1986年第2期 中山大学学报 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI №. 2, 1986

矩形域上不精确散乱数据带连续边值条件的多元最优拟合*

关履泰

（计算机科学系）

摘　要

本文考虑矩形域内不精确散乱数据的多元最优拟合(带连续边界条件)，给出解的存在唯一性、特征和构造方法，容易在计算机上实现。

关于矩形域内格子点上给定数据进行样条插值已在文〔2〕—〔10〕中详细讨论，一般理论亦由Laurent等人作出[11]，但他们要求格子点上给满数据值，这种要求相当苛刻，不符合实际需要。李岳生[1]提出一种散乱数据多元最优插值，不需要给满格子点上数值，这是多元样条插值的一个新突破。本文讨论更广泛的散乱数据不精确的情况。

§1 问题和记号

采用类似文〔1〕的记号，$R=\{(x,y):\ a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$是$(x,y)$平面上的矩形域。

$$B_F=\{u(x,y):\ u^{(i,0)}(x,y)|_{x=\xi}=F_{i\xi}(y),c\leqslant y\leqslant d,i\in I_\xi,\xi=a\text{或}b$$
$$u^{(0,j)}(x,y)|_{y=\eta}=F_{j\eta}(x),a\leqslant x\leqslant b,j\in J_\eta,\eta=c\text{或}d\}$$

I_a、$I_b\subset I=\{0,1,\cdots,m-1\}$，$J_c$、$J_d\subset J=\{0,1,\cdots,n-1\}$；$F_{ia}(y),F_{ib}(y)\in H^n[c,d]$，$F_{jc}(x)$、$F_{jd}(x)\in H^m[a,b]$，满足连接条件：

$$F_{i\xi}^{(j)}(\eta)=F_{j\eta}^{(i)}(\xi),\ i\in I_\xi,\ j\in J_\eta,\ \xi=a\text{或}b,\ \eta=c\text{或}d$$

$$\mathring{D}=\{u(x,y):f_i^{\alpha\beta}\leqslant\lambda_i^{\alpha\beta}u\leqslant F_i^{\alpha\beta},\ \alpha\in I_i,\beta\in J_i,\ i=1,\cdots,\mathring{N}\}$$

这里　$\lambda_i^{\alpha\beta}u=u^{(\alpha,\beta)}(x_i,y_i)$，$I_i\subset I$，$J_i\subset J$，$f_i^{\alpha\beta}$、$F_i^{\alpha\beta}$为给定实数。

本文1984年12月收到

* 中国科学院科学基金资助课题

数据点集合$\overset{\circ}{\pi} = \left\{ (x_i, y_i) \right\}_{i=1}^{\overset{\circ}{N}} \subset R$,向$ox$轴、$oy$轴投影分别是$\overset{\circ}{\pi}_1 = p_1\overset{\circ}{\pi} = \left\{ \xi_i \right\}_{i=1}^{\overset{\circ}{N}_1} \subset [a,b]$

与$\overset{\circ}{\pi}_2 = p_2\overset{\circ}{\pi} = \left\{ \eta_j \right\}_{j=1}^{\overset{\circ}{N}_2} \subset [c,d]$

问题(P)

求函数$s(x,y) \in H^{m,n}(R)$使

$$J_{m,n}(u) = \frac{1}{2}\iint_R (u^{(m,n)}(x,y))^2 dxdy$$

在$H^{m,n}(R) \cap \overline{\overset{\circ}{D}} \cap B_F$上达极小。

定义广义调配样条函数

$$S(x,y) = \sum_{i=1}^{2m} g_i(y)\phi_i(x) + \sum_{i=1}^{2n} f_i(x)\phi_i(y) + \sum_{i=1}^{\overset{\circ}{N}} \sum_{\alpha \in I_i} \sum_{\beta \in J_i} c_i^{\alpha\beta} G_1^{(0,\alpha)}(x,x_i) G_2^{(0,\beta)}(y,y_i)$$

其中 $Span\{\phi_1, \cdots, \phi_{2m}\} = P_{2m}\langle x\rangle$ 为$2m-1$ 次多项式集合，$Span\{\phi_1, \cdots, \phi_{2n}\} = P_{2n}\langle y\rangle$,

$G_1(x,\xi) = \dfrac{(x-\xi)_+^{2m-1}}{(2m-1)!}$, $G_2(y,\eta) = \dfrac{(y-\eta)_+^{2n-1}}{(2n-1)!}$ 分别是微分算子$\dfrac{d^{2m}}{dx^{2m}}$与$\dfrac{d^{2n}}{dy^{2n}}$的格林函数，$f_i(x) \in H^m[a,b]$, $g_i(y) \in H^n[c,d]$。

§2 解的性质

记$J(g,h) = \frac{1}{2}\iint_R g^{(m,n)}(x,y) h^{(m,n)}(x,y) dxdy$,

$J(g) = J(g,*) = \frac{1}{2}\iint_R g^{(m,n)}(x,y) * dxdy$ 显然 $J_{m,n}(u) = J(u,u) = J(u)u$

定理1 函数$g(x,y)$是问题(P)之解当且仅当存在实数$\gamma_i^{\alpha\beta} \geqslant 0$, $\tau_i^{\alpha\beta} \geqslant 0$使

1) $J(g) = \sum_{i=1}^{\overset{\circ}{N}} \sum_{\alpha \in I_i} \sum_{\beta \in J_i} (\gamma_i^{\alpha\beta} - \tau_i^{\alpha\beta}) \lambda_i^{\alpha\beta}$

2) $\gamma_i^{\alpha\beta}(f_i^{\alpha\beta} - \lambda_i^{\alpha\beta} g(x,y)) = 0$, $i = 1, \cdots, \overset{\circ}{N}$, $\alpha \in I_i$, $\beta \in J_i$

3) $\tau_i^{\alpha\beta}(\lambda_i^{\alpha\beta} g(x,y) - F_i^{\alpha\beta}) = 0$, $i = 1, \cdots, \overset{\circ}{N}$, $\alpha \in I_i$, $\beta \in J_i$

4) $f_i^{\alpha\beta} \leqslant \lambda_i^{\alpha\beta} g(x,y) \leqslant F_i^{\alpha\beta}$, $i = 1, \cdots, \overset{\circ}{N}$, $\alpha \in I_i$, $\beta \in J_i$

定理2 设$s(x,y) \in H^{m,n}(R)$为问题(P)之解，它必定满足下列特征条件：

1) $s^{(2m,2n)}(x,y) = 0$, $(x,y) \in R_{ij}$, $i = 0, 1, \cdots, \overset{\circ}{N}_1$, $j = 0, 1, \cdots, \overset{\circ}{N}_2$

沿内网线有：

2) $[s^{(2m-\mu-1,2n)}(\cdot,y)]_{\xi_i} = 0$, $\eta_j < y < \eta_{j+1}$, $\mu \in I$, $i = 1, \cdots, \overset{\circ}{N}_1$, $j = 0, \cdots, \overset{\circ}{N}_2$

$[s^{(2m,2n-\nu-1)}(x,\cdot)]_{\eta_j}=0,\ \xi_i<x<\xi_{i+1},\nu\in J,i=0,\cdots,\mathring{N}_1,j=1,\cdots,\mathring{N}_2$

在内网点：

3) $[s^{(2m-\mu-1,2n-\nu-1)}(\cdot,\cdot)]_{\xi_i,\eta_j}=0,\ \mu\in I,\nu\in J,\ (\xi_i,\eta_j)\in\mathring{\pi}_1\times\mathring{\pi}_2\setminus\mathring{\pi}$

$[s^{(2m-\mu-1,2n-\nu-1)}(\cdot,\cdot)]_{x_i,y_i}=0,\ \mu\in I\setminus I_i,\ \nu\in J\setminus J_i,\ i=1,\cdots,\mathring{N}$

在边界：

4) $s^{(2m-\mu-1,2n)}(\alpha,y)=0,\ \mu\in I\setminus I_\alpha,\ c\leqslant y\leqslant d,\ \alpha=a$或$b$

$s^{(2m,2n-\nu-1)}(x,\beta)=0,\ \nu\in J\setminus J_\beta,\ a\leqslant x\leqslant b,\ \beta=c$或$d$

在角点：

5) $s^{(2m-\mu-1,2n-\nu-1)}(\alpha,\beta)=0,\mu\in I\setminus I_\alpha,\nu\in J\setminus J_\beta,(\alpha,\beta)\in V=\{(a,c)、(b,c)、(a,d)、(b,d)\}$

跳跃量：

6) 记$\lambda_{i\alpha\beta}=(-1)^{m+n-\alpha-\beta}[s^{(2m-\alpha-1,2n-\beta-1)}(x_i,y_i)]$则

$$\lambda_{i\alpha\beta}\begin{cases}\geqslant 0 & 当 s^{(\alpha,\beta)}(x_i,y_i)=f_i^{\alpha\beta},\quad i=1,\cdots,\mathring{N},\ \alpha\in I_i,\ \beta\in J_i\\ \leqslant 0 & 当 s^{(\alpha,\beta)}(x_i,y_i)=F_i^{\alpha\beta},\quad i=1,\cdots,\mathring{N},\ \alpha\in I_i,\ \beta\in J_i\\ =0 & 当 f_i^{\alpha\beta}<s^{(\alpha,\beta)}(x_i,y_i)<F_i^{\alpha\beta},\quad i=1,\cdots,\mathring{N},\alpha\in I_i\ \beta\in J_i\end{cases}$$

这里

$$[f(\cdot,y)]_{\xi_i}=\begin{cases}f(\xi_i+0,y)-f(\xi_i-0,y) & a<\xi_i<b\\ f(a,y) & \xi_i=a\\ -f(b,y) & \xi_i=b\end{cases}$$

类似规定$[f(x,\cdot)]_{\eta_j}$而

$$[f(\cdot,\cdot)]_{\xi_i,\eta_j}=[f(\xi_i,\eta_j)]=[[f(\cdot,\cdot)]_{\xi_i}]_{\eta_j}=[f(\xi_i+0,\cdot)]_{\eta_j}-[f(\xi_i-0,\cdot)]_{\eta_j}$$

证明　根据变分不等式

$\delta J_{m,n}(s)\geqslant 0,\ s\in\mathring{\bar{D}}\cap B_F\cap H^{m,n}(R),\ \delta s\in\mathring{\bar{D}}_0\cap B_0\cap H^{m,n}(R)$

适当取δs就可以得到1)—5)；利用1)—3)得知s是广义调配样条，所以

$$s^{(2m-\alpha,2n-\beta)}(x,y)=\sum_{i=1}^{\mathring{N}}\sum_{\alpha\in I_i}\sum_{\beta\in J_i}c_i^{\alpha\beta}\delta(x-x_i)\delta(y-y_i)$$

这里$\delta(x-x_i)$与$\delta(y-y_i)$为δ－函数，注意在边界上δs与$\delta s^{(\mu,\nu)}$等均为零，分部积分得

$$\delta J_{m,n}(s)=(-1)^{m+n-\alpha-\beta}\sum_{i=1}^{\mathring{N}}\sum_{\alpha\in I_i}\sum_{\beta\in J_i}c_i^{\alpha\beta}\delta s^{(\alpha,\beta)}(x_i,y_i)$$

上式中除$\delta s(x_i,y_i)$外令其余$\delta s(x_j,y_j)=0,\ j\neq i$得

$$\delta J_{m,n}(s)=(-1)^{m+n-\alpha-\beta}c_i^{\alpha\beta}\delta s^{(\alpha,\beta)}(x_i,y_i)\geqslant 0$$

当 $s^{(\alpha,\beta)}(x_i,y_i)=f_i^{\alpha\beta}$时，由于$\delta s^{(\alpha,\beta)}(x_i,y_i)\geqslant 0$ 所以 $(-1)^{m+n-\alpha-\beta}c_i^{\alpha\beta}\geqslant 0$

同理得 $s^{(\alpha,\beta)}(x_i,y_i)=F_i^{\alpha\beta}$ 时 $(-1)^{m+n-\alpha-\beta}c_i^{\alpha\beta}\leqslant 0$

而 $f_i^{\alpha\beta}<s^{(\alpha,\beta)}(x_i,y_i)<F_i^{\alpha\beta}$ 时 $\delta s^{(\alpha,\beta)}(x_i,y_i)$ 既可正亦可负，故而

$$(-1)^{m+n-\alpha-\beta}c_i^{\alpha\beta}\delta s^{(\alpha,\beta)}(x_i,y_i)=0,\ c_i^{\alpha\beta}=0$$

根据格林函数的性质，我们 有 $c_i^{\alpha\beta}=[s^{(2m-\alpha-1,2n-\beta-1)}(\cdot,\cdot)]_{x_i,y_i}$

记 $\lambda_{i\alpha\beta}=(-1)^{m+n-\alpha-\beta}c_i^{\alpha\beta}$ 即得证。

记 $\mathring{D}_1=\{u(x,y)\in H^{m,n}(R):f_i^{\alpha\beta}-F_i^{\alpha\beta}\leqslant\lambda_i^{\alpha\beta}u\leqslant F_i^{\alpha\beta}-f_i^{\alpha\beta},i=1,\cdots,\mathring{N},\alpha\in I_i,\beta\in J_i\}$

定义 若由

$$\begin{cases} s\in\mathring{D}_1\cap B_0 \\ s\in N_t=\{\sum_{i=1}^{m}g_i(y)\phi_i(x)+\sum_{i=1}^{n}f_i(x)\psi_i(y)\} \end{cases}$$

便得出 $s(x,y)\equiv 0$，则称问题(P)为广义强(m,n)适定。这里 $t=\dfrac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}$，$Span\{\phi_1,\cdots,\phi_m\}=P_m$，$Span\{\psi_1,\cdots,\psi_n\}=P_n$，$f_i\in H^m[a,b]$，$g_i\in H^n[c,d]$。

定理3 如果问题(P)为广义强(m,n)适定，则其解必定唯一存在。

证明 我们把问题(P)化成与之等价的凸集C上关于t的样条函数问题，用文[12]中有关定理得出相应定理。

§3 解的构造

问题I_1：

求 $I_1f(x)\in P_{2m}$ 使

$$r_{ia}(I_1f)=r_{ia}f,\ r_{ib}(I_1f)=r_{ib}f\qquad i\in I$$

问题I_2：

求 $I_2g(y)\in P_{2n}$ 使

$$r_{jc}(I_2g)=r_{jc}g,\ r_{jd}(I_2g)=r_{jd}g\qquad j\in J$$

这里 r_{ia}、r_{ib}、r_{jc}、r_{jd} 是线性泛函，定义为

$$r_{i\xi}f=\begin{cases} f^{(i)}(\xi) & i\in I_\xi \\ f^{(2m-i-1)}(\xi) & i\in I\setminus I_\xi \end{cases}\qquad \xi=a\text{或}b$$

$$r_{j\eta}f=\begin{cases} g^{(j)}(\eta) & j\in J_\eta \\ g^{(2n-j-1)}(\eta) & j\in J\setminus J_\eta \end{cases}\qquad \eta=c\text{或}d$$

定理4 设问题I_1与问题I_2有解，则问题(P)的解可以表示成

$$s(x,y)=s_1(x,y)+\sum_{i=1}^{\mathring{N}}\sum_{\mu\in I_i}\sum_{\nu\in J_i}c_i^{\mu\nu}R_1G_1^{(0,\mu)}(x,x_i)R_2G_2^{(0,\nu)}(y,y_i)$$

$$s_1(x,y)=\sum_{i\in I_a}F_{ia}(y)\phi_{ia}(x)+\sum_{i\in I_b}F_{ib}(y)\phi_{ib}(x)+\sum_{j\in J_c}R_1F_{jc}(x)\phi_{jc}(y)+\sum_{j\in J_d}R_1F_{jd}(x)\phi_{jd}(y)$$

这里$R_i=E-I_i$，$i=1,2$，E是恒等算子。

$C=(c_i^{\mu\nu})$可由解下列二次规划问题求出：

目标函数　$J_{m,n}(s)$

约束条件　　$b_2\leqslant AC\leqslant b_1$

这里　$A=(a_{ij}^{\mu\nu\alpha\beta})_{\mu\in I_i,\nu\in J_i,\alpha\in I_j,\beta\in J_j,i=1,j=1}^{\mathring{N}\quad\mathring{N}}$

$$a_{ij}^{\mu\nu\alpha\beta}=R_1G_1^{(\mu,\alpha)}(x_i,x_j)R_2G_2^{(\nu,\beta)}(y_i,y_j)$$

$$b_1=(b_{1i}^{\mu\nu})_{\mu\in I_i,\nu\in J_i,\ i=1}^{\mathring{N}},\qquad b_{1i}^{\mu\nu}=F_i^{\mu\nu}-\lambda_i^{\mu\nu}s_1$$

$$b_2=(b_{2i}^{\mu\nu})_{\mu\in I_i,\nu\in J_i,\ i=1}^{\mathring{N}},\qquad b_{2i}^{\mu\nu}=f_i^{\mu\nu}-\lambda_i^{\mu\nu}s_1$$

证明　如果问题I_1与I_2有解，可以表示成

$$I_1f(x)=\sum_{i\in I}(r_{ia}f)\phi_{ia}(x)+\sum_{i\in I}(r_{ib}f)\phi_{ib}(x)\text{与}$$

$$I_2g(y)=\sum_{j\in J}(r_{jc}g)\phi_{jc}(x)+\sum_{j\in J}(r_{jd}g)\phi_{jd}(y)$$

这里　$\phi_{ia}(x)$，$\phi_{ib}(x)\in P_{2m}$，$\phi_{jc}(y)$，$\phi_{jd}(y)\in P_{2n}$

$$r_{i\xi}\phi_{j\eta}=\begin{cases}\delta_{ij} & \text{当}\xi=\eta=a\text{或}b\\ 0 & \text{当}\xi\neq\eta\end{cases},\quad r_{i\xi}\phi_{j\eta}=\begin{cases}\delta_{ij} & \text{当}\xi=\eta=c\text{或}d\\ 0 & \text{当}\xi\neq\eta\end{cases}$$

设问题(P)的解是$s(x,y)$，根据定理2

$$s(x,y)=u(x,y)+w(x,y)$$

此处

$$u(x,y)=\sum_{i\in I}\{g_{ia}(y)\phi_{ia}(x)+g_{ib}(y)\phi_{ib}(x)\}+\sum_{j\in J}\{f_{jc}(x)\phi_{jc}(y)+f_{jd}(x)\phi_{jd}(y)\}$$

$$w(x,y)=\sum_{i=1}^{\mathring{N}}\sum_{\mu\in I_i}\sum_{\nu\in J_i}c_i^{\mu\nu}G_1^{(0,\mu)}(x,x_i)G_2^{(0,\nu)}(y,y_i)$$

令　$\{r_i\}_1^{2(m+n)}=\{r_{ia}、r_{ib}、r_{ic}、r_{id},\ i\in I,\ j\in J\}$　有

$$r_is=r_iu+r_iw=r_iF\qquad i=1,\cdots,2(m+n)$$

所以　$r_iu=r_iF-r_iw=r_i(F-w)$

因为相应偏微分方程边值问题解可表成([1]引理3)

$$u(x,y)=I(F-w)=IF(x,y)-Iw(x,y)$$

$$I=I_1\oplus I_2=I_1+I_2-I_1I_2=I_1+I_2R_1$$

$$s_1(x,y)=IF=\sum_{i\in I_a}F_{ia}(y)\phi_{ia}(x)+\sum_{i\in I_b}F_{ib}(y)\phi_{ib}(x)+\sum_{j\in J_c}R_1F_{jc}(x)\phi_{jc}(y)+\sum_{j\in J_d}R_1F_{jd}(x)\phi_{jd}(y)$$

所以　　$s(x,y)=u(x,y)+w(x,y)=IF(x,y)+Rw(x,y)$　　　　(1)

这里　　$Rw(x,y)=w(x,y)-Iw(x,y)=R_1R_2w(x,y)$

$$\lambda_i^{\mu\nu}Rw=\sum_{j=1}^{\overset{\circ}{N}}\sum_{\alpha\in I_j}\sum_{\beta\in J_j}c_j^{\alpha\beta}R_1G_1^{(\mu,\alpha)}(x_i,x_j)R_2G_2^{(\nu,\beta)}(y_i,y_j)$$

但由(1)得　　$\lambda_i^{\mu\nu}Rw=\lambda_i^{\mu\nu}s(x,y)-\lambda_i^{\mu\nu}IF(x,y)=\lambda_i^{\mu\nu}s(x,y)-\lambda_i^{\mu\nu}s_1(x,y)$

注意　　$f_i^{\mu\nu}\leqslant\lambda_i^{\mu\nu}s(x,y)\leqslant F_i^{\mu\nu}$　　有

$$f_i^{\mu\nu}-\lambda_i^{\mu\nu}s_1\leqslant\sum_{j=1}^{\overset{\circ}{N}}\sum_{\alpha\in I_j}\sum_{\beta\in J_j}c_j^{\alpha\beta}\ R_1G_1^{(\mu,\alpha)}(x_i,x_j)\ R_2G_2^{(\nu,\beta)}(y_i,y_j)\leqslant F_i^{\mu\nu}-\lambda_i^{\mu\nu}s_1$$

这就是约束条件　　$b_2\leqslant AC\leqslant b_1$

展开$\iint_R(s^{(m\ n)}(x,y))^2dxdy$整理得目标函数表达式

定理 5　如果问题I_1与问题I_2有唯一解，则问题(P)的解存在唯一

证明　定理 2 表明问题(P)的解是一个满足边值条件B_F的特殊插值问题的解。如果问题I_1与I_2都有唯一解，根据〔1〕引理 3，相应偏微分方程边值问题有唯一解，它的齐问题只有零解，所以满足B_F的特殊插值问题(m,n)适定，根据〔1〕的定理 2 知道它的解存在唯一。

利用〔13〕中凸集样条函数的光顺样条迭代算法可以得到问题(P)的一个有效算法，迭代序列强收敛于问题(P)的解(〔13〕定理7)。步骤是：

(1)　设$F_i^{\alpha\beta}>f_i^{\alpha\beta}$ 当$i\in L_0$时，$F_i^{\alpha\beta}=f_i^{\alpha\beta}$ 当$i\in L_0'$时

$$\text{作}C_1=\{u\in H^{mn}(R)\cap B_F:\sum_{i\in L_0}\sum_{\alpha\in I_i}\sum_{\beta\in J_i}\left[\frac{2}{F_i^{\alpha\beta}-f_i^{\alpha\beta}}\left(\lambda_i^{\alpha\beta}u-\frac{F_i^{\alpha\beta}+f_i^{\alpha\beta}}{2}\right)\right]^2\leqslant1,$$

$$\lambda_i^{\alpha\beta}u=F_i^{\alpha\beta},\ i\in L_0',\ \alpha\in I_i,\ \beta\in J_i\}$$

用求相应光顺样条的方法求出在C_1上的样条函数s_1使　$\|t(s_1)\|_y^2=\min_{x\in c_1}\|t(x)\|_y^2$,

记$p_{1i}^{\alpha\beta}=\lambda_i^{\alpha\beta}s_1$

(2)　设$a_{1i}^{\alpha\beta}=\min(|p_{1i}^{\alpha\beta}-F_i^{\alpha\beta}|,|p_{1i}^{\alpha\beta}-f_i^{\alpha\beta}|)>0$，当$i\in L_1$

$$a_{1j}^{\alpha\beta}=\min(|p_{1j}^{\alpha\beta}-F_j^{\alpha\beta}|,|p_{1j}^{\alpha\beta}-f_j^{\alpha\beta}|)=0,\ j\in L_1'$$

$$\text{作 }C_2=\{u\in H^{m,n}(R)\cap B_F:\sum_{i\in L_1}\sum_{\alpha\in I_i}\sum_{\beta\in J_i}\left[\frac{1}{a_{1i}^{\alpha\beta}}(\lambda_i^{\alpha\beta}u-p_{1i}^{\alpha\beta})\right]^2\leqslant1$$

$$\lambda_j^{\alpha\beta}u=p_{1j}^{\alpha\beta}\quad j\in L_1',\ \alpha\in I_j,\ \beta\in J_j\}$$

求出在C_2上样条函数s_2，记$p_{2i}^{\alpha\beta}=\lambda_i^{\alpha\beta}s_2$

(3) 假定第 ν 次迭代已经作出，$p_{\nu i}^{\alpha\beta}=\lambda_i^{\alpha\beta}s_\nu$

设
$$a_{\nu i}^{\alpha\beta}=\min(|p_{\nu i}^{\alpha\beta}-F_i^{\alpha\beta}|,|p_{\nu i}^{\alpha\beta}-f_i^{\alpha\beta}|)>0,\quad i\in L_\nu$$
$$a_{\nu i}^{\alpha\beta}=\min(|p_{\nu i}^{\alpha\beta}-F_i^{\alpha\beta}|,|p_{\nu i}^{\alpha\beta}-f_i^{\alpha\beta}|)=0,\quad j\in L_\nu'$$

作
$$C_{\nu+1}=\{u\in H^{m,n}(R)\cap B_F:\sum_{i\in L_\nu}\sum_{\alpha\in I_i}\sum_{\beta\in J_i}[\frac{1}{a_{\nu i}^{\alpha\beta}}(\lambda_i^{\alpha\beta}u-p_{\nu i}^{\alpha\beta})]^2\leqslant 1$$
$$\lambda_j^{\alpha\beta}u=p_{\nu j}^{\alpha\beta}\qquad j\in L_\nu',\ \alpha\in I_j,\ \beta\in J_j\}$$

求出在 $C_{\nu+1}$ 上的样条函数 $s_{\nu+1}$，即得迭代序列 $\{s_n\}_{n=1,2\cdots}$

这种方法的好处是避免确定目标函数的烦琐运算，而且开始迭代几次就接近真解。

由于目标函数的特殊性，也可以利用对实对称正定系数矩阵适用的二次规划算法[14,15]。

参 考 文 献

〔1〕Li Yuesheng(李岳生), CAT* 55(1984), *Center for Approximation Theory*, Texas A&M University.

〔2〕Birkhoff,G & de Boor, *Approximation of Functions*, H.L.Garabedian ed., Elsevier, Amsterdam, 1965, 164—190.

〔3〕Birkhoff,G & H.L.Garabedian, *J.Math.Phys.*, 39(1960),258—268.

〔4〕Schumaker,L.L., *Approximation Theory* Ⅱ,ed.by G.G.Lorentz, C.Chui & L.L.Schumaker, Academic Press,N.Y. 1976, 203-268.

〔5〕Duchon,J., *Rpt*.27, Univ, of Grenoble, 1976.

〔6〕Meinguet,J., *Polynomial and Spline Approximation*, ed.by Badrin Sahney, Canada, 1978.

〔7〕Dyn,L.& D.Levin, *R.A.I.R.O. Numerical Analysis*, 16(1982), 3, 201—209.

〔8〕Arthur, D.W., *J.Approximation Theory*, 12(1974), 396—411.

〔9〕Ritter, K., *Approximation with Special Emphasis on Spline Functions*, ed, by I.J.Schoenberg. Acad. Press, N.Y., 1969, 185—222.

〔10〕Mansfield, L.E., *SIAM J.Numer. Anal.*, 8(1971), 1.

〔11〕Laurent, P.J., *Approximation et Optimisation*, Hermann, Paris, 1972.

〔12〕关履泰，应用科学学报，1983，3，193—201.

〔13〕关履泰，高等学校计算数学学报，1982，3，268—278.

〔14〕M.阿佛里耳，非线性规划(下)，上海科学技术出版社，1980.

〔15〕Fletcher, R., *J.Inst, Math. Appl.*, 7(1971), 76—91.

Multivariate Generalized Spline Approximation to Scattered Data with Continuous Boundary Conditions throughout a Rectangle

Guan Lütai

Abstract

For multivarite generalized spline interpolation to scattered data and continuous boundary conditions, a suitable generalized blending spline function space is constructed. Existence, uniqueness, characteristics and the structure of the solution in such a space are established. The method can easily be carried out in a computer.