D-半连续、复单调的映射。那么对任意 $f\in X^*$，方程(1)关于格式 Γ 唯一强近似可解。

证明　首先，T_n 在 X_n 上连续。事实上，如果 $x_m\to x$ 于 X_n，则由 T 的 D-半连续性，$\forall h\in X$，

$$(T_nx_m,\ h)=(Tx_m,\ P_nh)\rightharpoonup(Tx,\ P_nh)=(T_nx,\ h),\quad 当\ m\to\infty.$$

故 T_n 为 D-半连续。由于有限维空间上 D-半连续性与连续性等价，故 T_n 为连续映射。

其次，由 T 的复单调性可知，对 $x,\ y\in X_n$ 有

$$\alpha(\|x-y\|)\|x-y\|\leqslant|(Tx-Ty,\ x-y)|=|(T_nx-T_ny,\ x-y)|,$$

故

$$\alpha(\|x-y\|)\leqslant\|T_nx-T_ny\|,\qquad \forall x,y\in X_n. \tag{3}$$

由(3)式和 T_n 的连续性可知 T_n 是 X_n 到 Y_n 中的拓扑映射。据 Brouwer 区域不变性定理，值域 $R(T_n)$ 是 Y_n 中的一个开集。另方面又可推知 $R(T_n)$ 是 Y_n 中的闭集。事实上，如果 $\{y_m\}\subset R(T_n)$ 且在 Y_n 中 $y_m\to y$，那么存在 $\{x_m\}\subset X_n$ 使 $y_m=T_nx_m$。由(3)式有 $\alpha(\|x_l-x_k\|)\leqslant\|y_l-y_k\|$。于是由 $\{y_m\}$ 的收敛性及 $\alpha(r)$ 的性质知 $\{x_m\}$ 为收敛序列。于是存在 $x\in X_n$ 使 $x_m\to x$。由 T_n 的连续性知 $T_nx_m\to T_nx=y\in R(T_n)$。所以 $R(T_n)$ 在 Y_n 中闭。因此 $R(T_n)$ 是 Y_n 中既开且闭的非空子集，故必 $R(T_n)=Y_n$。这样，对任 $f\in X^*$，方

程(2)有唯一解。

由(3)有

$$\alpha(\|u_n\|)\leqslant\|T_nu_n-T_n(0)\|=\|\overset{*}{P_n}f-\overset{*}{P_n}T(0)\|\leqslant c(\|f\|+\|T(0)\|).$$

因此$\{u_n\}$为有界序列。

我们指出，方程(1)若有解必唯一。事实上，如果$Tu=Tv$，由T的复单调性即有

$$\alpha(\|u-v\|)\|u-v\|\leqslant 0.$$

因此$u=v$。这样，为了证明(1)有解且$\{u_n\}$强收敛于该解，只须证明$\{u_n\}$的任一子列$\{u_m\}$恒可抽出强收敛的子列，且其强极限为(1)的解。因为X是自反的Banach空间，$\{u_m\}$有界，故必有子列(仍记为$\{u_m\}$)使得$u_m\rightharpoonup u_0\in X$。我们来证明$u_m\to u_0$且$Tu_0=f$。

设j为任意给定的正整数，$m\geqslant j$。由T的复单调性和Γ的性质知

$$\begin{aligned}\alpha(\|u_m-P_ju_0\|)\|u_m-P_ju_0\|&\leqslant|(Tu_m-TP_ju_0,\ u_m-P_ju_0)|\\&=|(f-TP_ju_0,\ u_m-P_ju_0)|.\end{aligned}$$

设$g(r)$为$\alpha(r)r$的反函数。显然，$g(r)$为R^+到R^+的连续严格上升函数，$g(0)=0$，$\lim\limits_{r\to\infty}g(r)=+\infty$。于是，

$$\|u_m-u_0\|\leqslant g(|(f-TP_ju_0,\ u_m-P_ju_0)|)+\|P_ju_0-u_0\|.$$

由Γ的性质和T的D-半连续性知当$j\to\infty$时，$P_ju_0\to u_0$，$TP_ju_0\rightharpoonup Tu_0$。又因为当$m\to\infty$时$u_m\rightharpoonup u_0$，$g(r)$为连续函数，$g(0)=0$，故有

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{m\to\infty}}\|u_m-u_0\|&\leqslant\overline{\lim_{j\to\infty}}\ \overline{\lim_{m\to\infty}}\{g(|(f-TP_ju_0,\ u_m-P_ju_0)|)+\|P_ju_0-u_0\|\}\\&=\overline{\lim_{j\to\infty}}g(|(f-TP_ju_0,\ u_0-P_ju_0)|)=g(0)=0.\end{aligned}$$

因此，当$m\to\infty$时$u_m\to u_0$。由T的D-半连续性，$Tu_m\rightharpoonup Tu_0$。于是对任意$v\in X$，

$$(Tu_0-f,\ v)=\lim_{m\to\infty}(Tu_m-f,\ P_mv)=\lim_{m\to\infty}(T_mu_m-P_m^*f,\ v)=0.$$

所以$Tu_0=f$。证毕。

下面我们导出两类非线性算子方程唯一强近似可解的充分必要条件。

定理2　设X为可分的自反的Banach空间，X^*为其共轭空间，$T:X\to X^*$为复单调、局部有界的映射。那么对任意$f\in X^*$方程(1)唯一强近似可解的充分必要条件是T为D-半连续映射或有限连续映射。

证明　(必要性)　设$\{x_n\}\subset X$，$x_n\to x$ $(n\to\infty)$。由T的局部有界性知$\{Tx_n\}$有界。又因X^*为自反Banach空间，故$\{Tx_n\}$有弱收敛子列。设$\{Tx_{n_j}\}$为其任一弱收敛子列，$Tx_{n_j}\rightharpoonup h$。因为方程(1)对任意$f\in X^*$可解，故有$\tilde{x}\in X$使得$T\tilde{x}=h$。由$T$的复单调性有

$$\alpha(\|x_{n_j}-\tilde{x}\|)\|x_{n_j}-\tilde{x}\|\leqslant|(Tx_{n_j}-T\tilde{x},\ x_{n_j}-\tilde{x})|.$$

令$n_j\to\infty$，得到

$$\alpha(\|x-\tilde{x}\|)\|x-\tilde{x}\|\leqslant 0.$$

因此$x=\tilde{x}$，$Tx_{n_j}\rightharpoonup Tx$。由于有界序列$\{Tx_n\}$的任一弱收敛子列都弱收敛于$Tx$，故必

有 $Tx_n \to Tx$。因此 T 是 D-半连续的，当然也是有限连续的。

（充分性） 设 T 为复单调、局部有界且有限连续。由〔3〕的定理8可知 T 将 X 映为 X^*。由必要性的证明可知 T 是 D-半连续的。于是由定理1即知方程(1)唯一强近似可解。证毕。

引理1 设 X 为 Banach 空间，X^* 为其共轭空间，$T:X\to X^*$ 为单调映射，那么 T 是局部有界的[7]。

定理3 设 X 为可分的自反的 Banach 空间，X^* 为其共轭空间，$T:X\to X^*$ 为强单调映射。那么对任意 $f\in X^*$ 方程(1)唯一强近似可解的充分必要条件是 T 为 H-半连续或模糊连续映射。

证明 （充分性） 设 T 为强单调、H-半连续或模糊连续的。据引理1，T 是局部有界的。又据〔1〕的定理3，T 为 D-半连续。于是由定理1得到方程(1)的唯一强近似可解性。

（必要性）、由于强单调性蕴含复单调性和局部有界性，故由定理2知 T 是 D-半连续的，从而也是 H-半连续或模糊连续的。证毕。

将定理3用于线性情形时，不必对算子 T 作任何明显的连续性或有界性的假设。

推论1 设 X 为可分的自反的 Banach 空间，线性算子 $T:X\to X^*$ 是正定的，即有常数 $\alpha>0$ 使得

$$\mathrm{Re}(Tx,\ x)\geqslant\alpha\|x\|^2,\qquad \forall x\in X.$$

那么对任意 $f\in X^*$，方程(1)关于投影逼近格式 Γ 唯一强近似可解。

我们看到，推论1包含了 Lax-Milgram 定理，它意味着 Lax-Milgram 定理中的双线性泛函 $a(u,\ v)=(Tu,\ v)$ 的连续性或有界性假设可以减弱。事实上，它由于 T 的单调和线性而自然地得到满足。

上述基本结果为我们提供了一条证明算子的不动点的存在唯一性及寻找它们的途径。

推论2 设 H 为可分的 Hilbert 空间，算子 $T:H\to H$ 半有界：

$$\mathrm{Re}(Tx-Ty,\ x-y)\leqslant\alpha\|x-y\|^2,\qquad \forall x,y\in H,$$

且其中 $\alpha<1$，那么 T 在 H 中有唯一不动点且可用投影逼近格式 Γ 近似求解的充分必要条件是 T 为 H-半连续映射。

作为推论2的特殊情形，有

推论3 设 H 为可分的 Hilbert 空间，$T:H\to H$ 为反单调算子，即满足

$$\mathrm{Re}(Tx-Ty,\ x-y)\leqslant 0,\qquad \forall x,y\in H.$$

那么 T 在 H 中有唯一不动点并且可用投影逼近格式 Γ 近似求解的充分必要条件是 T 为 H-半连续映射。

显然，推论2还以压缩映射原理为其特例。对于非膨胀算子和 Lip. 算子也可导出相应的不动点存在唯一和近似可解的条件。我们把其归结为一个关于伸长度和旋转度的简明的条件。

定义4 设 H 为Hilbert 空间，算子 $T:H\to H$。定义数

$$l_T = \sup_{x,y\in H,\ x\neq y} \frac{\|Tx-Ty\|}{\|x-y\|}$$

为 T 的最大伸长度；数

$$\theta_T = \sup_{x,y\in H,\ x\neq y, Tx\neq Ty} \frac{\mathrm{Re}(Tx-Ty, x-y)}{\|Tx-Ty\| \cdot \|x-y\|}$$

为 T 的最大旋转度。

注 1　T 是强压缩算子，当且仅当 $l_T<1$；T 是非膨胀算子，当且仅当 $l_T\leqslant 1$；T 是 Lip。算子，当且仅当 $l_T<+\infty$；T 是单调算子，当且仅当 $\theta_T\geqslant 0$；T 是反单调算子，当且仅当 $\theta_T\leqslant 0$；T 是强单调算子，当且仅当 $l_T\theta_T>0$。

推论 4　设 H 为可分的 Hilbert 空间，算子 $T:H\to H$ 的最大伸长度与最大旋转度的乘积 $l_T\theta_T<1$，则 T 在 H 中有唯一的不动点并且可用投影逼近格式 Γ 近似求解。

注 2　当 $l_T<1$ 时，有 $l_T\theta_T<1$，此时得到压缩映射原理。当 $l_T\leqslant 1$ 时，如果 $\theta_T<1$ 则 $l_T\theta_T<1$，因此 $\theta_T<1$ 是非膨胀映射的不动点存在唯一且近似可解的条件。

下面讨论 Banach 空间中的组合算子方程的近似可解性问题。

引理 2　设 F 是有限维的 $(1<\dim F<+\infty)$ 复 Banach 空间，F^* 为其共轭空间，$T:F\to F^*$ 是连续映射，并且对一个给定的 $R>0$ 有

$$(Tx,\ x)\neq 0, \qquad \forall x\in F,\ \|x\|=R.$$

那么存在 $u\in F$，$\|u\|<R$，使得 $Tu=0$[2]。

定理 4　设 X 是维数>1 的可分的自反的复 Banach 空间，X^* 为其共轭空间，$T: X\to X^*$ 是 D-半连续映射，并且满足下列两个条件：

(i) 存在 $R>0$ 使得

$$(Tx-f,\ x)\neq 0, \qquad \forall x\in X,\ \|x\|=R,$$

(ii) 对每个 $N>0$，存在 R^+ 上的严格上升连续实值函数 $K_N(r)$，$K_N(0)=0$，以及 X 到 X^* 的全连续映射 C_N，使得

$$|(Tx-Ty,\ x-y)|\geqslant K_N(\|x-y\|)\|x-y\|-|(C_Nx-C_Ny,\ x-y)|$$
$$\forall x,y\in X,\ \|x\|,\|y\|\leqslant N.$$

那么方程(1)关于格式 Γ 近似可解。

证明　不妨设 $\dim(X_n)>1$。由 T 的 D-半连续性和有限维空间上 D-半连续与连续的等价性可知 T_n 为 X_n 到 X_n^*的连续映射．于是 $\tilde{T}_n:X_n\to X_n^*(\tilde{T}_nx\equiv T_nx-P_n^*f)$ 也为连续映射。由(i)知对 $x\in X_n$，$\|x\|=R>0$ 有

$$(\tilde{T}_nx,\ x)=(T_nx-P_n^*f,\ x)=(Tx-f,\ x)\neq 0.$$

由引理 2 即知存在 $u_n\in X_n$，$\|u_n\|<R$，使 $T_nu_n=P_n^*f$。

因为 X 为自反的 Banach 空间，$\{u_n\}$ 有界，故必有子列(记为 $\{u_m\}$)使得 $u_m\rightharpoonup u_0\in X$。我们来证明 $u_m\to u_0$ 且 $Tu_0=f$。

由模的弱下半连续性知 $\|u_0\|\leqslant R$。取 $N=\max\{R,\ cR\}$，则 $\|u_m\|$，$\|P_ju_0\|\leqslant N$。由(ii)得到

$$K_N(\|u_m-P_ju_0\|)\|u_m-P_ju_0\|$$

$$\leqslant|(f-TP_ju_0,\ u_m-P_ju_0)|+|(C_Nu_m-C_NP_ju_0,\ u_m-P_ju_0)|,\ (m\geqslant j>0).$$

设 $g_N(r)$ 为 $K_N(r)r$ 的反函数。显然 $g_N(r)$ 为 R^+ 到 R^+ 的连续严格上升函数，$g_N(0)=0$。于是，

$$\|u_m-u_0\|$$
$$\leqslant g_N(|(f-TP_ju_0,u_m-P_ju_0)|+|(C_Nu_m-C_NP_ju_0,u_m-P_ju_0)|)+\|P_ju_0-u_0\|.$$

由 T 的 D-半连续性和 C_N 的全连续性就有

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\|u_m-u_0\|$$
$$\leqslant\overline{\lim_{j\to\infty}}\ \overline{\lim_{m\to\infty}}\{g_N(|(f-TP_ju_0,u_m-P_ju_0)|+|(C_Nu_m-C_NP_ju_0,u_m-P_ju_0)|)$$
$$+\|P_ju_0-u_0\|\}$$
$$=\lim_{j\to\infty}g_N(|(f-TP_ju_0,u_0-P_ju_0)|+|(C_Nu_0-C_NP_ju_0,u_0-P_ju_0)|)=g_N(0)=0.$$

所以 $u_m\to u_0(m\to\infty)$。对任意 $v\epsilon X$，注意到 T 的 D-半连续性和 $T_mu_m=P_m^*f$，就有

$$(Tu_0-f,v)=\lim_{m\to\infty}(Tu_m-f,P_mv)=\lim_{m\to\infty}(P_m^*Tu_m-P_m^*f,v)=0.$$

所以 $Tu_0=f$。

由上可知，方程(1)的解集 $U_0\neq\phi$，且因 $\{u_n\}$ 的任一无穷子列均可选取子列强收敛于方程(1)的解，故必有 $\mathrm{dist}(u_n,\ U_0)\to0$ 当 $n\to\infty$。所以方程(1)关于格式 Γ 近似可解。证毕。

定理 5　设 X 是维数 >1 的可分的自反的复 Banach 空间，X^* 为其共轭空间，$T:X\to X^*$ 是 D-半连续映射，并且满足下列两个条件：

(i) T 是强制的，即存在 R^+ 到 R 中的实值函数 $c(r)$，$\lim\limits_{r\to+\infty}c(r)=+\infty$，使得

$$|(Tx,x)|\geqslant c(\|x\|)\|x\|,\qquad\forall x\epsilon X.$$

(ii) $T=S+C$，C 为全连续映射，对每个 $N>0$，存在 R^+ 上的连续严格上升实值函数 $K_N(r)$，$K_N(0)=0$，使得

$$|(Sx-Sy,x-y)|\geqslant K_N(\|x-y\|)\|x-y\|,\qquad\forall x,\ y\epsilon X,\ \|x\|,\|y\|\leqslant N.$$

那么对于任意的 $f\epsilon X^*$，方程(1)关于格式 Γ 近似可解。

证明　由 (i)，

$$|(Tx-f,x)|\geqslant(c(\|x\|)-\|f\|)\|x\|,\qquad\forall x\epsilon X,$$

因为 $\lim\limits_{r\to+\infty}c(r)=+\infty$，故对任意给定的 $f\epsilon X^*$，存在 $R>0$ 使得

$$|(Tx-f,x)|\geqslant(c(R)-\|f\|)R>0,\qquad\forall x\epsilon X,\ \|x\|=R.$$

由 (ii)，

$$|(Tx-Ty,x-y)|\geqslant K_N(\|x-y\|)\|x-y\|-|(Cx-Cy,x-y)|,$$
$$\forall x,\ y\epsilon X,\ \|x\|,\|y\|\leqslant N.$$

于是由定理 4 即得结论。证毕。

注 3　定理 1 可以看作定理 5 当 $C=0$ 时的特殊情形，只须注意 T 的复单调性蕴含 T 的强制性。

定义 5 设 X、Y 为 Banach 空间，算子 $T:X\to Y$ 称为准有界的，如果

$$|T|\equiv\inf_{0<r<+\infty}\left\{\sup_{\|x\|>r}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right\}<+\infty.$$

$|T|$ 称为 T 的准模。

定理 6 设 X 为维数>1 的可分的自反的复 Banach 空间，X^* 为其共轭空间。算子 $T=S+C:X\to X^*$ 满足如下条件：

(i) S 为 D-半连续且复单调：

$$|(Sx-Sy,\ x-y)|\geqslant\alpha\|x-y\|^P,\quad(\alpha>0,\ P\geqslant2)\quad\forall x,\ y\in X,$$

(ii) C 为全连续且准有界，当 $P=2$ 时准模 $|C|<\alpha$。

那么对任意 $f\in X^*$，方程(1)关于格式 Γ 近似可解。

证明 据定理5，只须验证 T 的强制性。由 S 的复单调性，

$$|(Sx,\ x)|\geqslant\alpha\|x\|^P-\|S(0)\|\cdot\|x\|,\qquad\forall x\in X.$$

因为 C 是准有界的，由定义，对 $\varepsilon>0$(当 $P=2$ 时还要求 $\varepsilon<\alpha-|C|$)，存在 $r\geqslant0$使得

$$\sup_{\|x\|>r}\frac{\|Cx\|}{\|x\|}\leqslant|C|+\varepsilon.$$

于是当$\|x\|\geqslant r$ 时，

$$\frac{|(Tx,x)|}{\|x\|}\geqslant\frac{|(Sx,\ x)|}{\|x\|}-\frac{|(Cx,\ x)|}{\|x\|}\geqslant\alpha\|x\|^{P-1}-\|S(0)\|-|Cx\|$$

$$\geqslant(\alpha\|x\|^{P-2}-|C|-\varepsilon)\|x\|-\|S(0)\|\to+\infty,\text{ 当}\|x\|\to+\infty.$$

因此 T 是强制的。证毕。

运用上述定理容易导出 Hilbert 空间中几类算子组合的不动点的存在性和近似可解性的条件。下面我们总设 $\dim H>1$。

推论 5 设 H 为可分的 Hilbert 空间，算子 $T=S+C:H\to H$ 满足：

(i) S 为 H-半连续且半有界：

$$\mathrm{Re}(Sx-Sy,\ x-y)\leqslant\alpha\|x-y\|^2,\qquad\alpha<1,\qquad\forall x,y\in H.$$

(ii) C 为全连续且准有界，其准模 $|C|<1-\alpha$。

那么算子组合 $T=S+C$ 的不动点集 $U_0\neq\phi$，不动点方程 $u=Tu$ 关于格式 Γ 近似可解。

推论 6 设 H 为可分的 Hilbert 空间，算子 $T=S+C:H\to H$ 满足：

(i) S 为 H-半连续且反单调；

(ii) C 为全连续且准有界，其准模 $|C|<1$。

那么算子组合 $T=S+C$ 的不动点集 $U_0\neq\phi$，不动点方程 $u=Tu$ 关于格式 Γ 近似可解。

推论 7 设 H 为可分的 Hilbert 空间，算子 $T=S+C:H\to H$ 满足

(i) 算子 S 的最大伸长度与最大旋转度的乘积 $l_S\theta_S<1$；

(ii) C 为全连续且准有界，其准模 $|C|<1-l_S\theta_S$。

那么算子组合 $T=S+C$ 的不动点集 $U_0\neq\phi$，不动点方程 $u=Tu$ 关于格式 Γ 近似可解。

定义 6 设 X、Y 为 Banach 空间。$T:X\to Y$ 称为渐近线性的，如果存在有界线性

算子 $T_\infty: X \to Y$ 使

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{\|Tx - T_\infty x\|}{\|x\|} = 0.$$

T_∞ 称为 T 的渐近导数。

推论8　定理7和推论5、6、7中的算子 C 的准有界性假设换成渐近线性的假设，准模换成渐近导数的模 $\|C_\infty\|$，结论仍然成立。

证明　因为渐近线性算子是准有界的，并且 $|C| = \|C_\infty\|$（见〔13〕），故得结论。证毕。

下面我们举例说明上述算子方程近似可解性的结果在偏微分方程数值解中的应用。

考虑偏微分方程边值问题：

$$Au(x) \equiv \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, u(x), Du(x), \cdots, D^m u(x)) = f(x) \in L^q(\Omega), \quad x \in \Omega.$$

$$D^\alpha u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad |\alpha| \leqslant m-1, \tag{4}$$

其中，$\Omega \subset R^n$ 为有界区域，其边界 $\partial\Omega$ 适当光滑。$A_\alpha(x, \xi)$ 是 $x \in \Omega$ 和 $\xi = (\eta, \zeta) = \{\xi_\alpha: |\alpha| \leqslant m\} \in R^N$ 的函数，$\eta = \{\eta_\beta: |\beta| \leqslant m-1\} \in R^{N_1}$，$\zeta = \{\zeta_\gamma: |\gamma| = m\} \in R^{N_2}$。$q > 1$。对 $u \in W_P^m(\Omega)$，$\xi(u) = \{D^\alpha u: |\alpha| \leqslant m\}$，$\eta(u) = \{D^\beta u: |\beta| \leqslant m-1\}$，$\zeta(u) = \{D^\gamma u: |\gamma| = m\}$。

假设：(a) $A_\alpha(x, \xi)$ 满足 Caratheodory 条件，即固定 $\xi = (\eta, \zeta) \in R^N = R^{N_1 + N_2}$，$A_\alpha(x, \xi)$ 对 x 可测；固定 $x \in \Omega$，$A_\alpha(x, \xi)$ 对 ξ 连续。

(b) 对 $P = \dfrac{q}{q-1} > 1$，存在常数 $c_1 > 0$ 使得

$$\Big|\sum_{|\alpha| = m} [A_\alpha(x, \xi) - A_\alpha(x, \xi')] \zeta''_\alpha\Big| \leqslant c_1 |\xi - \xi'|^{P-1} |\zeta''|, \quad \forall x \in \Omega, \quad \xi, \xi' \in R^N, \quad \zeta'' \in R^{N_2}.$$

(c) 存在常数 $c_2 > 0$ 使得

$$|A_\alpha(x, \xi)| \leqslant c_2(|\xi|^{P-1} + 1), \quad \forall |\alpha| \leqslant m-1, \quad x \in \Omega, \quad \xi \in R^N.$$

(d) 存在常数 $c_3 > 0$ 使得

$$\sum_{|\alpha| = m} [A_\alpha(x, \xi) - A_\alpha(x, \xi')](\zeta_\alpha - \zeta_\alpha') \geqslant c_3 |\zeta - \zeta'|^P, \quad \forall x \in \Omega, \quad \xi, \xi' \in R^N.$$

(e) 存在常数 $c_4 > 0$ 和函数 $h \in L^q(\Omega)$ 使得

$$\sum_{|\alpha| \le m} A_\alpha(x, \xi) \xi_\alpha \geqslant c_4 |\xi|^P - h(x)|\xi|, \quad \forall x \in \Omega, \quad \xi \in R^N.$$

令

$$a(u, v) = \sum_{|\alpha| = m} (A_\alpha(x, \xi(u)),\ D^\alpha v), \quad u, v \in W_P^m(\Omega),$$

$$b(u, v) = \sum_{|\alpha| \le m-1} (A_\alpha(x, \xi(u)),\ D^\alpha v), \quad u, v \in W_P^m(\Omega).$$

边值问题（4）的广义 Dirichlet 形式是：求 $u \in \mathring{W}_P^m(\Omega)$，使满足

$$a(u, v) + b(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in \mathring{W}_P^m(\Omega). \tag{5}$$

$a(u, v)$ 和 $b(u, v)$ 是 $X = \mathring{W}_P^m(\Omega)$ 上 v 的连续线性泛函，从而决定了唯一的映射 A，$B: X \to X^* (= W_q^{-m}(\Omega))$ 使得

$$a(u,\ v)=(Au,\ v) \qquad b(u,\ v)=(Bu,\ v)。$$

于是(5)等价于算子方程

$$Au+Bu=W_f, \tag{6}$$

其中 W_f 是 X^* 中唯一使 $(W_f,\ v)=(f,\ v)$ 对所有 $v\in X$ 成立的元素。相应于投影逼近格式 Γ 的近似方程为求 $u_n\in X_n$ 使

$$P_n{}^*Au_n+P_n{}^*Bu_n=P_n{}^*W_f, \tag{7}$$

或等价地

$$a(u_n,\ v_n)+b(u_n,\ v_n)=(f,v_n), \qquad \forall v_n\in X_n。 \tag{8}$$

由假设 (b)，

$$|(Au-Av,\ w)|=|\sum_{|\alpha|=m}(A_\alpha(x,\ \xi(u)-A_\alpha(x,\ \xi(v)),\ D^\alpha w)|$$

$$\leqslant c_1\|u-v\|_{m,p}^{p-1}\|w\|_{m,p} \quad \forall u,\ v,\ w\in \mathring{W}_p^m(\Omega)。$$

由此可知 A 是 D-半连续的。

由假设(c)和 $\mathring{W}_p^m$ 到 W_p^{m-1} 的嵌入映射的紧性可以证明 B 是全连续的[10]。

由假设 (d)，

$$(Au-Av,\ u-v)=\sum_{|\alpha|=m}(A_\alpha(x,\ \xi(u))-A_\alpha(x,\ \xi(v)),\ D^\alpha u-D^\alpha v)$$

$$\geqslant C_3|u-v|_{m,p}^p\geqslant C_3'\|u-v\|_{m,p}^p, \quad \forall u,v\in X。$$

所以 A 是强单调的。

由假设 (e)，

$$\frac{((A+B)u,u)}{\|u\|_{m,p}}=\frac{1}{\|u\|_{m,p}}\int_\Omega\sum_{|\alpha|\leqslant m}A_\alpha(x,\ \xi(u)(x))\xi_\alpha(u)(x)dx$$

$$\geqslant\frac{1}{\|u\|_{m,p}}\Big[C_4\int_\Omega|\xi(u)(x)|^p dx-\|h\|^{Lq}\|u\|_{m,p}\Big]$$

$$=C_4\|u\|_{m,p}^{p-1}-\|h\|^{Lq}\to+\infty, \quad 当\|u\|_{m,p}\to+\infty。$$

所以 $(A+B)$ 是强制的。

由定理5立即得到

定理7 假设 (a)～(e) 成立，那么边值问题(4)的广义 Dirichlet 形式(5)有解，其 Galerkin 方程(8)有解 u_n。设 U_0 为(5)的解集，则 dist $(u_n,\ U_0)\to 0\ (n\to\infty)$。

参 考 文 献

〔1〕 Browder, F. E., *Bull. Amer. Math. Soc.*, 70 (1964), 551—553.
〔2〕 Browder, F. E., *Illinois J. Math.*, 9 (1965). 608—616.
〔3〕 Browder, F. E., *Proc. Amer. Math. Soc. Symposia in Appl. Math.*, 17(1965), 24—49.
〔4〕 Browder, F. E., *Archive Rat. Mech. Anal.*, 26 (1967), 33—42.
〔5〕 Ciarlet, P. G., Schultz, M. H., Varga, R. S., *Numer. Math.*, 13(1969), 51—57.
〔6〕 Conjura, E., Petryshyn, W. V., *J. Math. Anal. Appl.*, 67(1978), 651—694.
〔7〕 Fitzpatrick, P. M., *Math. Ann.*, 204 (1973), 177—188.
〔8〕 Kransnosel'skii, M. A., et al., *Approximate Solution of Operator Equations*, 1972.
〔9〕 Petryshyn, W. V., *J. Math. Mech*, 17(1967), 353—372.
〔10〕 Petryshyn, W. V., *Bull. Amer. Math. Soc.*, 81 (1975), 223—312.
〔11〕 Varga, R. S., *Regional Conference Series in Applied Math.*, №.3, SIAM Philadelphia, 1971.
〔12〕 Р. Л. Качуровский, УИН, 23 (1968), 121—168.
〔13〕 雷晋干，武汉大学学报（自然科学版），1980, 1.

Some Results for the Approximation-Solvability of Nonlinear Operator Equations

Chen Zhongying

Abstract

In this paper we discuss the projectionally approximation-solvability of nonlinear operator equations of monotone type in Banach spaces. The corresponding former results are included in our results. Some conditions of the existence and approximation-solvability for the fixed points of several classes of operators are derived in Hilbert spaces.