

薄板弯曲的混合型样条有限条元

谭志民 罗 畅
(力学系)

摘 要

本文运用简单多项式与三次B样条函数结合,构造出一种以位移 w 和弯矩 M_x 作为节点参数的混合条元,并对各种典型边界条件下薄板弯曲的静力、振动及稳定问题作了计算,数值结果表明收敛精度较高。

在研究薄板弯曲问题时,文[1]提出了一种新颖的混合型有限单元体,即对于单元体的每一角点,各赋予三个位移参数: w 、 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ 、 $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$,利用应力应变关系,等价地变换为三个位移与弯矩的参数: W 、 M_x 、 M_y 。在这种单元体上,每个节点的位移,弯矩都已连续。本文以文[1]的变分式为基础,采用有限条方法,构造出混合型样条有限条元的位移模式,并对薄板弯曲的静力、振动和稳定问题进行了计算。

一、位 移 模 式

把矩形薄板划分为若干条,从中选取一条元(如图1所示)。条元的长边称为节线,在节线上设置若干节点。

设位移模式为

$$w = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=-1}^{M+1} C_{ji} Y_i \alpha_j \quad (1.1)$$

记为

$$w = \mathbf{N} \mathbf{C}^e \quad (1.1')$$

其中

$$\mathbf{C}^e = \{ C_{1,-1} C_{1,0} \cdots C_{1,M+1} C_{2,-1} \cdots C_{4,M+1} \} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{N} = [\alpha_1 Y_{-1} \alpha_1 Y_0 \cdots \alpha_1 Y_{M+1} \alpha_2 Y_{-1} \cdots \alpha_4 Y_{M+1}] \\ = \boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{Y} \quad (1.3)$$

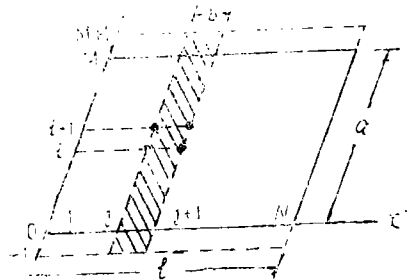


图1

本文1983年10月收到

α 为沿条元短边方向的插值函数行阵,按文[2]的取法为

$$\begin{aligned} \alpha &= [\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4] \\ &= \left[-\frac{x}{b} + 1 - \frac{x^2}{6b} + \frac{x^2}{2} - \frac{bx}{3} \frac{x}{b} \frac{x^2}{6b} - \frac{bx}{6} \right] \end{aligned} \quad (1.4)$$

Y 为沿条元节线方向插值函数空间的基矩阵:

$$Y = [Y_{-1} Y_0 Y_1 \cdots Y_{M-1}] \quad (1.5)$$

若设 l 、 a 分别为板在 ox 轴和 oy 轴方向上的边长, N 为薄板划分的条元条数, M 为条元节线上的样条等分节点个数, 则式(1.4)中 $b = l/N$ 。容易验证, w 与 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ 、 $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ 都是连续的。在具体的计算中, 基函数的组成形式要根据具体的边界条件而确定。

二、变分式

本文仿照文[1], 定义泛函

$$\begin{aligned} \Pi(w) &= \iint_{\Omega} (G - qw) dx dy + \sum_i \int_{C_i} M_n \frac{\partial w}{\partial n} ds - \int_{C_R} \bar{R} w ds - \int_{C_\alpha} \bar{\alpha} M_n ds \\ &\quad + \int_{C_M} \bar{M}_n \frac{\partial w}{\partial n} ds \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中

$$G = -\frac{1}{2} \left(M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.2)$$

式(2.1)中各项所代表的含义同文[1], C_α^* 和 C_M^* 分别表示 C_α 与条元长边的交线和 C_M 与条元短边的交线 (C_α 是给定 \bar{M}_n 值条件的边界线段)。在此式中, 泛函 Π 的变数需满足下列条件:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{在 } C_w \text{ 上: } w = \bar{w}, \\ \text{在 } C_i \text{ 上: } w \text{ 与 } M_n \text{ 均连续,} \\ \text{在 } C_M - C_M^* \text{ 上: } M_n = \bar{M}_n. \\ \text{在 } C_\alpha - C_\alpha^* \text{ 上: } \frac{\partial w}{\partial n} = \bar{\alpha}. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

对于矩形条元划分(图2), 式(2.1)化为

$$\begin{aligned} \Pi(w) &= \iint_{\Omega} (G + L - qw) dx dy - \int_{C_R} \bar{R} w ds - \int_{C_\alpha} \bar{\alpha} M_n ds \\ &\quad + \int_{C_M} \bar{M}_n \frac{\partial w}{\partial n} ds \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\text{其中} \quad L = M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial M_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.5)$$

考虑到为了保证在条元边界上 w 和 M_n 的连续性, 在条元节线 C_i 的分点上以 w 和 M_x 作

为未知参数，因而在整板上应指定满足条件(2.3)中的前三个式子(注意此时 $M_n = M_x$, $\bar{M}_n = \bar{M}_x$)；而在节线两端的分点处只需以 w 作为未知参数，此时 w 应指定满足条件(2.3)中首尾两个式子，而其中第三个式子便成为自然边界条件。例如对于典型边界条件，变量函数需要预先满足下列边界条件：

(1) 四边简支板

在 $x=0, l$ 处 $w=0, M_x=0$;
在 $y=0, a$ 处 $w=0$ 。

(2) 四边固支板

在 $x=0, l$ 处 $w=0$
在 $y=0, a$ 处 $w=0, \frac{\partial w}{\partial y}=0$ 。

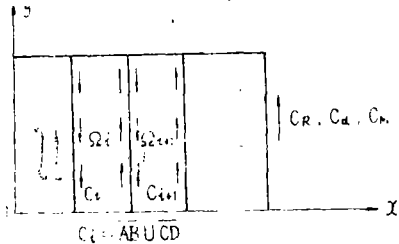


图2

其它类型的边界条件可作类似的处理。显然，若外荷载的分布对称于板中线时，可只取板的二分之一计算，则以节线为对称边的对称条件($R_n=0, \frac{\partial w}{\partial n}=0$)便成为自然条件，因而可以不需加以处理。

考虑均质、等厚度、正交各向异性的矩形薄板，设其弹性常数为 D_x, D_y, D_1 和 D_{xy} ，且为方便起见，把位移模式(1.1)代入(2.1)，然后对所得泛函求一阶变分，得到

考虑均质、等厚度、正交各向异性的矩形薄板，设其弹性常数为 D_x, D_y, D_1 和 D_{xy} ，且为方便起见，把位移模式(1.1)代入(2.1)，然后对所得泛函求一阶变分，得到

$$\delta \Pi = \delta \mathbf{C}^T \left\{ \sum_e \left[D_x \mathbf{A}_x^e \otimes \mathbf{B}_y + D_y \mathbf{B}_x^e \otimes \mathbf{A}_y + \mathbf{E}_x^e \otimes (1 D_{xy} \mathbf{E}_y - D_1 (\mathbf{C}_y + \mathbf{D}_y)) \right] \mathbf{C} - \iint_{\Omega} q \mathbf{N}^T dx dy \right\} \quad (2.6)$$

其中 \mathbf{C} 是由条元广义坐标 \mathbf{C}^e 按顺序排列而成的总广义坐标列阵，符号 \sum_e 表示对所有条元按普通的有限单元法的矩阵叠加法求和⁽⁸⁾，式中各矩阵表示

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{A}_x^e &= - \int_0^b (\alpha^{(2)T} \alpha^{(2)} + \alpha^{(3)T} \alpha^{(1)} + \alpha^{(1)T} \alpha^{(3)})_{4 \times 4} dx, \\ \mathbf{B}_x^e &= \int_0^b (\alpha^{(1)T} \alpha^{(1)})_{4 \times 4} dx, \\ \mathbf{E}_x^e &= \int_0^b (\alpha^T \alpha)_{4 \times 4} dx, \\ \mathbf{A}_Y &= \int_0^a (\mathbf{Y}^{(2)T} \mathbf{Y})_{(M+1) \times (M+1)} dy, \\ \mathbf{B}_Y &= \int_0^a (\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})_{(M+1) \times (M+1)} dy, \\ \mathbf{C}_Y &= \int_0^a (\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}^{(1)})_{(M+1) \times (M+1)} dy, \\ \mathbf{D}_Y &= \int_0^a (\mathbf{Y}^{(1)T} \mathbf{Y})_{(M+1) \times (M+1)} dy, \\ \mathbf{E}_Y &= \int_0^a (\mathbf{Y}^{(1)T} \mathbf{Y}^{(1)})_{(M+1) \times (M+1)} dy. \end{aligned} \right. \quad (2.7)$$

显然, 由式(2.7)给出的各矩阵均为常数矩阵, 与条元 e 所处的位置无关.

$$\text{记 } \mathbf{K}_e = D_x \mathbf{A}_x^e \otimes \mathbf{B}_y + D_y \mathbf{B}_x^e \otimes \mathbf{A}_y + \mathbf{E}_z^e \otimes \{4D_{xy} \mathbf{E}_y - D_1(\mathbf{C}_y + \mathbf{D}_y)\} \quad (2.8)$$

\mathbf{K}_e 称为板条元 e 的刚度矩阵, 它对于各条元均为同一矩阵, 因而在计算过程中只需计算其中一条元, 然后按对号入座方法叠加上整板的总刚度矩阵 \mathbf{K} , 即

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}_e \quad (2.9)$$

这样, 式(2.6)便化为

$$\delta \Pi = \delta \mathbf{C}^T (\mathbf{K} \mathbf{C} - \iint_{\Omega} q \mathbf{N}^T dx dy)$$

令 $\delta \Pi = 0$ 即可得方程组

$$\mathbf{K} \mathbf{C} = \iint_{\Omega} q \mathbf{N}^T dx dy \quad (2.10)$$

解此方程组便可求出 \mathbf{C} , 再经式(1.1)回代可得到各条元挠度, 然后根据弹性理论中薄板内力矩与曲率关系可计算出各点弯矩, 扭矩与剪力之值.

由于在条元纵向上采用三次 B 样条插值, 在节线上假设 w 和 M_x 都是连续的, 因此, 板中各点的挠度与弯矩都是连续的. 这与普通有限单元法一般的协调元^[6]、普通的有限条^[3,4]等有很大的区别.

对于矩形薄板的固有振动问题, 其泛函表达式为

$$\Pi_1(w) = \iint_{\Omega} \left(G + L - \frac{1}{2} \omega^2 \rho t w^2 \right) dx dy \quad (2.11)$$

其中 ω 为振动自然频率, ρ 为薄板单位面积的质量.

对(2.11)求一阶变分, 得

$$\delta \Pi_1 = \delta \mathbf{C}^T \{ \mathbf{K} - \omega^2 \sum_e \rho t \mathbf{B}_x^e \otimes \mathbf{B}_y \} \mathbf{C} \quad (2.12)$$

式中 \mathbf{K} 是总刚度矩阵(2.9), 若记

$$\mathbf{M} = \sum_e \rho t \mathbf{B}_x^e \otimes \mathbf{B}_y \quad (2.13)$$

\mathbf{M} 称为总质量矩阵, 则由 $\delta \Pi_1 = 0$ 得广义特征值方程:

$$\{ \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \} \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

由此方程得到 ω , 把与 ω^2 相对应的特征矢量 \mathbf{C} 回代入式(1.1), 便可求出与 ω 相对应的固有振型.

对于薄板在横向荷载与中面力联合作用下的弯曲问题, 所采用的泛函为

$$\Pi_2 = \Pi + W \quad (2.15)$$

这里, Π 由式(2.1)给出, W 为薄板中面力势能:

$$W = \iint_{\Omega} U_m dx dy \quad (2.16)$$

$$U_m = \frac{1}{2} \left\{ N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \quad (2.17)$$

其中, N_x 、 N_y 、 N_{xy} 是薄板中面内力。在板弯曲问题中, 内力矩与曲率关系不受中面内力的影响。

当考虑外荷载 $q=0$, 并设中面外力是单向力: $\bar{N}_x = -p$, $\bar{N}_y = \bar{N}_{xy} = 0$ (其中 p 为常数), 则式 (2.16) 成为

$$W = -\frac{p}{2} \int_0^a \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad (2.18)$$

由变分式 $\delta(\Pi + W) = 0$, 得

$$\{ \mathbf{K} - p\mathbf{G} \} = 0 \quad (2.19)$$

式中 \mathbf{K} 由式 (2.9) 给出, 矩阵

$$\mathbf{G} = \sum_{\xi} \mathbf{E}_x^{\xi} \otimes \mathbf{B}_y \quad (2.20)$$

称为总几何刚度矩阵。

对于薄板受双向中面力 $N_x = N_y = -p$, $N_{xy} = 0$ 作用下的稳定问题, 可仿前述方法计算。此时式 (2.16) 就是

$$W = -\frac{p}{2} \iint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (2.21)$$

方程(2.19)中的总几何刚度矩阵为

$$\mathbf{G} = \sum_{\xi} \mathbf{E}_x^{\xi} \otimes \mathbf{B}_y + \sum_{\eta} \mathbf{B}_x^{\eta} \otimes \mathbf{E}_y \quad (2.22)$$

其它步骤则与前述相同。

三、计算结果

应用上面推导的公式, 本文对薄板弯曲的静力、固有振动和稳定问题作了计算。所取的薄板为各向同性方板, 边长为 L , 泊桑比为 0.3。计算结果如表 1—8 所列。

通过一系列的计算可以发现, 尽管在 (1.1) 式中运用了形式简单的多项式来与 B 样条相结合, 但仍保持较高的精度。另外, 三次 B 样条的紧凑性使 \mathbf{K} 、 \mathbf{M} 、 \mathbf{G} 都成为稀疏型变带宽矩阵, 利于节省计算机内存。

表1 四边简支板受均布荷载 q 作用的结果

分划 $N \times M$	中 心 挠 度 w				中 点 弯 矩 M_x			
	本文条元	样条有限元 ⁽⁵⁾	二维综合离散法 ⁽⁸⁾	有限元 ⁽⁹⁾	本文条元	样条有限元 ⁽⁵⁾	二维综合离散法 ⁽⁸⁾	有限元 ⁽⁹⁾
4×4	0.0040702	0.0040645	0.00432	0.004069	0.048154	0.048627	0.05127	0.0465
6×6	0.0040630	0.0040628	—	—	0.048112	0.048339	—	—
8×8	0.0040628	0.0040625	0.004122	(10×10) 0.004063	0.048078	0.048137	0.0478	(10×10) 0.0476
精确值	0.00406236				0.0479			
乘子	qL^4/D				qL^2			

表2 四边固支板受均布荷载 q 作用的结果

分划 $N \times M$	中 心 挠 度 w				边 中 点 弯 矩 M_x			
	本文条元	样条有限元	二维综合离散法	有限元	本文条元	样条有限元	二维综合离散法	有限元
4×4	0.0013255	0.00126114	—	0.001270	0.028715	0.023731	—	0.0229
6×6	0.0012643	0.0012647	—	—	0.023357	0.023605	—	—
8×8	0.0012645	0.00126515	0.00129	(10×10) 0.001266	0.023182	0.023288	0.02496	(10×10) 0.0228
精确值	0.00126532				0.0231			
乘子	qL^4/D				qL^2			

表3 方板在中心处受集中力 P 作用的结果

边界条件	中 心 挠 度 w				边中点弯矩 M_y
	四 边 简 支		四 边 固 支		
分划 $N \times M$	本文条元	样条有限元	本文条元	样条有限元	本文条元
4×4	0.010324	0.011438	0.0011560	0.00543101	-0.2360
6×6	0.0114355	0.011527	0.0054974	0.00553681	-0.1346
8×8	0.011564	0.011559	0.0055711	0.00556983	-0.1312
精 确 值	0.011609		0.0056126		-0.1257
乘 子	PL^2/D		PL^2/D		P

表4 一对边简支另一对边固支方板受均布荷载 q 作用下的中心挠度结果

分划 $N \times M$	本文条元		样条有限元	
	oy 轴向固支, ox 轴向简支		ox 轴向固支, oy 轴向简支	
4 × 4	0.0019214	0.0019150	0.0019577	0.0019150
6 × 6	0.0019182	0.0019168	0.0019223	0.0019168
8 × 8	0.0019206	0.0019184	0.0019211	0.0019184
精确值与乘子	0.00192(qL^4/D)			

表5

四边简支板前3阶固有频率

乘子: $\frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{D}{\rho t}}$

分划 $N \times M$	ω_1	ω_2	ω_3
4 × 4	(1) 19.749304 (2) 19.742171	(1) 49.544148 (2) 49.539734	(1) 49.54344 (2) 49.539734
6 × 6	(1) 19.741097 (2) 19.739756	(1) 49.381296 (2) 49.380641	(1) 49.381301 (2) 49.380641
8 × 8	(1) 19.739794 (2) 19.739376	(1) 49.357728 (2) 49.357542	(1) 49.357729 (2) 49.357567
Blevins ^[10]	19.74	49.35	49.35
样条有限条 ^[4] 8条 × 6段	19.74	49.36	49.38
精确值	19.739209	49.34802	49.34802

表6

四边固支板最低阶固有频率

乘子: $\frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{D}{\rho t}}$

分划 $N \times M$	4 × 4	6 × 6	8 × 8
(1)	36.233463	36.050145	35.991201
(2)	36.059943	36.003202	35.9910
Blevins ^[10]	35.99		
样条有限条 ^[4] 8条 × 6段	35.997		
精确值	35.988		

表7 四边简支方板受单向压缩的临界荷载值

分划 N×M	4×4	6×6	8×8
本文条元	3.81396	4.00076	4.00024
样条有限元	4.00116	4.00022	4.00005
Anderson ⁽¹¹⁾	3.72		(10×10)3.90
Clough ⁽¹²⁾	4.126	—	4.031
Allman ⁽¹³⁾	4.031		4.006
精确值	$4 \pi^2 D/L^2$		

表8 方板受双向压缩时的临界荷载值

边界条件	四边简支		四边固支	
	6×6	8×8	4×4	6×6
本文条元	2.00036	2.00011	5.2010	5.3231
样条有限元	2.00021	2.00011	5.3300	5.3108
精确值与乘子	$2 \pi^2 D/L^2$		5.310	$\pi^2 D/L^2$

参 考 文 献

- [1] 蔡承武、陈树坚、刘世宁, 中山大学学报(自然科学版), 1975, 1.
- [2] 蒋持平, 固体力学学报, 1982, 2.
- [3] 张佑启, 结构分析中的有限条法, 人民交通出版社, 1980.
- [4] 张佑启、吴滋潜、范寿昌, 结构分析中的样条有限条法(中山大学讲义), 1981.
- [5] 石钟慈, 样条有限元, 计算数学, 1979, 1.
- [6] 胡海昌, 弹性力学的变分原理及其应用, 科学出版社, 1981.
- [7] 蔡承武、陈树辉, 中山大学学报(自然科学版), 1979, 1.
- [8] 蔡承武、罗恩、郑永华, 固体力学学报, 1982, 3.
- [9] 罗恩、魏文郎, 华南工学院学报, 7(1979), 4.
- [10] R. D. Blevins, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, VAN Nostrand Reinhold CO, 1979.
- [11] Anderson, R.G., Irons, B.M., Zienkiewicz, O.C., *Vibration and Stability of Plates Using Finite Elements*, *Int. J. Solids and Structs*, 4 (1968), 10, pp.1031—1055.

- [12] Clough, R. W., Falippa, C. A., *A Refind Quadrilateral Element for Analysis of Plate Bending Proceedings of the Second Conference On Matrix Methods in Structural Mechanics*, AFFDL-TR-68-150, December, 1969.
- [13] Allman, D. J., *Finite Element Analysis of Plate Bucking Using a Mixed Variational Principle Proceedings of The Third Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, pp.683-705, 1971.

The Mixed Spline Finite Strip Method of Plates Bending

Tan Zhimin Luo Chang

Abstract

A mixed finite strip method based on combining simple polynomes and cubic B-spline functions is presented, in which the generalized unknown nodal parameters are w , the deflection and M_n , the bending moment. A number of problems of plate bending of statics, vibration and stability under certain edge conditions are calculated. The numerical results obtained by the mixed spline finite strip method show high accuracy and rapid convergence.