渐缩渠道拟平面波的不稳定性

孙 明 光

（力学系）

摘　　要

本文讨论了渐缩渠道中的平面波受横向调制时所产生的不稳定性．理论分析、数值模拟及实验观察一致．

我们在实验中发现，与渠壁几乎垂直的拟平面波，会发生不稳定的现象，首先在波与渠壁相交处会隆起，然后这隆起的水面慢慢沿着波峰线传播，如图1所示。这与文〔1〕、〔2〕所研究的Mach 反射现象有点相似，但这里反射波不存在，只有茎波(stem)存在。本文用摄动法，导出这种波的演化方程，并进行数值上的模拟。

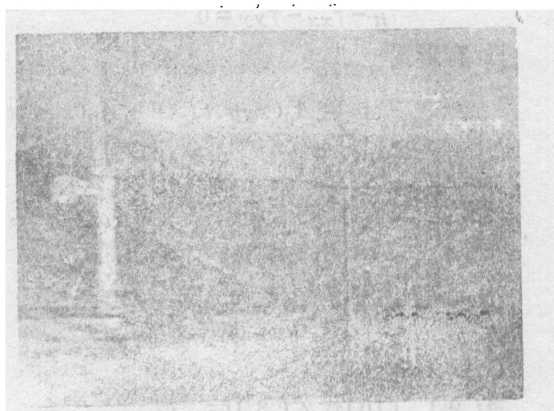

图　1

1.方程及边界条件

设有一缓慢收缩的渠道，如图2所示。

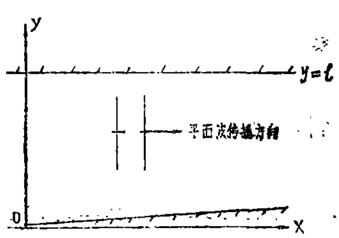

图　2

设水深h，xy平面与底面重合，z轴沿直向上。流体为理想不可压缩的，运动是无旋的。我们以下只考虑无量纲变量。$l(x,y)$及hz分别为水平和沿直坐标，$lt/\sqrt{gh}$为时间，$a\eta$为自由面抬高，$la\sqrt{\frac{g}{h}}\phi$为速度势，$a=\alpha h$为特征振幅，$l=h/\sqrt{\beta}$为特征波长，α,β为无量纲小参数。我们有方程及边界条件如下：

$$\beta\triangle\Phi+\Phi_{zz}=0,\ (0<z<1+\alpha\eta) \qquad (1)$$

本文1984年4月收到

$$\Phi z = 0,\ (z=0) \tag{2}$$

$$\eta_t + \alpha\nabla\phi\cdot\nabla\eta - \frac{1}{\beta}\Phi_z = 0,\ \ (z = 1+\alpha\eta) \tag{3}$$

$$\eta + \Phi_t + \frac{1}{2}\alpha|\nabla\Phi|^2 + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\Phi_z^2 = 0,\ (z = 1+\alpha\eta) \tag{4}$$

以上的∇及$\triangle = \nabla^2$只是水平面的梯度及拉卜拉斯算子(侧壁条件后面将讨论)。寻求如下形式的解

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty}(-\beta\triangle)^m f(x,y,t)z^{2m}/(2m)! \tag{5}$$

则由自由面条件可得：

$$\eta = -f_t - \frac{1}{2}\alpha(\nabla f)^2 + \frac{1}{2}\beta f_{ttt} + O(\alpha^2) \tag{6}$$

$$f_{tt} - \triangle f = -\alpha\left\{-\frac{1}{2}f_t^2 + |\nabla f|^2\right\}_t + \frac{1}{3}\beta f_{tttt} + O(\alpha^2) \tag{7}$$

考虑最低阶的$f(x,y,t)$，它满足方程

$$f_{tt} - f_{xx} - f_{yy} = 0 \tag{8}$$

设f有形式

$$f = \frac{1}{2}[A_0(x,y,t)e^{-it} + \bar{A}_0(x,y,t)e^{it}] \tag{9}$$

这里$\bar{A}_0$为A_0的共轭。

对于沿X轴传播的平面波，将有$A_0 = Ae^{ix}$，其中A为常数。现考虑一个拟平面波

$$A_0 = A(Y,T)e^{ix} \tag{10}$$

其中　$$Y = \varepsilon y,\ T = \frac{1}{2}\varepsilon^2 t \tag{11}$$

这里ε为小量。

将(9)、(10)代入(8)后，得

$$i\frac{\partial A}{\partial T} = -\frac{\partial^2 A}{\partial Y^2} + O(\varepsilon^2), \tag{12}$$

对于收缩渠道，设侧壁之一在充分远处$y = l$，不失一般性，设$Y = \varepsilon l = 1$，此侧壁假设与x轴平行，故有边条件$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0$，或

$$\frac{\partial A}{\partial Y} = 0,\ (Y=1) \tag{13}$$

其次，设另一壁是在$y = 0$附近，与x轴有一微小的倾斜，记为

$$y = \varepsilon b_{\pm}x \tag{14}$$

其中b_+(或b_-)分别表示一个正的(或负的)常数，取b_+时为渐缩渠道，取b_-为渐扩渠道。不失一般性，可取

$$b_{\pm} = \pm 1, \tag{15}$$

对于渐缩渠道，以下用摄动法证明拟平面波是不稳定的。注意到相应于(14)的边条件为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\varepsilon b_{+}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=+\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x},\tag{16}$$

或近似 $\dfrac{\partial A}{\partial Y}=+iA$，$(Y=0)$ (17)

上式把$y=\varepsilon x$近似为$y=0(Y=0)$，这对于x有限的范围内是可行的。

2.波的不稳定性

以下讨论方程(12)（略去高阶小量），附有边条件(13)及(17)的解，这种解还应满足给定的初始条件

$$A=\varphi(Y),\ (T=0)\tag{18}$$

可用差分法求解[8]，在求解之前，我们注意到"波能量"$\int_0^{+1}|A|^2dY$是随时间T增加而增大的，因为

$$\frac{\partial}{\partial T}\int_0^{+1}|A|^2dY=\int_0^{+1}\left(A\frac{\partial\bar{A}}{\partial T}dY+\bar{A}\frac{\partial A}{\partial T}dY\right)=-i\int_0^{+1}\left(A\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial Y^2}-\bar{A}\frac{\partial^2 A}{\partial Y^2}\right)dY$$

$$=-iA\frac{\partial\bar{A}}{\partial Y}+i\bar{A}\frac{\partial A}{\partial Y}\Big|_0^{+1}=2|A|^2\Big|_{Y=0}\geqslant 0\tag{19}$$

所以解是不稳定的，它随时间的增加而增大．同样可通过考虑特征值问题

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 A}{\partial Y^2}=-\lambda G,\\&\frac{\partial G}{\partial Y}=+iG,\quad(Y=0)\\&\frac{\partial G}{\partial Y}=0,\quad(Y=1)\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

求出特征值λ。显然λ的虚部如果是正的，则波动解是不稳定的，它随时间增加而指数式增大。通过具体计算不难求得λ，例如λ有一值是$+0.317+0.91i$，即虚部是正的，实部也是正的，因而波动为不稳定，而且波相速也增大了，由原来的1变为$1+0.317\varepsilon^2$。

以下的数值模拟也完全证明上述的结论。例如取初值

$$\varphi(Y)=0.03\lambda(-2i+2Y-Y^2),\ (T=0)$$

这里λ为一参数，具体取$\lambda=0.3$及1.5进行计算，结果如图3及4，显示了图1中所产生的不稳定现象。

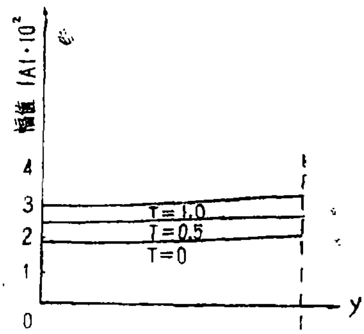

图 3

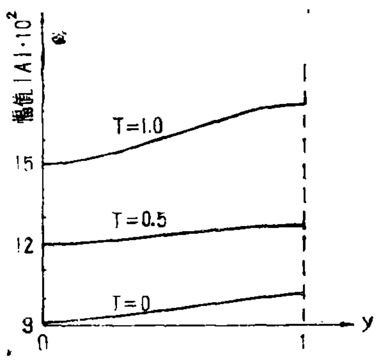

图 4

对于渐扩渠道，(17)式右边将改变符号，成为$\dfrac{\partial A}{\partial Y}=-iA(Y=0)$。取初值

$$\varphi(Y)=0.03\lambda(+2i+2Y-Y^2)$$

进行计算，结果如图5，它说明波动随时间增加而减小。这与渐缩渠道的结果刚好相反。

由此可得：由于渠道壁渐缩的作用，平面波受横向调制时，波振幅将随时间增加而增长，形成不稳定现象。对于渐扩渠道，则不会产生这种现象。这一点可用于解释浅水船波的演化*。

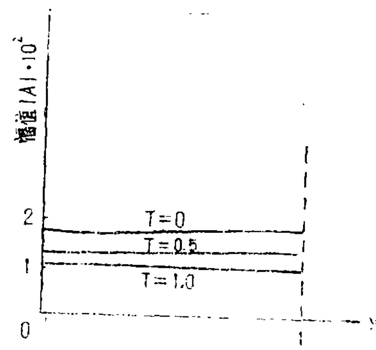

图　5

参 考 文 献

〔1〕J.Miles, *J.10f Fluid Mechanics*, 79(1977).

〔2〕Von Udo Berger, *Mach-reflection as a Diffraction Problem*.

〔3〕南京大学数学系计算数学专业编，偏微分方程数值解法，科学出版社，1979.

The Instability for a Quasi-plane Wave in a Slowly Converging Channel

Sun Mingguang

Abstract

The linear transverse instability for a quasi-plane wave in a slowly converging channel is discussed. The theoretical and numerical result are in agreement with the experimental observations.

* 孙明光，《物体在浅水渠道中运动时其波动的演化》，中山大学建校六十周年力学论文集，1984，11.