中 山 大 学 学 报
1986年第3期　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　№. 3，1986

·摘　要·

p-t 归约及sn-t-归约的一些性质

王　洁
（计算机科学系）

本文继文〔5〕后，继续讨论了有关 p-t-归约及 sn-t-归约的一些性质，有关相对化的计算复杂性理论的背景材料、基本定义和术语，均可在本文参考文献中找到，不失一般性，我们假定所讨论的语言（集合）及字均在字母表$\Gamma=\{0，1\}$的意义下。

对任$B\notin P$，令多项式时间可计算的归约子T_B:$\{0，1\}^*\to\{|\}^*$如下：

$T_B(\Lambda)=\Lambda$、

$T_B(x)=T_B(0^n)$、其中$|x|=n$且$x\neq 0^n$，$T_B(0^n)(n\geq 1)$的定义如下：

1．设 $T_B(\Lambda)$、$T_B(0)$，$T_B(00)$、…中最后一个在n步内停机的是 $T_B(0^m)$，其值为$|^j$。显然m，$j\leq n$。

2．令$D_n=\{x:x\leq m且|T_B(x)|=偶数\}$，$C_n=B\cap D_n$。

情形1　$j=2i$、令

$$T_B(0^n)=\begin{cases}|^{2i+1}，& 如果在n步内找到z使C_n(z)\neq P_i(z)，\\ |^{2i}，& 否则。\end{cases}$$

情形2　$j=2i+1$。

$$T_B(0^n)=\begin{cases}|^{2i+1}，& 如果在n步内找到z使B(z)\neq P_i^{C_n}(z)，\\ |^{2i+2}，& 否则。\end{cases}$$

令$C=\bigcup_{n\in\omega}C_n(\omega=\{0，1，2，\cdots\})$，则$C=B\cap\{x:|T_B(x)|=偶数\}$．Ladner[1]证明对这样的$C$、$B$满足：$C\leq_m^P B$且$B\not\leq_T^P C$，$C\notin P$。此即$C\lneq_T^P B$。

推论1　令$A_0=3SAT$、$A_{n+1}=A_n\cap\{x:|T_{A_n}(x)|=偶数\}$，如果$P\neq NP$，则有

1．$\cdots\lneq_T^P A_n\lneq_T^P\cdots\lneq_T^P A_1\lneq_T^P A_0$，

其中$A_{n+1}\subsetneq A_n$，$A_n\in NP-P$。令$A^*=\bigcap_{n\in\omega}A_n$，则

2．$P^{A_0}\supsetneq P^{A_1}\supsetneq\cdots\supsetneq P^{A^*}\supseteq P$。

性质2　对$n\geq 1$，$NPC\cap P^{A_n}=\phi$。其中$NPC=\{L:L在NP中p\text{-}t\text{-}完全\}$。

性质3　如果$NP=co-NP$，则$P^{A_1}\subsetneq NP-NPC$。

在$P\neq NP$及$NP=co-NP$的假设下，根据推论1及性质3，我们可以得到NP结构

本文1985年7月收到

的图形如图1：

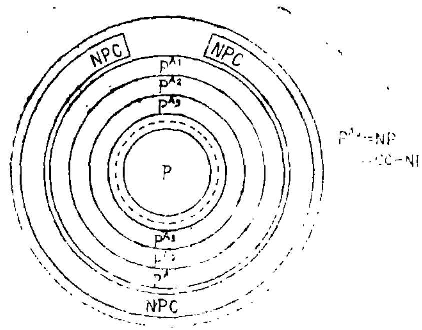

图　1

由此，我们问当$NP \neq NPC$时是否存在A使$P^A = NP - NPC$？或更弱一些，当$NP \neq NPC$时，$NP - NPC$是递归可表示的吗？（有关递归可表示的定义可见〔3〕）。

定义　定义半多项式分层${}^s\sum_k^p$及${}^s\Pi_k^p$ $(k \geqslant 0)$如下：

1．${}^s\sum_0^p = {}^s\Pi_0^p = P$；

2．对$A \subseteq \Gamma^+$，$A \in {}^s\sum_k^p$ $(k \geqslant 1)$ iff存在$k+1$元多项式谓词R使

$$x \in A \text{ iff} (\exists y_1)(\forall y_2)(\exists y_3)\cdots(Q_k y_k)[R(x, y_1, y_2, \cdots, y_k)],$$

其中当k为奇数时，Q_k为$\exists$，否则为$\forall$。类似地，$A \in {}^s\Pi_k^p$ $(k \geqslant 1)$ iff对所有x，

$$x \in A \text{ iff} (\forall y_1)(\exists y_2)(\forall y_3)\cdots(Q'_k y_k)[R(x, y_1, y_2, \cdots, y_k)],$$

其中当k为奇数时，Q'_k为$\forall$，否则为$\exists$。

定理4　$NP - NPC \subseteq {}^s\Pi_3^p$．

我们以下证明了EXP存在p-t-不可比较集。

定理5　存在集合A、$B \in DTIME(2n\log_2 n \cdot 2^n)$使得$A|_T^P B$。(其中$A|_T^P B$表示$A \not\leqslant_T^P B$且$B \not\leqslant_T^P A$)。

sn-t-归约（记为$\leqslant_T^{sn}$）的概念可见文〔4〕。

若$NP \neq co\text{-}NP$，则对任意$B \in NP\text{-}co\text{-}NP$，定义多项式时间归约子$T'_B$：$\{0, 1\}^* \to \{|\}^*$为：

$$T'_B(\Lambda) = \Lambda,$$

$$T'_B(x) = T'_B(0^n)，\text{其中} |x| = n \text{且} x \neq 0^n.$$

对输入$0^n(n\geqslant 1)$，T'_B的定义如下：

1．设$T'_B(A)$，$T'_B(0)$，$T'_B(00)$．…中最后一个在n步内停止的是$T'_B(0^m)$，其值为1^j，显然m，$j\leqslant n$。

2．令$D'_n=\{x:x\leqslant m$且$|T'_B(x)|=$偶数$\}$，$C'_n=B\cap D'_n$，令$\{Q_i\}_{i\in\omega}$为co-NP的能行枚举。

情形1 $j=2i$，令

$$T'_B(0^n)=\begin{cases}1^{2i+1}, & \text{如果在}n\text{步内找到}z\text{使}C'_n(z)\neq Q_i(z),\\ 1^{2i}, & \text{否则。}\end{cases}$$

情形2 $j=2i+1$，令

$$T'_B(0^n)=\begin{cases}1^{2i+2}, & \text{如果在}n\text{步内能验证}B\leqslant_T^{sn}C'_n\ via\ NP_i^{C'_n}.\\ 1^{2i+1}, & \text{否则。}\end{cases}$$

令$C'=\cap_{n\in\omega}C'_n$，则$C'=B\cap\{x:|T'_B(x)|=$偶数$\}$。Long[4]证明$C'\in NP$-co-NP且$C'\leqslant_T^{sn}B$。

推论6 如果$NP\neq co-NP$，则令$A'_0=SAT$，$A'_{n+1}=A'_n\cap\{x:|T'_{A_n}(x)|=$偶数$\}$，则$A'_0\in NP$-$co$-$NP$，且

1．$\cdots\leqslant_T^{sn}A'_n\leqslant_T^{sn}\cdots\leqslant_T^{sn}A'_1\leqslant_T^{sn}A'_0$，

其中$A'_{n+1}\subsetneq A'_n$，$A'_n\in NP$-co-NP。令$A'^*=\cap_{n\in\omega}A'_n$则

2．$NP^{A'_0}\supsetneq NP^{A'_1}\supsetneq\cdots\supsetneq NP^{A'_n}\supsetneq\cdots\supsetneq NP^{A'^*}\supseteq NP$。

定理7 对任意A，存在B使$A\leqslant_T^{sn}B$，且如果$NEXP^A=co$-$NEXP^A$，则$B\in NEXP^A$。

主要参考文献

〔1〕 R.E. Ladner, On the structure of polynomial time reducibility, J.ACM, 22 (1975).

〔2〕 L.J. Stockmeyer, The polynomial-time hierarchy, Theoret. Comput. Sci., 3 (1977).

〔3〕 U. Schoning, A uniform approach to obtain diagonal sets in complexity classes, Theoret. Comput. Sci., 18 (1982).

〔4〕 T.J. Long, Strong nondeterministic polynomial-time reducibility. Theoret. Comput. Sci., 21 (1982).

〔5〕 王洁、侯广坤等，关于相对化的复杂性类的研究（摘要），中山大学学报(自然科学版). 2 (1985).

Some Properties of the p-t-Reducibility and the sn-t-Reducibility

Wang Jie

Abstract

Some properties of the p-t-reducibility and the sn-t-reducibility are presented. For example, 1. As NP and NPC are presentable (see 〔3〕), and we have shown here that there exists a set $A \in NP - P$ such that $P^A \subseteq NP - NPC$ under the assumptions that $P \neq NP$ and $NP = co\text{-}NP$, we ask if there exists a set A such that $P^A = NP - NPC$, We sak if there ehists a set A such that $P^A = NP - NPC$, or more generally, if NP - NPC is recursively presentable. We prove that $NP - NPC \subseteq {}^s\Pi_3^p$; 2. We prove that there exist p-t-incomparable sets in EXP. As the best technique known for simulating deterministically a nondeterministic polynomial time, it might be of some interests; 3. Long (see 〔4〕) showed that if $NP \neq co\text{-}NP$, then for each $B \in NP\text{-}co\text{-}NP$, there is a set $A \in NP\text{-}co\text{-}NP$ such that $A \lneq_t^{sn} B$. We consider this kind of problems in right direction and we prove that for each A there exists B such that $A \lneq_t^{sn} B$, and if $NEXP^A = co - NEXP^A$ then $B \in NEXP^A$.