1985年第4期　中山大学学报　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　№.4.1985

弹性力学中的基本广义变分原理与组合广义变分原理

罗　恩
（力学系）

摘　要

本文根据弹性力学中广义变分原理的泛函的构造，将目前所见到的广义变分原理分为基本广义变分原理和组合广义变分原理两大类．文中通过作者在文〔＊〕所给出的新途径来统一论述这这两类广义变分原理的建立，并阐明它们之间的关系．本文还给出了几种新的组合广义变分原理，可作为建立新的杂交/混合有限元的基础．

一、引　言

近二十多年来，随着有限元法的发展，作为其基础的变分原理也有了很大的发展．为了建立不同类型的有限元模型，人们给出了不同形式的广义变分原理．除了众所周知的Hellinger-Reissner广义变分原理和胡海昌—鹫津广义变分原理外，最近还有Oden在文〔6〕、〔7〕中给出的本构—势能原理、Day等人在文〔8〕中给出的混合变分原理、钱伟长在文〔3〕、〔4〕中给出的更一般的广义变分原理等[1]．随着杂交/混合有限元模型的发展，还可能会出现一些不同形式的广义变分原理．目前，我们所见到的广义变分原理尽管其形式多样，但它们相互之间是有一定内在联系的．本文根据这些广义变分原理的泛函的构造特点，将它们分为基本广义变分原理与组合广义变分原理两大类．基本广义变分原理包括Hellinger-Reissner广义变分原理及胡海昌—鹫津广义变分原理；而其余的广义变分原理就统称为组合广义变分原理．本文首先通过作者在文〔＊〕所给出的新途径来统一论述这些广义变分原理的建立及其关系，然后再着重阐明基本广义变分原理与组合广义变分原理的内在联系．除了已见到的组合广义变分原理外，文中还给出了几种新的

本文1984年11月收到

〔＊〕　罗恩，关于弹性力学广义变分原理的某些问题，庆祝中山大学建校60周年力学论文集，中山大学力学系编，1984．

1）　这些变分原理均按作者的命名．

组合广义变分原理，它们都可作为建立新的杂交/混合有限元的基础。

本文采用与文献〔1〕相同的符号，不同处另作说明。在这里仅研究小变形线弹性的情形。

二、基本广义变分原理

最小势能原理和最小余能原理可统称为经典变分原理，而属于基本广义变分原理的Hellinger-Reissner广义变分原理和胡海昌—鹫津广义变分原理，可称为现代的变分原理。对于基本广义变分原理，文〔*〕给出一条直接从与力学中的虚功原理对应的数学恒等式出发，来成对地导出成互补关系的各类变分原理的泛函的新途径，并论述了这些原理之间的关系。在基本广义变分原理中，Hellinger-Reissner广义变分原理是无条件的不完全的变分原理，而胡海昌—鹫津广义变分原理是无条件的完全的变分原理，所以它们两者并不是完全相同的。关于这两种广义变分原理的区别，胡海昌已在文〔2〕中作了论述。为了下面阐述方便，现先把基本广义变分原理列于下：

1．胡海昌—鹫津三类变量广义变分原理

它的泛函式为[1][*]

$$
\begin{aligned}
\Pi_3(\sigma,\varepsilon,\mathbf{u}) &= \iiint_\Omega\left\{\frac{1}{2}(\varepsilon-\mathbf{a}\sigma)^T\mathbf{A}(\varepsilon-\mathbf{a}\sigma)-\frac{1}{2}\sigma^T\mathbf{a}\sigma+\sigma^T\mathbf{E}^T(\nabla)\mathbf{u}-\mathbf{f}^T\mathbf{u}\right\}d\Omega \\
&\quad -\iint_{B_1}\mathbf{P}^T(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})dB-\iint_{B_2}\bar{\mathbf{P}}^T\mathbf{u}dB=\iiint_\Omega\left\{\frac{1}{2}\varepsilon^T\mathbf{A}\varepsilon-\mathbf{f}^T\mathbf{u}\right. \\
&\quad \left.-\sigma^T\left[\varepsilon-\mathbf{E}^T(\nabla)\mathbf{u}\right]\right\}d\Omega-\iint_{B_1}\mathbf{P}^T(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})dB-\iint_{B_2}\bar{\mathbf{P}}^T\mathbf{u}dB
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_3(\sigma,\varepsilon,\mathbf{u}) &= \iiint_\Omega\left\{\frac{1}{2}\sigma^T\mathbf{a}\sigma-(\varepsilon-\mathbf{a}\sigma)^T\mathbf{A}(\varepsilon-\mathbf{a}\sigma)+\left[\mathbf{E}(\nabla)\sigma+\mathbf{f}\right]^T\mathbf{u}\right\}d\Omega \\
&\quad -\iint_{B_1}\mathbf{P}^T\bar{\mathbf{u}}dB-\iint_{B_2}(\mathbf{P}^T-\bar{\mathbf{P}}^T)\mathbf{u}dB=\iiint_\Omega\left\{\sigma^T\varepsilon-\frac{1}{2}\varepsilon^T\mathbf{A}\varepsilon\right. \\
&\quad \left.+\left[\mathbf{E}(\nabla)\sigma+\mathbf{f}\right]^T\mathbf{u}\right\}d\Omega-\iint_{B_1}\mathbf{P}^T\bar{\mathbf{u}}dB-\iint_{B_2}(\mathbf{P}^T-\bar{\mathbf{P}}^T)\mathbf{u}dB
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

且

$$\Pi_3+\Gamma_3=0 \tag{2.3}$$

Euler方程

$$
\left.\begin{array}{llll}
\mathbf{E}(\nabla)\sigma+\mathbf{f}=0 & 在\Omega内； & \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}} & 在B_1上 \\
\varepsilon=\mathbf{E}^T(\nabla)\mathbf{u} & 在\Omega内； & \mathbf{P}=\bar{\mathbf{P}} & 在B_2上 \\
\sigma=\mathbf{A}\varepsilon & 在\Omega内； & &
\end{array}\right\}
\tag{2.4}
$$

2．Hellinger-Reissner二类变量广义变分原理

其泛函式为

$$\Pi_2(\sigma,u)=\iiint\limits_{\Omega}\left\{\sigma^T E^T(\nabla)u-\frac{1}{2}\sigma^T a\sigma-f^T u\right\}d\Omega-\iint\limits_{B_1}P^T(u-\bar{u})dB$$

$$-\iint\limits_{\Gamma_2}\bar{P}^T u dB \tag{2.5}$$

$$\Gamma_2(\sigma,u)=\iiint\limits_{\Omega}\left\{\frac{1}{2}\sigma^T a\sigma+\left[E(\nabla)\sigma+f\right]^T u\right\}d\Omega-\iint\limits_{B_1}P^T\bar{u}\,dB$$

$$-\iint\limits_{2}(P^T-\bar{P}^T)\,u dB \tag{2.6}$$

且　　$$\Pi_2+\Gamma_2=0 \tag{2.7}$$

Euler方程

$$\left.\begin{array}{l} a\sigma=E^T(\nabla)u \text{ 在}\Omega\text{内；} u=\bar{u} \quad \text{在}B_1\text{上} \\ E(\nabla)\sigma+f=0 \text{ 在}\Omega\text{内；} P=\bar{P} \quad \text{在}B_2\text{上} \end{array}\right\} \tag{2.8}$$

另一种泛函式为

$$\Pi_2^*(\varepsilon,u)=\iiint\limits_{\Omega}\left\{(A\varepsilon)^T E^T(\nabla)u-\frac{1}{2}\varepsilon^T A\varepsilon-f^T u\right\}d\Omega-\iint\limits_{B_1}\left[E(\nu)(A\varepsilon)\right]^T(u-\bar{u})dB$$

$$-\iint\limits_{B_2}\bar{P}^T u dB \tag{2.9}$$

$$\Gamma_2^*(\varepsilon,u)=\iiint\limits_{\Omega}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon^T A\varepsilon+\left[E(\nabla)(A\varepsilon)+f\right]^T u\right\}d\Omega-\iint\limits_{B_1}\left[E(\nu)(A\varepsilon)\right]^T\bar{u}\,dB$$

$$-\iint\limits_{B_2}\left[E(\nu)(A\varepsilon)-\bar{P}\right]^T u dB \tag{2.10}$$

且　　$$\Pi_2^*+\Gamma_2^*=0 \tag{2.11}$$

Euler方程

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon=E^T(\nabla)u \text{ 在}\Omega\text{内；} u=\bar{u} \text{ 在}B_1\text{上} \\ E(\nabla)(A\varepsilon)+f=0 \text{ 在}\Omega\text{内；} E(\nu)(A\varepsilon)=\bar{P} \text{ 在}B_2\text{上} \end{array}\right\} \tag{2.12}$$

关于Π_3与Π_2，Γ_3与Γ_2之间的关系，文〔*〕已作了论述，此处就不再重复了。

若$\varepsilon=E^T(\nabla)u$，$u=\bar{u}$（在B_1上），则由式(2.1)可得

$$\Pi(u)=\iiint\limits_{\Omega}\left\{\frac{1}{2}\left[E^T(\nabla)u\right]^T AE^T(\nabla)u-f^T u\right\}d\Omega-\iint\limits_{B_1}\bar{P}^T u dB \tag{2.13}$$

这是最小势能原理的泛函的一种表达式。

三、组合广义变分原理

力学中的虚功原理为

$$\iiint_\Omega \mathbf{f}^T\mathbf{u}d\Omega+\iint \mathbf{P}^T\mathbf{u}dB=\iiint_\Omega \boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon}d\Omega \tag{3.1}$$

而与它对应的数学恒等式为

$$\iiint_\Omega[\mathbf{E}(\nabla)\boldsymbol{\sigma}]^T\mathbf{u}d\Omega+\iiint_\Omega \boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{E}^T(\nabla)\mathbf{u}d\Omega-\iint_B[\mathbf{E}(\nu)\boldsymbol{\sigma}]^T\mathbf{u}dB=0 \tag{3.2}$$

式(3.2)不仅对连续可导的函数成立，而且对广义函数也是成立的。若仅就式(3.2)本身而言，$\boldsymbol{\sigma}$,$\mathbf{u}$分别可以是互不相关的任意应力场和位移场，而不必要求它们是可能应力场和可能位移场。因此，式(3.2)不仅在探讨与证明弹性力学的各种变分原理时非常有用，而且还能用来导出各类广义变分原理的泛函。

众所周知，导出各类变分原理的通常途径是，从虚功原理出发，由经典到广义变分原理，逐个地推导出来。文〔*〕所给出的新途径与通常途径完全不同，它是从式(3.2)出发，首先直接导出最一般的三类变量广义变分原理，然后导出二类变量广义变分原理，最后得到经典变分原理。因此，它比通常途径更统一，更有普遍性。并且，由于它是成对地导出成互补关系的泛函，所以能避免发生将不同类泛函等同或等价起来的问题。

下面，我们就通过这条新途径来统一导出一些组合广义变分原理的泛函。

1. 第一种组合广义变分原理

根据文〔*〕式(2.3)，可得

$$\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{E}^T(\nabla)\mathbf{u}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma})^T\mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma})-\boldsymbol{\sigma}^T[\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{E}^T(\nabla)\mathbf{u}]$$
$$+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}-(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma})^T\mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}) \tag{3.3}$$

而文〔*〕式(2.8)为

$$\iiint_\Omega[\mathbf{E}(\nabla)\boldsymbol{\sigma}]^T\mathbf{u}d\Omega-\iint_B[\mathbf{E}(\nu)\boldsymbol{\sigma}]^T\mathbf{u}dB=\iiint_\Omega[\mathbf{E}(\nabla)\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{f}]^T\mathbf{u}d\Omega-\iint_{B_1}\mathbf{p}^T\mathbf{u}dB$$
$$-\iint_{B_2}(\mathbf{p}^T-\bar{\mathbf{p}}^T)\mathbf{u}dB-\iiint_\Omega \mathbf{f}^T\mathbf{u}d\Omega-\iint_{B_2}\bar{\mathbf{p}}^T\mathbf{u}dB-\iint_{B_1}\mathbf{p}^T(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})dB \tag{3.4}$$

将式(3.3)、(3.4)代入式(3.2)，可得下列互补关系

$$K_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})+K_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})=0 \tag{3.5}$$

式中泛函K_{I}，K_{II}分别为

$$K_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})\triangleq\iiint_\Omega\Big\{\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma})^T\mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma})-\boldsymbol{\sigma}^T[\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{E}^T(\nabla)\mathbf{u}]$$
$$-\mathbf{f}^T\mathbf{u}\Big\}d\Omega-\iint_{B_1}\mathbf{p}^T(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})dB-\iint_{B_2}\bar{\mathbf{p}}^T\mathbf{u}dB \tag{3.6}$$

$$K_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})\triangleq\iiint_\Omega\Big\{2\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}+[\mathbf{E}(\nabla)\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{f}]^T\mathbf{u}\Big\}d\Omega$$

$$-\iint_{B_1}\mathbf{p}^T\bar{\mathbf{u}}dB-\iint_{B_2}(\mathbf{p}^T-\bar{\mathbf{p}}^T)\mathbf{u}dB \tag{3.7}$$

由变分式$\delta K_1=0$或$\delta K_{11}=0$可得

$$\mathbf{E}(\nabla)\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{f}=0 \quad 在\Omega内 \tag{3.8a}$$

$$[\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\varepsilon}]+[\mathbf{E}^T(\nabla)\mathbf{u}-\boldsymbol{\varepsilon}]=0 \quad 在\Omega内 \tag{3.8b}$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\sigma}=0 \quad 在\Omega内 \tag{3.8c}$$

$$\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}\ 在B_1上；\ \mathbf{p}=\bar{\mathbf{p}}\ 在B_2上$$

当$\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}$满足应力应变关系时，$K_1=\Pi_2$，$K_{11}=\Gamma_2$。

当$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{E}^T(\nabla)\mathbf{u}$，$\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}$(在$B_1$上)时，则由式(3.6)可得

$$K_1'(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u})=\iiint_\Omega\Big\{[\mathbf{E}^T(\nabla)\mathbf{u}]^T\mathbf{A}[\mathbf{E}^T(\nabla)\mathbf{u}]+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{E}^T(\nabla)\mathbf{u}$$
$$-\mathbf{f}^T\mathbf{u}\Big\}d\Omega-\iint_{B_2}\bar{\mathbf{p}}^T\mathbf{u}dB \tag{3.9}$$

$K_1'(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u})$就是Oden在文[6][7]中所给出的本构—势能原理的泛函$M(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u})$。

由$\delta K_1'=0$可得

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{E}^T(\nabla)\mathbf{u}=0 && 在\Omega内\\&\mathbf{E}(\nabla)[-2\mathbf{A}\mathbf{E}^T(\nabla)\mathbf{u}+\boldsymbol{\sigma}]-\mathbf{f}=0 && 在\Omega内\\&\mathbf{E}(\nu)[2\mathbf{A}\mathbf{E}^T(\nabla)\mathbf{u}-\boldsymbol{\sigma}]=\bar{\mathbf{p}} && 在B_2上\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

2. 第二种组合广义变分原理

若将式(3.2)第二项体积分的被积函数作一变换

$$\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{E}^T(\nabla)\mathbf{u}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{1}{4}(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma})^T\mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma})-\boldsymbol{\sigma}^T[\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{E}^T(\nabla)\mathbf{u}]$$
$$+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}-\frac{1}{4}(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma})^T\mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}) \tag{3.11}$$

将式(3.11)、(3.4)代入(3.2)，得到下列互补关系

$$L_1(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})+L_{11}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})=0 \tag{3.12}$$

式中泛函L_1，L_{11}分别为

$$L_1(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})\triangleq\iiint_\Omega\Big\{\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{1}{4}(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma})^T\mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma})-\boldsymbol{\sigma}^T[\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{E}^T(\nabla)\mathbf{u}]$$
$$-\mathbf{f}^T\mathbf{u}\Big\}d\Omega-\iint_{B_1}\mathbf{p}^T(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})dB-\iint_{B_2}\bar{\mathbf{p}}^T\mathbf{u}dB \tag{3.13}$$

$$L_{11}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})\triangleq\iiint_\Omega\Big\{\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}+(\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon})\Big]+[\mathbf{E}(\nabla)\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{f}]^T\mathbf{u}\Big\}d\Omega$$
$$-\iint_{B_1}\mathbf{p}^T\bar{\mathbf{u}}dB-\iint_{B_2}(\mathbf{p}^T-\bar{\mathbf{p}}^T)\mathbf{u}dB \tag{3.14}$$

由变分式$\delta L_{\mathrm{I}}=0$或$\delta L_{\mathrm{II}}=0$可得

$$\mathbf{E}(\nabla)\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{f}=0 \qquad 在\Omega内 \tag{3.15a}$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\sigma}=0 \qquad 在\Omega内 \tag{3.15b}$$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\varepsilon})=\mathbf{E}^{T}(\nabla)\mathbf{u} \qquad 在\Omega内 \tag{3.15c}$$

$$\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}\ 在B_1上;\quad \mathbf{p}=\bar{\mathbf{p}}\ 在B_2上$$

当$\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}$满足应力应变关系时，$L_{\mathrm{I}}=\Pi_2$，$L_{\mathrm{II}}=\Gamma_2$。

当$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{E}^{T}(\nabla)\mathbf{u}$，在$B_1$上$\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}$时，则由式(3.13)得到

$$L_{\mathrm{I}}'(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u})=\iiint_{\Omega}\left\{\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\sigma}^{T}\mathbf{E}^{T}(\nabla)\mathbf{u}+\frac{1}{2}(\mathbf{E}^{T}(\nabla)\mathbf{u})^{T}\mathbf{A}(\mathbf{E}^{T}(\nabla)\mathbf{u})-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{T}\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}\right]-\mathbf{f}^{T}\mathbf{u}\right\}d\Omega-\iint_{B_2}\bar{\mathbf{p}}^{T}\mathbf{u}\,dB \tag{3.16}$$

由变分式$\delta L_{\mathrm{I}}'=0$得到

$$\frac{1}{2}\mathbf{E}(\nabla)\left[\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{A}\mathbf{E}^{T}(\nabla)\mathbf{u}\right]+\mathbf{f}=0 \qquad 在\Omega内 \tag{3.17a}$$

$$\mathbf{E}^{T}(\nabla)\mathbf{u}-\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}=0 \qquad 在\Omega内 \tag{3.17b}$$

$$\mathbf{p}=\bar{\mathbf{p}} \qquad 在B_2上$$

泛函$L_{\mathrm{I}}'(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u})$就是梁国平、傅子智在文[9]中给出的泛函。

3. 第三种组合广义变分原理

若对$\boldsymbol{\sigma}^{T}\mathbf{E}^{T}(\nabla)\mathbf{u}$作如下的变换

$$\boldsymbol{\sigma}^{T}\mathbf{E}^{T}(\nabla)\mathbf{u}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{T}\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{T}\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^{T}\left[\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{E}^{T}(\nabla)\mathbf{u}\right]+\boldsymbol{\sigma}^{T}\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma})^{T}\mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}) \tag{3.18}$$

并将式(3.4)写成下列推广的形式

$$\iiint_{\Omega}\left[\mathbf{E}(\nabla)\boldsymbol{\sigma}\right]^{T}\mathbf{u}\,d\Omega-\iint_{B}\left[\mathbf{E}(\nu)\boldsymbol{\sigma}\right]^{T}\mathbf{u}\,dB=\iiint_{\Omega}\left\{\left[\mathbf{E}(\nabla)\boldsymbol{\sigma}+2\mathbf{f}\right]^{T}\mathbf{u}-2\mathbf{f}^{T}\mathbf{u}\right\}d\Omega-\iint_{B_1}\mathbf{p}^{T}(\mathbf{u}-2\bar{\mathbf{u}})\,dB-\iint_{B_2}2\bar{\mathbf{p}}^{T}\mathbf{u}\,dB-\iint_{B_1}2\mathbf{p}^{T}\bar{\mathbf{u}}\,dB-\iint_{B_2}(\mathbf{p}^{T}-2\bar{\mathbf{p}}^{T})\mathbf{u}\,dB \tag{3.19}$$

将式(3.18)、(3.19)代入式(3.2)，然后将所得的表达式与式(3.1)相减，可得下列互补关系

$$M_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})+M_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})=0 \tag{3.20}$$

式中泛函M_{I}，M_{II}如下

$$M_{I}(\sigma,\varepsilon,u)\triangleq\iiint_{\Omega}\{\frac{1}{2}\varepsilon^{T}A\varepsilon-\frac{1}{2}\sigma^{T}a\sigma-f^{T}u-\sigma^{T}[\varepsilon-E^{T}(\nabla)u]$$

$$-[E(\nabla)\sigma+f]^{T}u\}d\Omega-\iint_{B_1}p^{T}(u-2\bar{u})dB+\iint_{B_2}(p^{T}-2\bar{p}^{T})u\,dB \qquad (3.21)$$

$$M_{II}(\sigma,\varepsilon,u)\triangleq\iiint_{\Omega}\{\sigma^{T}a\sigma-\frac{1}{2}(\varepsilon-a\sigma)^{T}A(\varepsilon-a\sigma)+[E(\nabla)\sigma+f]^{T}u$$

$$-\sigma^{T}E^{T}(\nabla)u+f^{T}u\}d\Omega+\iint_{B_1}p^{T}(u-2\bar{u})dB-\iint_{B_2}(p^{T}-2\bar{p}^{T})u\,dB \qquad (3.22)$$

由变分式$\delta M_{I}=0$或$\delta M_{II}=0$得

$$\sigma=A\varepsilon \qquad 在\Omega内 \qquad (3.23a)$$

$$E(\nabla)\sigma+f=0 \qquad 在\Omega内 \qquad (3.23b)$$

$$[E^{T}(\nabla)u-\varepsilon]+[E^{T}(\nabla)u-a\sigma]=0 \qquad 在\Omega内 \qquad (3.23c)$$

$$u=\bar{u} \quad 在B_1上; \qquad p=\bar{p} \quad 在B_2上$$

当$f=0$，$\varepsilon=E^{T}(\nabla)u$，$E(\nabla)\sigma=0$时，由式(3.21)得

$$M_{I}'(\sigma,u)=\iiint_{\Omega}\{\frac{1}{2}[E^{T}(\nabla)u]^{T}AE^{T}(\nabla)u-\frac{1}{2}\sigma^{T}a\sigma\}d\Omega$$

$$-\iint_{B_1}p^{T}(u-2\bar{u})dB+\iint_{B_2}(p^{T}-2\bar{p}^{T})u\,dB \qquad (3.24)$$

泛函$M_{I}'(\sigma,u)$就是Day等人在文〔8〕中所给出的泛函.

4. 第四种组合广义变分原理

若对$\sigma^{T}E^{T}(\nabla)u$的变换取为

$$\sigma^{T}E^{T}(\nabla)u=\frac{1}{2}\varepsilon^{T}A\varepsilon+\beta(\varepsilon-a\sigma)^{T}A(\varepsilon-a\sigma)-\sigma^{T}[\varepsilon-E^{T}(\nabla)u]$$

$$-(\beta+\frac{1}{2})(\varepsilon-a\sigma)^{T}A(\varepsilon-a\sigma)+\frac{1}{2}\sigma^{T}a\sigma \qquad (3.25)$$

将式(3.25)、(3.4)代入式(3.2)，得下列互补关系

$$\Pi_{G\beta}(\sigma,\varepsilon,u)+\Gamma_{G(\beta+\frac{1}{2})}(\sigma,\varepsilon,u)=0 \qquad (3.26)$$

式中泛函$\Pi_{G\beta}$，$\Gamma_{G(\beta+\frac{1}{2})}$分别为

$$\Pi_{G\beta}\triangleq\iiint_{\Omega}\{\frac{1}{2}\varepsilon^{T}A\varepsilon+\beta(\varepsilon-a\sigma)^{T}A(\varepsilon-a\sigma)-\sigma^{T}[\varepsilon-E^{T}(\nabla)u]$$

$$-f^{T}u\}d\Omega-\iint_{B_1}p^{T}(u-\bar{u})dB-\iint_{B_2}\bar{p}^{T}u\,dB \qquad (3.27)$$

$$\Gamma_{G(\beta+\frac{1}{2})} \triangleq \iiint_{\Omega} \{ \frac{1}{2}\sigma^T a\sigma - (\beta + \frac{1}{2})(\varepsilon - a\sigma)^T A(\varepsilon - a\sigma) + [E(\nabla)\sigma$$

$$+ f]^T u\} d\Omega - \iint_{B_1} p^T \bar{u} dB - \iint_{B_2} (p^T - \bar{p}^T) u dB \tag{3.28}$$

由变分式 $\delta\Pi_{G\beta} = 0$ 或 $\delta\Gamma_{G(\beta+\frac{1}{2})} = 0$ 得到

$$2\beta(a\sigma - \varepsilon) - \varepsilon + E^T(\nabla)u = 0 \quad 在\Omega内 \tag{3.29a}$$

$$(2\beta + 1)(A\varepsilon - \sigma) = 0 \quad 在\Omega内 \tag{3.29b}$$

$$E(\nabla)\sigma + f = 0 \quad 在\Omega内 \tag{3.29c}$$

$$u = \bar{u} \quad 在B_1上; \quad p = \bar{p} \quad 在B_2上$$

当分别取 $\beta = \frac{\lambda'}{2}$ 及 $\beta = \frac{\lambda - 1}{2}$，则泛函 $\Pi_{G\beta}$ 及 $-\Gamma_{G(\beta+\frac{1}{2})}$ 就分别变为钱伟长在文[3]、[4]中所给出的泛函 $\Pi_{G\lambda'}$ 及 $\Pi_{G\lambda}$。

5.第五种组合广义变分原理

将式(3.2)取反号，并对第二项被积函数作如下变换

$$-\sigma^T E^T(\nabla)u = \frac{1}{2}(\varepsilon - a\sigma)^T A(\varepsilon - a\sigma) + \frac{1}{2}\sigma^T a\sigma - \sigma^T E^T(\nabla)u \tag{3.30}$$

$$+ \sigma^T\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^T A\varepsilon - \sigma^T a\sigma$$

将式(3.30)及(3.4)的反号式代入(3.2)的反号式中，可得下列互补关系

$$N_I(\sigma, \varepsilon, u) + N_{II}(\sigma, \varepsilon, u) = 0 \tag{3.31}$$

式中泛函 N_I、N_{II} 分别为

$$N_I(\sigma, \varepsilon, u) \triangleq \iiint_{\Omega} \Big\{ \frac{1}{2}\sigma^T a\sigma + \frac{1}{2}(\varepsilon - a\sigma)^T A(\varepsilon - a\sigma)$$

$$- \sigma^T E^T(\nabla)u + f^T u \Big\} d\Omega + \iint_{B_1} P^T(u - \bar{u}) dB + \iint_{B_1} \bar{P}^T u dB \tag{3.32}$$

$$N_{II}(\sigma, \varepsilon, u) \triangleq \iiint_{\Omega} \Big\{ \sigma^T(\varepsilon - a\sigma) - \frac{1}{2}\varepsilon^T A\varepsilon - [E(\nabla)\sigma + f]^T u \Big\} d\Omega$$

$$+ \iint_{B_1} P^T \bar{u} dB + \iint_{B_2} (P^T - \bar{P}^T) u dB \tag{3.33}$$

由变分式 $\delta N_I = 0$ 或 $\delta N_{II} = 0$ 得到

$$E(\nabla)\sigma + f = 0 \quad 在\Omega内 \tag{3.34a}$$

$$A\varepsilon - \sigma = 0 \quad 在\Omega内 \tag{3.34b}$$

$$2[a\sigma - E^T(\nabla)u] - [\varepsilon - E^T(\nabla)u] = 0 \quad 在\Omega内 \tag{3.34c}$$

$$u = \bar{u} \quad 在B_1上; \quad P = \bar{P} \quad 在B_2上$$

当 σ，ε 满足应力应变关系时，$N_I = -\Pi_2$，$N_{II} = -\Gamma_2$。

6.第六种组合广义变分原理

其泛函式为[5]

$$G_{\mathrm{I}}(\sigma,\varepsilon,\mathbf{u})\triangleq\iiint_{\Omega}\left\{(\mathbf{A}\varepsilon)^{T}\mathbf{E}^{T}(\nabla)\mathbf{u}+\left[\sigma^{T}\varepsilon-\frac{1}{2}\sigma^{T}\mathbf{a}\sigma\right]-\mathbf{f}^{T}\mathbf{u}\right\}d\Omega$$

$$-\iint_{B_1}\mathbf{P}^{T}(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})dB-\iint_{B_2}\bar{\mathbf{P}}^{T}\mathbf{u}dB \tag{3.35}$$

$$G_{\mathrm{II}}(\sigma,\varepsilon,\mathbf{u})\triangleq\iiint_{\Omega}\left\{\sigma^{T}\varepsilon-\frac{1}{2}\sigma^{T}\mathbf{a}\sigma+\left[\mathbf{E}(\nabla)(\mathbf{A}\varepsilon)+\mathbf{f}\right]^{T}\mathbf{u}\right\}d\Omega$$

$$-\iint_{B_1}\mathbf{P}^{T}\bar{\mathbf{u}}dB-\iint_{B_2}(\mathbf{P}^{T}-\bar{\mathbf{P}}^{T})\mathbf{u}dB \tag{3.36}$$

泛函G_{I}，G_{II}有些人称为第11类变分原理的泛函。但由变分式$\delta G_{\mathrm{I}}=0$或$\delta G_{\mathrm{II}}=0$所得到的欧拉方程，从本义上说，并不是弹性力学的三类基本方程，因此就不能认为G_{I}，G_{II}是真正的第11类变分原理的泛函。下面将要说明，泛函G_{I}，G_{II}可由基本广义变分原理的泛函线性组合而得到。

四、基本泛函与组合泛函

与基本广义变分原理对应的泛函$\Pi_2,\Gamma_2,\Pi_3,\Gamma_3$可称为基本泛函。在泛函$\Pi_3$，$\Gamma_3$中，独立变量为$\sigma$，$\mathbf{u}$，$\varepsilon$三类，它们的取值范围不受限制，而在泛函$\Pi_2,\Gamma_2$中，独立变量为$\sigma$，$\mathbf{u}$两类，它们的取值范围也不受限制。如果在$\Pi_2,\Gamma_2,\Pi_3,\Gamma_3$中取相同的$\sigma$，$\mathbf{u}$，则可将这些基本泛函进行线性组合，而得到各种形式的泛函。

如果要求$\Pi_2,\Gamma_2,\Pi_3,\Gamma_3$中的位移也首先满足位移边界条件，那末在$\Pi_2$，$\Gamma_2$，$\Pi_3$，$\Gamma_3$与$\Pi(\mathbf{u})$中便可取相同的$\mathbf{u}$，于是$\Pi$也可与$\Pi_2,\Gamma_2,\Pi_3,\Gamma_3$进行线性组合。

上述六种组合广义变分原理的泛函，都可表示为基本泛函的线性组合，具体组合方式见下表

从表中可以清楚地看到组合广义变分原理的泛函的构造及实质。由于泛函K_{I}，K_{II}，$L_{\mathrm{I}},L_{\mathrm{II}},M_{\mathrm{I}},M_{\mathrm{II}},\Pi_{G\beta},\Gamma_{G(\beta+\frac{1}{2})}$，$N_{\mathrm{I}},N_{\mathrm{II}},G_{\mathrm{I}},G_{\mathrm{II}}$都是基本泛函$\Pi_2,\Gamma_2,\Pi_3,\Gamma_3$的线性组合，因此可将它们统称为组合泛函，而与它们相应的变分原理就可称为组合广义变分原理。显然，由组合广义变分原理所得到的欧拉方程必定是基本广义变分原理的欧拉方程的线性组合，所以组合广义变分原理并不能提供更多的欧拉方程，换言之，它们并没有反映出比基本广义变分原理更多的基本规律。

在上述的泛函中，$K_{\mathrm{I}},K_{\mathrm{II}},M_{\mathrm{I}},M_{\mathrm{II}},L_{\mathrm{I}},N_{\mathrm{I}}$及$N_{\mathrm{II}}$都是本文给出的新的组合广义变分原理的泛函，而Oden所给出的本构一势能原理的泛函是泛函K_{I}的一种特殊形式，Day等人所给出的混合变分原理的泛函是泛函M_{I}的一种特殊形式。当然，通过文[*]的途径，还能建立其它形式的泛函。

表1　组合广义变分原理的泛函及其组合方式

文献	泛函	组合方式
本文	$K_{\mathrm{I}}(\sigma,\varepsilon,u)$〔式(3.6)〕	$2\Pi_3-\Pi_2$
本文	$K_{\mathrm{II}}(\sigma,\varepsilon,u)$〔式(3.7)〕	$2\Gamma_3-\Gamma_2$
〔6〕〔7〕	$K_{\mathrm{I}}'(\sigma,u)$　〔式(3.9)〕	$2\Pi-\Pi_2$($u=\bar{u}$ 在B_1上)
本文	$L_{\mathrm{I}}(\sigma,\varepsilon,u)$〔式(3.13)〕	$\frac{1}{2}(\Pi_3+\Pi_2)$
本文	$L_{\mathrm{II}}(\sigma,\varepsilon,u)$〔式(3.14)〕	$\frac{1}{2}(\Gamma_3+\Gamma_2)$
〔9〕	$L_{\mathrm{I}}'(\sigma,u)$　〔式(3.16)〕	$\frac{1}{2}(\Pi+\Pi_2)$($u=\bar{u}$ 在B_1上)
本文	$M_{\mathrm{I}}(\sigma,\varepsilon,u)$〔式(3.21)〕	$\Pi_3-\Gamma_2$
本文	$M_{\mathrm{II}}(\sigma,\varepsilon,u)$〔式(3.22)〕	$\Gamma_3-\Pi_2$
〔8〕	$M_{\mathrm{I}}'(\sigma,u)$　〔式(3.24)〕	$\Pi_3-\Gamma_2$(但$f=0$,$E(\nabla)\sigma=0$ $\varepsilon-E^T(\nabla)u=0$)
〔3〕〔4〕	$\Pi_{G\beta}$，当$\beta=\frac{\lambda'}{2}$时，$\Pi_{G\beta}=\Pi_{G\lambda'}$〔式(3.27)〕	$\Pi_3+2\beta(\Pi_3-\Pi_2)$
〔3〕〔4〕	$\Gamma_{G(\beta+\frac{1}{2})}$，当$\beta=\frac{\lambda-1}{2}$时，$-\Gamma_{G(\beta+\frac{1}{2})}=\Pi_{G\lambda}$ 〔式(3.28)〕	$\Gamma_3+2\beta(\Gamma_3-\Gamma_2)$
本文	$N_{\mathrm{I}}(\sigma,\varepsilon,u)$　〔式(3.32)〕	$\Pi_3-2\Pi_2$
本文	$N_{\mathrm{II}}(\sigma,\varepsilon,u)$　〔式(3.33)〕〕	$\Gamma_3-2\Gamma_2$
〔5〕	$G_{\mathrm{I}}(\sigma,\varepsilon,u)$　〔式(3.35)〕	$\Pi_3-\Pi_2+\Pi_2^*$
〔5〕	$G_{\mathrm{II}}(\sigma,\varepsilon,u)$　〔式(3.36)〕	$\Gamma_3-\Gamma_2+\Gamma_2^*$

对于精确解而言，具有同类独立变量的组合广义变分原理与基本广义变分原理是等价的；但对于近似解来说，一般它们就不一样了。对于求近似解，某种组合广义变分原理可能对建立某类有限元模型有好处，但如果形式太复杂，人为增加计算量，全面衡量就不一定优越了。因此，在构造组合泛函时，不仅要注意不要把泛函形式搞得太复杂，而且更要注意考察它是否具有某些理论或实用意义。

参考文献

〔1〕胡海昌，弹性力学的变分原理及其应用，科学出版社，1981.

〔2〕胡海昌，略论Hellinger-Reissner和胡海昌—鹫津久一郎两种广义变分原理的联系，力学学报，3(1983).

〔3〕钱伟长，高阶拉氏乘子法与弹性理论中更一般广义变分原理，应用数学和力学，4(1983),2.

〔4〕钱伟长，再论弹性力学中的广义变分原理，力学学报，4(1983).

〔5〕郭友中，固体力学中的变分方法，数学物理学报，3(1983)，3.

〔6〕Oden, J. T. and Reddy, C. T., Variational Methods in Theoretical Mechanics, Springer-Verlag, Heidelberg, 1976.

[7] Oden, J. T., The Classical Variational Principles of Mechanics, Energy Methods in Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, 1979.
[8] Day, M. L. and Yang, T. Y., A Mixed Variational Principle for Finite Element Analysis, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 18(1982), 8.
[9] Liang Guoping and Fu Zizhi, A New Method for the Construction Element, *Proc. Inter. Confer. FEM*, China, 1982.

On Basic Generalized Variational Principles and Combinational Generalized Variational Principles in Elasticity

Luo En

Abstract

In this paper, according to the construction of functionals of generalized variational principles in elasticity, these principles found in the literatures are divided into basic generalized variational principles and combinational generalized variational principles. The Hellinger-Reissner principle and Hu-Washizu principle are the basic generalized variational principles, the others belong to the combinational generalized variational principles. By means of the new way in [●], these two kinds of generalized variational principles are established, and the intrinsic relations between these principles are also indicated. In the present paper, several new forms of combinational generalized variational principles are given, and new hybrid/mixed finite elements are established on the basis of these principles.