

# 算子方程近似解的渐近展开与校正

黄友谦 许跃生

( 计算机科学系 )

## 摘 要

本文利用Green函数研究算子方程离散近似解的渐近展开,并给出了非线性常微分方程两点边值问题和非线性椭圆型方程第一边值问题的差分——样条配置校正解的误差阶。

本文在文[1]的基础上研究更广泛的一类算子方程边值问题,解决了多种数值方法校正解的误差阶问题,为并行算法提供理论依据。作为特例,我们研究了一类非线性常微分方程两点边值问题和非线性椭圆型方程第一边值问题的差分——样条配置校正解的误差阶。

## §1. 算子方程离散近似解的展开

设 $G$ 是 $n$ 维欧氏空间 $R^n$ 中的有界区域, $\bar{G}$ 是 $G$ 的闭包, $\partial G$ 表示 $G$ 的边界。考虑如下的算子方程边值问题:

$$\begin{cases} Au = f(x, u), & x \in G, \\ \Gamma u = q, & x \in \partial G. \end{cases} \quad (1.1)$$

其中, $A$ 、 $\Gamma$ 是线性算子, $f$ 、 $q$ 和 $u$ 分别是定义在 $G$ 、 $\partial G$ 和 $\bar{G}$ 上的函数。

设 $F^h$ 、 $Q^h$ 和 $U^h$ 分别表示定义在 $G$ 、 $\partial G$ 和 $\bar{G}$ 上的函数类。又设 $G_h \subset G$ 表示以 $h$ 为参数的网格。把(1.1)离散化得到

$$\begin{cases} A^h u^h = \lambda^h f(x, u^h), & x \in G_h \\ \Gamma^h u^h = q, & x \in \partial G_h. \end{cases} \quad (1.2)$$

其中, $A^h$ 、 $\Gamma^h$ 和 $\lambda^h$ 是离散的线性算子, $u^h$ 是定义在网格 $\bar{G}_h$ 上的函数。记 $F_h$ 、 $Q_h$ 、 $U_h$ 分别表示由定义在 $G_h$ 、 $\partial G_h$ 和 $\bar{G}_h$ 上的网格函数组成的线性空间,并在 $F_h$ 、 $Q_h$ 和 $U_h$ 上分别引入离散范数 $\|\cdot\|_{F_h}$ 、 $\|\cdot\|_{Q_h}$ 和 $\|\cdot\|_{U_h}$ 。

**定义1** 称离散边值问题(1.2)逼近算子方程边值问题(1.1)是正则的,如果下列四个条件成立:

本文1984年12月收到

(I) 对于任意的函数  $f(x, u) \in F^k$ ,  $k=0, 1, \dots, m$ , 问题 (1.1) 的解存在且唯一,  $u \in U^k$ .

(II) 离散问题 (1.2) 的解存在且唯一, 并且

$$\|uh\|_{U^k} \leq c_1 \|\lambda h f(x, uh)\|_{\Gamma_h} + c_2 \|q\|_{Q^k}, \quad (1.3)$$

其中  $c_1, c_2$  分别为不依赖于  $h, f$  和  $h, q$  的常数.

(III) 对  $u \in U^k, 0 \leq k \leq m$ , 有渐近展开式

$$A^k u = Au + \sum_{i=1}^k h^i B_i + \sigma^k, \quad x \in G_h, \quad (1.4)$$

$$\Gamma^k u = \Gamma u + \sum_{i=1}^k h^i b_i + \rho^k, \quad x \in \partial G_h, \quad (1.5)$$

其中,  $B_i \in F^{k-i}, b_i \in Q^{k-i}$ , 均不依赖于  $h$ , 且

$$\|\sigma^k\|_{F^k} \leq c_3 h^{k+1}, \quad \|\rho^k\|_{Q^k} \leq c_4 h^{k+1},$$

$c_3, c_4$  为不依赖于  $h$  的常数.

(IV) 对任何使  $f(x, u)$  有定义的  $u$ ,

$$\lambda^k f(x, u) = f(x, u) + \sum_{i=1}^m h^i d_i + \delta^k, \quad x \in G_h, \quad (1.6)$$

其中  $d_i \in F^{m-i}$ , 不依赖于  $h$ , 而

$$\|\delta^k\|_{F^k} \leq c_5 h^{m+1},$$

$c_5$  为不依赖于  $h$  的常数.

若在 (1.4)、(1.5) 和 (1.6) 中把  $h^i$  换成  $h^{2i}$  且  $\sigma^k, \rho^k$  和  $\delta^k$  均有  $O(h^{2m+2})$  阶, 则称相应的离散边值问题 (1.2) 逼近算子方程边值问题 (1.1) 是偶正则的, 并称相应的 (1.4)、(1.5) 和 (1.6) 式为偶次阶展开式.

**引理** 设  $f(x, y)$  关于第二个变量  $m+1$  次连续可微, 则

$$\begin{aligned} \text{i) } f(x, u + \sum_{i=1}^m h^i v_i + \eta^k) &= f(x, u) + \sum_{i=1}^m h^i \left( \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} v_i \right. \\ &+ \sum_{\substack{j=1 \\ j_1 + \dots + j_{i-1} = i}}^{i-1} \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_{i-1}} f(x, u)}{\partial u^{k_1 + \dots + k_{i-1}}} \cdot \frac{v_1^{k_1} \dots v_{i-1}^{k_{i-1}}}{k_1! \dots k_{i-1}!} \left. \right) + O(h^{m+1}) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } f(x, u + \sum_{i=1}^m h^{2i} v_i + \tilde{\eta}^k) &= f(x, u) + \sum_{i=1}^m h^{2i} \left( \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} v_i \right. \\ &+ \sum_{\substack{j=1 \\ j_1 + \dots + j_{i-1} = i}}^{i-1} \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_{i-1}} f(x, u)}{\partial u^{k_1 + \dots + k_{i-1}}} \cdot \frac{v_1^{k_1} \dots v_{i-1}^{k_{i-1}}}{k_1! \dots k_{i-1}!} \left. \right) + O(h^{2m+2}) \end{aligned} \quad (1.8)$$

其中,  $v_i$  与  $h$  无关,  $\eta^k = O(h^{m+1}), \tilde{\eta}^k = O(h^{2m+2})$ .

**定理 1** 设问题(1.2)逼近(1.1)是正则的且引理的条件成立, 则对  $f \in F^m, q \in Q^m$ , (1.2)的解有渐近展开式

$$u^h = u + \sum_{i=1}^m h^i v_i + \eta^h, \quad x \in \bar{G}_h,$$

其中,  $\|\eta^h\|_{U_h} \leq c_0 h^{m+1}$ ,  $v_i$  是边值问题

$$\begin{cases} Av_i - \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} v_i = d_i^j - \sum_{j=1}^i B_{i-j,j} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial^{k_1+\dots+k_{i-1}} f(x,u)}{\partial u^{k_1+\dots+k_{i-1}}} \cdot \frac{v_1^{k_1} \dots v_{i-1}^{k_{i-1}}}{k_1! \dots k_{i-1}!}, \\ \Gamma v_i = - \sum_{j=1}^i b_{i-j,j}, \quad x \in \partial G \end{cases} \quad (1.9)$$

$i = 1, 2, \dots, m$ , 的解。这里, 假定

$$\begin{cases} Ahu = Au + \sum_{i=1}^m h^i B_{0,i} + \sigma_0^h, \quad x \in G_h, \\ \Gamma hu = \Gamma u + \sum_{i=1}^m h^i b_{0,i} + \rho_0^h, \quad x \in \partial G_h, \end{cases} \quad (1.10)$$

且

$$\begin{cases} Ahv_i = Av_i + \sum_{j=1}^{m-i} h^j B_{i,j} + \sigma_i^h, \quad x \in G_h, \\ \Gamma hv_i = \Gamma v_i + \sum_{j=1}^{m-i} h^j b_{i,j} + \rho_i^h, \quad x \in \partial G_h, \end{cases} \quad (1.11)$$

$B_{i,j} \in F^{m-i-j}, b_{i,j} \in Q^{m-i-j}$ , 均与  $h$  无关。而

$$\|\sigma_i^h\|_{F_h} \leq C_{i,1} h^{m-i+1}, \quad \|\rho_i^h\|_{Q_h} \leq C_{i,2} h^{m-i+1}.$$

进一步, 如果  $A$  是线性常 (或偏) 微分算子, 则(1.2)的解  $u^h$  有展开式

$$u^h = u + \sum_{i=1}^m h^i \int_G G(x,t) \varphi_i(t) dt + \eta^h, \quad x \in \bar{G}_h, \quad (1.12)$$

$\|\eta^h\|_{U_h} \leq ch^{m+1}$ ,  $G(x,t)$  是(1.9)所确定的微分算子的 Green 函数,  $\varphi_i(t)$  是把(1.9)的边界条件齐次化后相应的方程的右端项。

**证明** 令

$$\eta^h = u^h - u - \sum_{i=1}^m h^i v_i, \quad x \in \bar{G}_h,$$

解出  $u^h$  并将其代入(1.2)得

$$Ah u + \sum_{i=1}^m h^i Ah v_i + A \eta^h = \lambda h f(x, u + \sum_{i=1}^m h^i v_i + \eta^h), \quad x \in G_h, \quad (1.13)$$

$$\Gamma h u + \sum_{i=1}^m h^i \Gamma h v_i + \Gamma \eta^h = q, \quad x \in \partial G_h, \quad (1.14)$$

把(1.10)、(1.11)分别代入(1.13)和(1.14), 并注意到(1.6), 有

$$\sum_{i=1}^m h^i A v_i + \sum_{i=0}^m h^i \sum_{j=1}^{m-i} h^i B_{i,j} + A^h \eta^h + \sum_{i=0}^m h^i \sigma_i^h + f(x, u)$$

$$- f(x, u + \sum_{i=1}^m h^i v_i + \eta^h) = \sum_{i=1}^m h^i d_i + \delta^h, \quad x \in G_h,$$

和

$$\sum_{i=1}^m h^i \Gamma v_i + \sum_{i=0}^m h^i \sum_{j=1}^{m-i} h^i b_{i,j} + \sum_{i=0}^m h^i \rho_i^h + \Gamma^h \eta^h = 0, \quad x \in \partial G_h.$$

令

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m h^i (A v_i + \sum_{j=1}^i B_{i-j, j} - d_i) + f(x, u) - f(x, u + \sum_{i=1}^m h^i v_i + \eta^h) = 0, & (1.15) \\ \sum_{i=1}^m h^i \Gamma v_i + \sum_{i=0}^m h^i \sum_{j=1}^{m-i} h^i b_{i,j} = 0 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} A^h \eta^h = \delta^h - \sum_{i=0}^m h^i \delta_i^h, & x \in G_h, \\ \Gamma^h \eta^h = - \sum_{i=0}^m h^i \rho_i^h, & x \in \partial G_h, \end{cases}$$

由条件(II), 可知

$$\|\eta^h\|_{v_h} \leq Ch^{m+1}.$$

又据引理, (1.15)化成

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m h^i (A v_i + \sum_{j=1}^i B_{i-j, j} - d_i - \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} v_i \\ - \sum_{\substack{j=1 \\ \sum k_j = i}}^{i-1} \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_{i-1}} f(x, u)}{\partial u^{k_1 + \dots + k_{i-1}}} \frac{v_1^{k_1} \dots v_{i-1}^{k_{i-1}}}{k_1! \dots k_{i-1}!} + O(h^{m+1}) = 0 \\ \sum_{i=1}^m h^i (\Gamma v_i + \sum_{j=1}^i b_{i-j, j}) = 0 \end{cases}$$

由正则性假定, 存在唯一的  $v_i$  满足(1.9), 所以, 选取  $v_i, i=1, 2, \dots, m$ , 分别为边值问题(1.9)的解, 定理前一部分得证. 若  $A$  是线性常 (或偏) 微分算子, 据微分算子理论可知, 边值问题(1.9)的解可表成

$$v_i = \int_G G(x, t) \varphi_i(t) dt.$$

本文定理 1 是文献[3]中第六章分解定理(Decomposition Theorem)的推广.

**推论 1** 设问题(1.2)逼近(1.1)是偶正则的且引理的条件成立, 则对  $f \in F^m, q \in Q^m$ , (1.2)的解有展开式

$$u^h = u + \sum_{i=1}^m h^{2i} \tilde{v}_i + \tilde{\eta}^h, \quad x \in \overline{G_h} \quad (1.16)$$

其中,  $\|\tilde{\eta}^h\|_{U_h} \leq c_7 h^{2m+2}$ ,  $\tilde{v}_i (i=1, 2, \dots, m)$  是边值问题

$$\begin{cases} A\tilde{v}_i - \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} \tilde{v}_i = \tilde{d}_i - \sum_{j=1}^i \tilde{B}_{i-j,j} \\ \quad + \sum_{\substack{j=1 \\ \sum k_j=i}}^{i-1} \frac{\partial^{k_1+\dots+k_{i-1}} f(x,u)}{\partial u^{k_1+\dots+k_{i-1}}} \frac{\tilde{v}_1^{k_1} \dots \tilde{v}_{i-1}^{k_{i-1}}}{k_1! \dots k_{i-1}!}, \quad x \in G \\ \Gamma \tilde{v}_i = - \sum_{j=1}^i \tilde{b}_{i-j,j}, \quad x \in \partial G \end{cases} \quad (1.9)'$$

的解。这里  $\tilde{d}_i$ 、 $\tilde{B}_{0,j}$ 、 $\tilde{b}_{0,j}$ 、 $\tilde{B}_{i,j}$  和  $\tilde{b}_{i,j}$  分别是  $\lambda h f(x,u)$ 、 $Ahu$ 、 $\Gamma hu$ 、 $A^h \tilde{v}_i$  和  $\Gamma^h \tilde{v}_i$  类似于 (1.6)、(1.10) 和 (1.11) 式的偶次阶展开式关于  $h^{2i}$  的系数。

进一步, 如果  $A$  是线性常 (或偏) 微分算子, 则 (1.2) 的解  $u^h$  有展开式

$$u^h = u + \sum_{i=1}^m h^{2i} \int_G G(x,t) \tilde{\varphi}_i(t) dt + \tilde{\eta}^h, \quad x \in \overline{G}_h,$$

$\|\tilde{\eta}^h\|_{U_h} \leq c h^{2m+2}$ ,  $G(x,t)$  是定理 1 中已定义的 Green 函数,  $\tilde{\varphi}_i(t)$  是把 (1.9)' 的边界条件齐次化后相应的方程的右端项。

### § 2. 多种数值方法校正解

本节研究能否用精度为  $O(h)$  的  $m+1$  种不同数值方法:

$$\begin{cases} A_i^h u_i^h = \lambda_i^h f, & x \in G_h, \\ \Gamma_i^h u_i^h = q, & x \in \partial G_h, \quad i=1, 2, \dots, m+1, \end{cases} \quad (2.1)$$

求得的 (1.1) 的近似解, 经过适当的组合, 使近似解的精度提高到  $O(h^{m+1})$ ?

设 (2.1) 逼近 (1.1) 是正则的 (或偶正则的), (2.1) 的解  $u_i^h$  相应地有

$$u_i^h = u + \sum_{j=1}^m h^j v_{j,i} + \eta_i^h, \quad x \in \overline{G}_h, \quad i=1, 2, \dots, m+1 \quad (2.2)$$

或

$$u_i^h = u + \sum_{j=1}^m h^{2j} \tilde{v}_{j,i} + \tilde{\eta}_i^h, \quad x \in \overline{G}_h, \quad i=1, 2, \dots, m+1 \quad (2.3)$$

其中  $\eta_i^h = O(h^{m+1})$ ,  $\tilde{\eta}_i^h = O(h^{2m+2})$  记

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ v_{11} & v_{12} & \dots & \dots & v_{1,m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{m1} & v_{m2} & \dots & \dots & v_{m,m+1} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

和

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \tilde{v}_{11} & \tilde{v}_{12} & \cdots & \tilde{v}_{1,m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{v}_{m1} & \tilde{v}_{m2} & \cdots & \tilde{v}_{m,m+1} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

**定理 2** i) 设(2.1)逼近(1.1)是正则的,  $u_i^h$ 有展开式(2.2), 且对  $\forall x \in \bar{G}_h$ ,  $\det M \neq 0$ , 则可以找到  $m+1$  个定义在  $\bar{G}_h$  上的函数  $p_i$ ,  $i=1, 2, \dots, m+1$ , 使

$$\sum_{i=1}^{m+1} p_i u_i^h = u + O(h^{m+1}).$$

ii) 设(2.1)逼近(1.1)是偶正则的,  $u_i^h$ 有展开式(2.3), 且对  $\forall x \in \bar{G}_h$ ,  $\det \tilde{M} \neq 0$ , 则可以找到  $m+1$  个定义在  $\bar{G}_h$  上的函数  $\tilde{p}_i$ ,  $i=1, 2, \dots, m+1$ , 使

$$\sum_{i=1}^{m+1} \tilde{p}_i u_i^h = u + O(h^{2m+2})$$

证明 仅证 i), ii) 的证明类似.

由假设(2.2)成立, 用  $p_i$  乘以(2.2)并对  $i$  求和得

$$\sum_{i=1}^{m+1} p_i u_i^h = u \sum_{i=1}^{m+1} p_i + \sum_{i=1}^m h^i \sum_{j=1}^{m+1} p_j v_{ij} + \sum_{i=1}^{m+1} p_i n_i^h$$

由于  $\det M \neq 0$ , 所以线性方程组

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m+1} p_i = 1 \\ \sum_{i=1}^{m+1} p_i v_{i,j} = 0, \quad j=1, 2, \dots, m \end{cases}$$

存在唯一解, 把  $p_i$  取成上述方程组的解, 便有

$$\sum_{i=1}^{m+1} p_i u_i^h = u + \sum_{i=1}^{m+1} p_i n_i^h = u + O(h^{m+1}).$$

定理 2 证毕.

### §3. 非线性两点边值问题校正解

考虑非线性两点边值问题

$$\begin{cases} y'' = f(x, y), \quad a < x < b \\ y(a) = y(b) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

其中, 对  $a \leq x \leq b$ ,  $|y| \leq \infty$ ,  $f_y(x, y)$  连续且  $f_y(x, y) \geq 0$ . 由不动点理论, 可证(3.1)的解存在且唯一.

对  $[a, b]$  作等距分割

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b.$$

其中,  $x_i = a + ih$ ,  $h = \frac{b-a}{n+1}$ . 记

$$\begin{cases} L_1^h \bar{y}_i = \frac{\bar{y}_{i-1} - 2\bar{y}_i + \bar{y}_{i+1}}{h^2}, & \lambda_1^h f_i = f(x_i, \bar{y}_i), \\ L_2^h y_i = L_1^h y_i, & \lambda_2^h f_i = \frac{1}{6} [f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 4f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]. \end{cases} \quad (3.2)$$

那么, (3.1)的差分格式和三次样条配置格式分别为

$$\begin{cases} L_1^h \bar{y}_i = \lambda_1^h f_i, & i = 1, 2, \dots, n, \\ \bar{y}_0 = \bar{y}_{n+1} = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

和

$$\begin{cases} L_2^h y_i = \lambda_2^h f_i, & i = 1, 2, \dots, n, \\ y_0 = y_{n+1} = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

**定理 3** 设  $\bar{y}_i$  和  $y_i$  分别是 (3.1) 的差分解和三次样条配置解, 且  $y(x) \in C^6[a, b]$ ,  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$  连续, 则

$$\frac{1}{2} (\bar{y}_i + y_i) = y(x_i) + O(h^4). \quad (3.5)$$

证明 由 Taylor 公式,

$$\begin{aligned} L_1^h \bar{y}_i &= y''(x_i) + \frac{h^2}{12} y^{(4)}(x_i) + \frac{h^4}{360} y^{(6)}(x_i) + O(h^6) \\ \lambda_2^h f(x_i, y(x_i)) &= f(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{6} y^{(4)}(x_i) + \frac{h^4}{72} y^{(6)}(x_i) + O(h^6) \\ \lambda_1^h f(x_i, y(x_i)) &= f(x_i, y(x_i)). \end{aligned}$$

应用推论 1

$$\begin{cases} \bar{y}_i = y(x_i) - \frac{h^2}{12} \int_a^b G(x_i, t) y^{(4)}(t) dt + O(h^4), \\ y_i = y(x_i) + \frac{h^2}{12} \int_a^b G(x_i, t) y^{(4)}(t) dt + O(h^4). \end{cases} \quad (3.6)$$

其中  $G(x, t)$  为边值问题

$$\begin{cases} u''(x) - f_y(x, y(x))u(x) = 0 \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

的 Green 函数. 由 (3.6) 式立得 (3.5).

### §4. 半线性椭圆型方程第一边值问题校正解

考虑半线性椭圆型方程第一边值问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = f(u, x, y), (x, y) \in G \\ u|_{\Gamma} = \varphi(x, y). \end{cases} \quad (4.1)$$

其中 $G$ 是 $xy$ 平面上的闭正方形域,  $\Gamma$ 为 $G$ 的边界. 设(4.1)的解存在且唯一. 将 $G$ 作正方形分划, 网距为 $h$ . 相应的五点差分格式和三次样条配置格式分别为

$$\begin{cases} \Delta_1^h \bar{u}_{i,j} = \lambda_1^h f(\bar{u}_{i,j}, x_i, y_j), \\ \bar{u}_{i,j} = \varphi(x_i, y_j), \quad i=0, n+1, \text{ 或 } j=0, n+1. \end{cases} \quad (4.2)$$

和

$$\begin{cases} \Delta_2^h u_{i,j} = \lambda_2^h f(u_{i,j}, x_i, y_j), \\ u_{i,j} = \varphi(x_i, y_j), \quad i=0, n+1, \text{ 或 } j=0, n+1. \end{cases} \quad (4.3)$$

其中:

$$\Delta_1^h \bar{u}_{i,j} = \frac{1}{h^2} (\bar{u}_{i,j-1} + \bar{u}_{i,j+1} + \bar{u}_{i-1,j} + \bar{u}_{i+1,j} - 4\bar{u}_{i,j})$$

$$\lambda_1^h f(\bar{u}_{i,j}, x_i, y_j) = f(\bar{u}_{i,j}, x_i, y_j)$$

$$\Delta_2^h u_{i,j} = \frac{1}{3h^2} (u_{i-1,j-1} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j} - 8u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j+1} + u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}) \quad (4.4)$$

$$\lambda_2^h f(u_{i,j}, x_i, y_j) = \frac{1}{9} \left( \frac{1}{4} f_{i-1,j-1} + f_{i,j-1} + \frac{1}{4} f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j} + 4f_{i,j} + f_{i+1,j} + \frac{1}{4} f_{i-1,j+1} + f_{i,j+1} + \frac{1}{4} f_{i+1,j+1} \right)$$

**定理 4** 设 $u(x, y) \in C^0(G)$ ,  $\frac{\partial^2 f(u, x, y)}{\partial u^2}$  连续, 并记 $\bar{u}_{i,j}$ 和 $u_{i,j}$ 分别是差分解和三次样

条配置解, 则

$$\frac{1}{2} (\bar{u}_{i,j} + u_{i,j}) = u(x_i, y_j) + O(h^4). \quad (4.5)$$

证明 由Taylor公式

$$\Delta_1^h \bar{u}_{i,j} = \Delta u(x_i, y_j) + \frac{h^2}{12} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)_{i,j} + O(h^4)$$

$$\lambda_1^h f(\bar{u}_{i,j}, x_i, y_j) = f(\bar{u}_{i,j}, x_i, y_j)$$

$$\Delta_2^h f(u_{i,j}, x_i, y_j) = \Delta u(x_i, y_j) + h^2 \left[ \frac{1}{12} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)_{i,j} + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_{i,j} \right] + O(h^4)$$

$$\lambda_2^h f(u_{i,j}, x_i, y_j) = f(u_{i,j}, x_i, y_j) + h^2 \left[ \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)_{i,j} + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_{i,j} \right] + O(h^4)$$

应用推论 1

$$\begin{cases} \bar{u}_{i,j} = u(x_i, y_j) + \frac{h^2}{12} \iint_G G(x_i, y_j; t_1, t_2) \left[ \frac{\partial^4 u(t_1, t_2)}{\partial t_1^4} + \frac{\partial^4 u(t_1, t_2)}{\partial t_2^4} \right] dt_1 dt_2 + O(h^4) \\ u_{i,j} = u(x_i, y_j) + \frac{h^2}{12} \iint_G G(x_i, y_j; t_1, t_2) \left[ \frac{\partial^4 u(t_1, t_2)}{\partial t_1^4} + \frac{\partial^4 u(t_1, t_2)}{\partial t_1^2 \partial t_2^2} + \frac{\partial^4 u(t_1, t_2)}{\partial t_2^4} \right] dt_1 dt_2 + O(h^4) \end{cases}$$

其中,  $G(x, y; t_1, t_2)$ 为边值问题

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) - f_u(u,x,y)u(x,y) = 0 \\ u(x,y)|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

的Green函数, 再据定理 2, 即知(4.5)成立.

参 考 文 献

- [1] 黄友谦, 一类非线性微分方程的差分、样条校正解, 中山大学学报(自然科学版), 1983, 1.
- [2] 黄友谦, 样条插值函数误差的渐近估计式及其在数值微分中的应用, 中山大学学报(自然科学版), 1979, 3.
- [3] G. I. Marchuk, Methods of Numerical Mathematics, Translated by Arthur A. Brown, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1982.

(1) **The Asymptotic Expansion and Correction for  
Approximating Solution of Operator Equation.**

Huang Youqian Xu Yuesheng

Abstract

In this paper, we study the asymptotic expansion for approximating discrete solution of operator equation by Green's function, and solve the problem of estimating the error order in the correcting solution by several kinds of numerical method. As a result, we give the error order in the correcting solution by Finite-difference and Splines-collocation for a class of non-linear two points boundary-value problem and the first kind of boundary-value problem of elliptic partial differential equation.

$$(1) \quad 0 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{21} \\ b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{21} \\ c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} A$$

的 Dirichlet 问题的唯一性。  
 式(1)中,  $F_1(x,y) = A_1 u + B_1 v + C_1 w$ ,  $F_2(x,y) = A_2 u + B_2 v + C_2 w$ ,  $F_3(x,y) = A_3 u + B_3 v + C_3 w$ ,  $F_4(x,y) = A_4 u + B_4 v + C_4 w$ ,  $F_5(x,y) = A_5 u + B_5 v + C_5 w$ ,  $F_6(x,y) = A_6 u + B_6 v + C_6 w$ ,  $F_7(x,y) = A_7 u + B_7 v + C_7 w$ ,  $F_8(x,y) = A_8 u + B_8 v + C_8 w$ ,  $F_9(x,y) = A_9 u + B_9 v + C_9 w$ ,  $F_{10}(x,y) = A_{10} u + B_{10} v + C_{10} w$ ,  $F_{11}(x,y) = A_{11} u + B_{11} v + C_{11} w$ ,  $F_{12}(x,y) = A_{12} u + B_{12} v + C_{12} w$ ,  $F_{13}(x,y) = A_{13} u + B_{13} v + C_{13} w$ ,  $F_{14}(x,y) = A_{14} u + B_{14} v + C_{14} w$ ,  $F_{15}(x,y) = A_{15} u + B_{15} v + C_{15} w$ ,  $F_{16}(x,y) = A_{16} u + B_{16} v + C_{16} w$ ,  $F_{17}(x,y) = A_{17} u + B_{17} v + C_{17} w$ ,  $F_{18}(x,y) = A_{18} u + B_{18} v + C_{18} w$ ,  $F_{19}(x,y) = A_{19} u + B_{19} v + C_{19} w$ ,  $F_{20}(x,y) = A_{20} u + B_{20} v + C_{20} w$ ,  $F_{21}(x,y) = A_{21} u + B_{21} v + C_{21} w$ ,  $F_{22}(x,y) = A_{22} u + B_{22} v + C_{22} w$ ,  $F_{23}(x,y) = A_{23} u + B_{23} v + C_{23} w$ ,  $F_{24}(x,y) = A_{24} u + B_{24} v + C_{24} w$ ,  $F_{25}(x,y) = A_{25} u + B_{25} v + C_{25} w$ ,  $F_{26}(x,y) = A_{26} u + B_{26} v + C_{26} w$ ,  $F_{27}(x,y) = A_{27} u + B_{27} v + C_{27} w$ ,  $F_{28}(x,y) = A_{28} u + B_{28} v + C_{28} w$ ,  $F_{29}(x,y) = A_{29} u + B_{29} v + C_{29} w$ ,  $F_{30}(x,y) = A_{30} u + B_{30} v + C_{30} w$ ,  $F_{31}(x,y) = A_{31} u + B_{31} v + C_{31} w$ ,  $F_{32}(x,y) = A_{32} u + B_{32} v + C_{32} w$ ,  $F_{33}(x,y) = A_{33} u + B_{33} v + C_{33} w$ ,  $F_{34}(x,y) = A_{34} u + B_{34} v + C_{34} w$ ,  $F_{35}(x,y) = A_{35} u + B_{35} v + C_{35} w$ ,  $F_{36}(x,y) = A_{36} u + B_{36} v + C_{36} w$ ,  $F_{37}(x,y) = A_{37} u + B_{37} v + C_{37} w$ ,  $F_{38}(x,y) = A_{38} u + B_{38} v + C_{38} w$ ,  $F_{39}(x,y) = A_{39} u + B_{39} v + C_{39} w$ ,  $F_{40}(x,y) = A_{40} u + B_{40} v + C_{40} w$ ,  $F_{41}(x,y) = A_{41} u + B_{41} v + C_{41} w$ ,  $F_{42}(x,y) = A_{42} u + B_{42} v + C_{42} w$ ,  $F_{43}(x,y) = A_{43} u + B_{43} v + C_{43} w$ ,  $F_{44}(x,y) = A_{44} u + B_{44} v + C_{44} w$ ,  $F_{45}(x,y) = A_{45} u + B_{45} v + C_{45} w$ ,  $F_{46}(x,y) = A_{46} u + B_{46} v + C_{46} w$ ,  $F_{47}(x,y) = A_{47} u + B_{47} v + C_{47} w$ ,  $F_{48}(x,y) = A_{48} u + B_{48} v + C_{48} w$ ,  $F_{49}(x,y) = A_{49} u + B_{49} v + C_{49} w$ ,  $F_{50}(x,y) = A_{50} u + B_{50} v + C_{50} w$ ,  $F_{51}(x,y) = A_{51} u + B_{51} v + C_{51} w$ ,  $F_{52}(x,y) = A_{52} u + B_{52} v + C_{52} w$ ,  $F_{53}(x,y) = A_{53} u + B_{53} v + C_{53} w$ ,  $F_{54}(x,y) = A_{54} u + B_{54} v + C_{54} w$ ,  $F_{55}(x,y) = A_{55} u + B_{55} v + C_{55} w$ ,  $F_{56}(x,y) = A_{56} u + B_{56} v + C_{56} w$ ,  $F_{57}(x,y) = A_{57} u + B_{57} v + C_{57} w$ ,  $F_{58}(x,y) = A_{58} u + B_{58} v + C_{58} w$ ,  $F_{59}(x,y) = A_{59} u + B_{59} v + C_{59} w$ ,  $F_{60}(x,y) = A_{60} u + B_{60} v + C_{60} w$ ,  $F_{61}(x,y) = A_{61} u + B_{61} v + C_{61} w$ ,  $F_{62}(x,y) = A_{62} u + B_{62} v + C_{62} w$ ,  $F_{63}(x,y) = A_{63} u + B_{63} v + C_{63} w$ ,  $F_{64}(x,y) = A_{64} u + B_{64} v + C_{64} w$ ,  $F_{65}(x,y) = A_{65} u + B_{65} v + C_{65} w$ ,  $F_{66}(x,y) = A_{66} u + B_{66} v + C_{66} w$ ,  $F_{67}(x,y) = A_{67} u + B_{67} v + C_{67} w$ ,  $F_{68}(x,y) = A_{68} u + B_{68} v + C_{68} w$ ,  $F_{69}(x,y) = A_{69} u + B_{69} v + C_{69} w$ ,  $F_{70}(x,y) = A_{70} u + B_{70} v + C_{70} w$ ,  $F_{71}(x,y) = A_{71} u + B_{71} v + C_{71} w$ ,  $F_{72}(x,y) = A_{72} u + B_{72} v + C_{72} w$ ,  $F_{73}(x,y) = A_{73} u + B_{73} v + C_{73} w$ ,  $F_{74}(x,y) = A_{74} u + B_{74} v + C_{74} w$ ,  $F_{75}(x,y) = A_{75} u + B_{75} v + C_{75} w$ ,  $F_{76}(x,y) = A_{76} u + B_{76} v + C_{76} w$ ,  $F_{77}(x,y) = A_{77} u + B_{77} v + C_{77} w$ ,  $F_{78}(x,y) = A_{78} u + B_{78} v + C_{78} w$ ,  $F_{79}(x,y) = A_{79} u + B_{79} v + C_{79} w$ ,  $F_{80}(x,y) = A_{80} u + B_{80} v + C_{80} w$ ,  $F_{81}(x,y) = A_{81} u + B_{81} v + C_{81} w$ ,  $F_{82}(x,y) = A_{82} u + B_{82} v + C_{82} w$ ,  $F_{83}(x,y) = A_{83} u + B_{83} v + C_{83} w$ ,  $F_{84}(x,y) = A_{84} u + B_{84} v + C_{84} w$ ,  $F_{85}(x,y) = A_{85} u + B_{85} v + C_{85} w$ ,  $F_{86}(x,y) = A_{86} u + B_{86} v + C_{86} w$ ,  $F_{87}(x,y) = A_{87} u + B_{87} v + C_{87} w$ ,  $F_{88}(x,y) = A_{88} u + B_{88} v + C_{88} w$ ,  $F_{89}(x,y) = A_{89} u + B_{89} v + C_{89} w$ ,  $F_{90}(x,y) = A_{90} u + B_{90} v + C_{90} w$ ,  $F_{91}(x,y) = A_{91} u + B_{91} v + C_{91} w$ ,  $F_{92}(x,y) = A_{92} u + B_{92} v + C_{92} w$ ,  $F_{93}(x,y) = A_{93} u + B_{93} v + C_{93} w$ ,  $F_{94}(x,y) = A_{94} u + B_{94} v + C_{94} w$ ,  $F_{95}(x,y) = A_{95} u + B_{95} v + C_{95} w$ ,  $F_{96}(x,y) = A_{96} u + B_{96} v + C_{96} w$ ,  $F_{97}(x,y) = A_{97} u + B_{97} v + C_{97} w$ ,  $F_{98}(x,y) = A_{98} u + B_{98} v + C_{98} w$ ,  $F_{99}(x,y) = A_{99} u + B_{99} v + C_{99} w$ ,  $F_{100}(x,y) = A_{100} u + B_{100} v + C_{100} w$ .