中 山 大 学 学 报
1985年第4期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI №. 4, 1985

算子方程近似解的渐近展开与校正

黄友谦 许跃生
（计算机科学系）

摘 要

本文利用Green函数研究算子方程离散近似解的渐近展开．并给出了非线性常微分方程两点边值问题和非线性椭圆型方程第一边值问题的差分——样条配置校正解的误差阶．

本文在文〔1〕的基础上研究更广泛的一类算子方程边值问题，解决了多种数值方法校正解的误差阶问题，为并行算法提供理论依据。作为特例，我们研究了一类非线性常微分方程两点边值问题和非线性椭圆型方程第一边值问题的差分——样条配置校正解的误差阶。

§1. 算子方程离散近似解的展开

设G是n维欧氏空间R^n中的有界区域，$\bar{G}$是G的闭包，∂G表示G的边界．考虑如下的算子方程边值问题：

$$\begin{cases} Au=f(x,u), & x\in G, \\ \Gamma u=q, & x\in\partial G. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，A、Γ是线性算子，f、q和u分别是定义在G、∂G和$\bar{G}$上的函数。

设F^h，Q^h和U^h分别表示定义在G，∂G和$\bar{G}$上的函数类．又设$G_h\subset G$表示以h为参数的网格。把(1.1)离散化得到

$$\begin{cases} A^hu^h=\lambda^hf(x,u^h), & x\in G_h \\ \Gamma^hu^h=q, & x\in\partial G_h. \end{cases} \tag{1.2}$$

其中，A^h、Γ^h和λ^h是离散的线性算子，u^h是定义在网格$\bar{G}_h$上的函数．记F_h，Q_h，U_h分别表示由定义在G_h，∂G_h和$\bar{G}_h$上的网格函数组成的线性空间，并在F_h，Q_h和U_h上分别引入离散范数$\|\cdot\|_{F_h}$，$\|\cdot\|_{Q_h}$和$\|\cdot\|_{U_h}$。

定义1 称离散边值问题(1.2)逼近算子方程边值问题(1.1)是正则的，如果下列四个条件成立：

本文1984年12月收到

（Ⅰ）对于任意的函数 $f(x,u)\in F^k$，$k=0,1,\cdots,m$，问题（1.1）的解存在且唯一，$u\in U^k$。

（Ⅱ）离散问题(1.2)的解存在且唯一，并且

$$\|u^h\|_{U_h}\leqslant c_1\|\lambda^h f(x,u^h)\|_{F_h}+c_2\|q\|_{Q_h}, \tag{1.3}$$

其中 c_1，c_2 分别为不依赖于 h、f 和 h、q 的常数。

（Ⅲ）对 $u\in U^k$，$0\leqslant k\leqslant m$，有渐近展开式

$$A^h u=Au+\sum_{i=1}^{k}h^iB_i+\sigma^h,\quad x\in G_h, \tag{1.4}$$

$$\Gamma^h u=\Gamma u+\sum_{i=1}^{k}h^ib_i+\rho^h,\quad x\in\partial G_h, \tag{1.5}$$

其中，$B_i\in F^{k-i}$，$b_i\in Q^{k-i}$，均不依赖于 h，且

$$\|\sigma^h\|_{F_h}\leqslant c_3h^{k+1},\ \|\rho^h\|_{Q_h}\leqslant c_4h^{k+1},$$

c_3、c_4 为不依赖于 h 的常数。

（Ⅳ）对任何使 $f(x,u)$ 有定义的 u，

$$\lambda^h f(x,u)=f(x,u)+\sum_{i=1}^{m}h^id_i+\delta^h,\qquad x\in G_h, \tag{1.6}$$

其中 $d_i\in F^{m-i}$，不依赖于 h，而

$$\|\delta^h\|_{F_h}\leqslant c_5h^{m+1},$$

c_5 为不依赖于 h 的常数。

若在(1.4)、(1.5)和(1.6)中把 h^i 换成 h^{2i} 且 σ^h、ρ^h 和 δ^h 均有 $O(h^{2m+2})$ 阶，则称相应的离散边值问题(1.2)逼近算子方程边值问题（1.1）是偶正则的，并称相应的(1.4)、(1.5)和(1.6)式为偶次阶展开式。

引理　设 $f(x,y)$ 关于第二个变量 $m+1$ 次连续可微，则

i)
$$f\Big(x,u+\sum_{i=1}^{m}h^iv_i+\eta^h\Big)=f(x,u)+\sum_{i=1}^{m}h^i\Bigg(\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}v_i+\sum_{\sum_{j=1}^{i-1}jk_j=i}\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_{i-1}}f(x,u)}{\partial u^{k_1+\cdots+k_{i-1}}}\cdot\frac{v_1^{k_1}\cdots v_{i-1}^{k_{i-1}}}{k_1!\cdots k_{i-1}!}\Bigg)+O(h^{m+1}) \tag{1.7}$$

ii)
$$f\Big(x,u+\sum_{i=1}^{m}h^{2i}v_i+\tilde{\eta}^h\Big)=f(x,u)+\sum_{i=1}^{m}h^{2i}\Bigg(\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}v_i+\sum_{\sum_{j=1}^{i-1}jk_j=i}\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_{i-1}}f(x,u)}{\partial u^{k_1+\cdots+k_{i-1}}}\cdot\frac{v_1^{k_1}\cdots v_{i-1}^{k_{i-1}}}{k_1!\cdots k_{i-1}!}\Bigg)+O(h^{2m+2}) \tag{1.8}$$

其中，v_i 与 h 无关，$\eta^h=O(h^{m+1})$、$\tilde{\eta}^h=O(h^{2m+2})$。

定理 1　设问题(1.2)逼近(1.1)是正则的且引理的条件成立，则对 $f\epsilon F^m$，$q\epsilon Q^m$，(1.2)的解有渐近展开式

$$u^h=u+\sum_{i=1}^{m}h^i\ v_i+\eta^h,\quad x\epsilon\bar{G}_h,$$

其中，$\|\eta^h\|U_h\leqslant c_0h^{m+1}$，$v_i$是边值问题

$$\begin{cases} Av_i-\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}v_i=d_i-\sum\limits_{j=1}^{i}B_{i-j,j}+\sum\limits_{\sum\limits_{j=1}^{i-1}jk_j=i}\dfrac{\partial^{k_1+\cdots+k_{i-1}}f(x,u)}{\partial u^{k_1+\cdots+k_{i-1}}}\cdot\dfrac{v_1^{k_1}\cdots v_{i-1}^{k_{i-1}}}{k_1!\cdots k_{i-1}!}, & x\epsilon G \\ \Gamma v_i=-\sum\limits_{j=1}^{i}b_{i-j,j},\quad x\epsilon\partial G \end{cases}\tag{1.9}$$

$i=1,2,\cdots,m$，的解。这里，假定

$$\begin{cases} A^hu=Au+\sum\limits_{i=1}^{m}h^iB_{0,i}+\sigma_0^h, & x\epsilon G_h, \\ \Gamma^hu=\Gamma u+\sum\limits_{i=1}^{m}h^ib_{0,i}+\rho_0^h, & x\epsilon\partial G_h, \end{cases}\tag{1.10}$$

且

$$\begin{cases} A^hv_i=Av_i+\sum\limits_{j=1}^{m-i}h^jB_{i,j}+\sigma_i^h, & x\epsilon G_h, \\ \Gamma^hv_i=\Gamma v_i+\sum\limits_{j=1}^{m-i}h^jb_{i,j}+\rho_i^h, & x\epsilon\partial G_h, \end{cases}\tag{1.11}$$

$B_{i,j}\epsilon F^{m-i-j}$，$b_{i,j}\epsilon Q^{m-i-j}$，均与$h$无关。而

$$\|\sigma_i^h\|_{F_h}\leqslant C_{i,1}h^{m-i+1},\quad \|\rho_i^h\|_{Q_h}\leqslant C_{i,2}h^{m-i+1}.$$

进一步，如果A是线性常（或偏）微分算子，则(1.2)的解u^h有展开式

$$u^h=u+\sum_{i=1}^{m}h^i\int_G G(x,t)\varphi_i(t)dt+\eta^h,\quad x\epsilon\overline{G_h},\tag{1.12}$$

$\|\eta^h\|_{U_h}\leqslant ch^{m+1}$，$G(x,t)$是(1.9)所确定的微分算子的 Green 函数，$\varphi_i(t)$是把(1.9)的边界条件齐次化后相应的方程的右端项。

证明　令

$$\eta^h=u^h-u-\sum_{i=1}^{m}h^iv_i,\quad x\epsilon\overline{G_h},$$

解出u^h并将其代入(1.2)得

$$A^hu+\sum_{i=1}^{m}h^iA^hv_i+A^h\eta^h=\lambda^hf(x,u+\sum_{i=1}^{m}h^iv_i+\eta^h),\quad x\epsilon G_h,\tag{1.13}$$

$$\Gamma^hu+\sum_{i=1}^{m}h^i\Gamma^hv_i+\Gamma^h\eta^h=q,\quad x\epsilon\partial G_h,\tag{1.14}$$

把(1.10)、(1.11)分别代入(1.13)和(1.14)，并注意到(1.6)，有

$$\sum_{i=1}^{m} h^i A v_i + \sum_{i=0}^{m} h^i \sum_{j=1}^{m-i} h^j B_{i,j} + A^h \eta^h + \sum_{i=0}^{m} h^i \sigma_i^h + f(x,u)$$

$$- f(x, u + \sum_{i=1}^{m} h^i v_i + \eta^h) = \sum_{i=1}^{m} h^i d_i + \delta^h, \qquad x \epsilon G_h,$$

和

$$\sum_{i=1}^{m} h^i \Gamma v_i + \sum_{i=0}^{m} h^i \sum_{j=1}^{m-i} h^j b_{i,j} + \sum_{i=0}^{m} h^i \rho_i^h + \Gamma^h \eta^h = 0, \qquad x \epsilon \partial G_h.$$

令

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} h^i (A v_i + \sum_{j=1}^{i} B_{i-j,j} - d_i) + f(x,u) - f(x, u + \sum_{i=1}^{m} h^i v_i + \eta^h) = 0, \\ \sum_{i=1}^{m} h^i \Gamma v_i + \sum_{i=0}^{m} h^i \sum_{j=1}^{m-i} h^j b_{i,j} = 0 \end{cases} \tag{1.15}$$

得

$$\begin{cases} A^h \eta^h = \delta^h - \sum_{i=0}^{m} h^i \delta_i^h, & x \epsilon G_h, \\ \Gamma^h \eta^h = -\sum_{i=0}^{m} h^i \rho_i^h, & x \epsilon \partial G_h, \end{cases}$$

由条件(Ⅱ)，可知

$$\|\eta^h\|_{v_h} \leqslant C h^{m+1}.$$

又据引理，(1.15)化成

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} h^i \Big(A v_i + \sum_{j=1}^{i} B_{i-j,j} - d_i - \dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u} v_i \\ \qquad - \sum_{\sum_{j=1}^{i-1} j k_j = i} \dfrac{\partial^{k_1+\cdots+k_{i-1}} f(x,u)}{\partial u^{k_1+\cdots+k_{i-1}}} \dfrac{v_1^{k_1} \cdots v_{i-1}^{k_{i-1}}}{k_1! \cdots k_{i-1}!} + O(h^{m+1}) = 0 \\ \sum_{i=1}^{m} h^i (\Gamma v_i + \sum_{j=1}^{i} b_{i-j,j}) = 0 \end{cases}$$

由正则性假定，存在唯一的v_i满足(1.9)，所以，选取$v_i, i=1,2,\cdots,m$，分别为边值问题(1.9)的解，定理前一部分得证. 若A是线性常（或偏）微分算子，据微分算子理论可知，边值问题(1.9)的解可表成

$$v_i = \int_G G(x,t) \varphi_i(t) dt.$$

本文定理1是文献〔3〕中第六章分解定理(Decomposition Theorem)的推广.

推论1 设问题(1.2)逼近(1.1)是偶正则的且引理的条件成立，则对$f \epsilon F^m$，$q \epsilon Q^m$，(1.2)的解有展开式

$$u^h = u + \sum_{i=1}^{m} h^{2i} \tilde{v}_i + \tilde{\eta}^h, \qquad x \epsilon \overline{G_h} \tag{1.16}$$

其中，$\|\tilde{\eta}^h\|_{U_h}\leqslant c_7 h^{2m+2}$，$\tilde{v}_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是边值问题

$$\begin{cases} A\tilde{v}_i-\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}\tilde{v}_i=\tilde{d}_i-\sum\limits_{j=1}^{i}\tilde{B}_{i-j,j} \\ \qquad +\sum\limits_{\sum\limits_{j=1}^{i-1}jk_j=i}\dfrac{\partial^{k_1+\cdots+k_{i-1}}f(x,u)}{\partial u^{k_1+\cdots+k_{i-1}}}\dfrac{\tilde{v}_1^{k_1}\cdots\tilde{v}_{i-1}^{k_{i-1}}}{k_1!\cdots k_{i-1}!},\quad x\in G \\ \Gamma\tilde{v}_i=-\sum\limits_{j=1}^{i}\tilde{b}_{i-j,j}, \qquad x\in\partial G \end{cases} \tag{1.9$'$}$$

的解。这里$\tilde{d}_j$、$\tilde{B}_{0,j}$、$\tilde{b}_{0,j}$，$\tilde{B}_{i,j}$和$\tilde{b}_{i,j}$分别是$\lambda^h f(x,u)$、$A^h u$、$\Gamma^h u$、$A^h\tilde{v}_i$和$\Gamma^h\tilde{v}_i$类似于(1.6)、(1.10)和(1.11)式的偶次阶展开式关于h^{2i}的系数。

进一步，如果A是线性常（或偏）微分算子，则(1.2)的解u^h有展开式

$$u^h=u+\sum_{i=1}^{m}h^{2i}\int_G G(x,t)\tilde{\varphi}_i(t)dt+\tilde{\eta}^h,\qquad x\in\overline{G}_h,$$

$\|\tilde{\eta}^h\|_{U_h}\leqslant ch^{2m+2}$，$G(x,t)$是定理1中已定义的 Green 函数。$\tilde{\varphi}_i(t)$是把(1.9)$'$的边界条件齐次化后相应的方程的右端项。

§2. 多种数值方法校正解

本节研究能否用精度为$O(h)$的$m+1$种不同数值方法：

$$\begin{cases} A_i^h u_i^h=\lambda_i^h f, & x\in G_h, \\ \Gamma_i^h u_i^h=q, & x\in\partial G_h,\quad i=1,2,\cdots,m+1, \end{cases} \tag{2.1}$$

求得的(1.1)的近似解，经过适当的组合，使近似解的精度提高到$O(h^{m+1})$?

设(2.1)逼近(1.1)是正则的（或偶正则的），(2.1)的解u_i^h相应地有

$$u_i^h=u+\sum_{j=1}^{m}h^j v_{j,i}+\eta_i^h,\qquad x\in\overline{G}_h,\quad i=1,2,\cdots,m+1 \tag{2.2}$$

或

$$u_i^h=u+\sum_{j=1}^{m}h^{2j}\tilde{v}_{j,i}+\tilde{\eta}_i^h,\qquad x\in\overline{G}_h,\quad i=1,2,\cdots,m+1 \tag{2.3}$$

其中$\eta_i^h=O(h^{m+1})$，$\tilde{\eta}_i^h=O(h^{2m+2})$记

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ v_{11} & v_{12} & \cdots\cdots & v_{1,m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots\cdots & v_{m,m+1} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

和

$$\widetilde{M}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ \tilde{v}_{11} & \tilde{v}_{12} & \cdots\cdots & \tilde{v}_{1,m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{v}_{m1} & \tilde{v}_{m2} & \cdots\cdots & \tilde{v}_{m,m+1} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

定理2 i)设(2.1)逼近(1.1)是正则的，u_i^h有展开式(2.2)，且对$\forall x\in\overline{G}_h$，$\det M\neq 0$，则可以找到$m+1$个定义在$\overline{G}_h$上的函数$p_i$，$i=1,2,\cdots,m+1$，使

$$\sum_{i=1}^{m+1}p_iu_i^h=u+O(h^{m+1}).$$

ii)设(2.1)逼近(1.1)是偶正则的，u_i^h有展开式(2.3)，且对$\forall x\in\overline{G}_h$，$\det\widetilde{M}\neq 0$，则可以找到$m+1$个定义在$\overline{G}_h$上的函数$\tilde{p}_i$，$i=1,2,\cdots,m+1$，使

$$\sum_{i=1}^{m+1}\tilde{p}_iu_i^h=u+O(h^{2m+2})$$

证明 仅证i)，ii)的证明类似。

由假设(2.2)成立，用p_i乘以(2.2)并对i求和得

$$\sum_{i=1}^{m+1}p_iu_i^h=u\sum_{i=1}^{m+1}p_i+\sum_{j=1}^{m}h^j\sum_{i=1}^{m+1}p_iv_{i,j}+\sum_{i=1}^{m+1}p_i\eta_i^h$$

由于$\det M\neq 0$，所以线性方程组

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m+1}p_i=1\\ \sum\limits_{i=1}^{m+1}p_iv_{i,j}=0, \quad j=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

存在唯一解，把p_i取成上述方程组的解，便有

$$\sum_{i=1}^{m+1}p_iu_i^h=u+\sum_{i=1}^{m+1}p_i\eta_i^h=u+O(h^{m+1}).$$

定理2证毕。

§3. 非线性两点边值问题校正解

考虑非线性两点边值问题

$$\begin{cases}y''=f(x,y), \quad a<x<b\\ y(a)=y(b)=0.\end{cases} \tag{3.1}$$

其中，对$a\leqslant x\leqslant b$，$|y|\leqslant\infty$，$f_y(x,y)$连续且$f_y(x,y)\geqslant 0$。由不动点理论，可证(3.1)的的解存在且唯一。

对$[a,b]$作等距分划

$$\pi:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n<x_{n+1}=b.$$

其中，$x_i=a+ih$，$h=\dfrac{b-a}{n+1}$。记

$$\begin{cases} L_1^h\tilde{y}_i=\dfrac{\tilde{y}_{i-1}-2\tilde{y}_i+\tilde{y}_{i+1}}{h^2}, & \lambda_1^h f_i=f(x_i,\tilde{y}_i), \\ L_2^h y_i=L_1^h y_i, & \lambda_2^h f_i=\dfrac{1}{6}\Big[f(x_{i-1},y_{i-1})+4f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_{i+1})\Big]. \end{cases} \tag{3.2}$$

那么，(3.1)的差分格式和三次样条配置格式分别为

$$\begin{cases} L_1^h\tilde{y}_i=\lambda_1^h f_i, \quad i=1,2,\cdots n. \\ \tilde{y}_0=\tilde{y}_{n+1}=0. \end{cases} \tag{3.3}$$

和

$$\begin{cases} L_1^h y_i=\lambda_2^h f_i, \quad i=1,2,\cdots n, \\ y_0=y_{n+1}=0. \end{cases} \tag{3.4}$$

定理3　设$\tilde{y}_i$和y_i分别是(3.1)的差分解和三次样条配置解，且$y(x)\in C^6[a,b]$，$\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$连续，则

$$\frac{1}{2}(\tilde{y}_i+y_i)=y(x_i)+O(h^4). \tag{3.5}$$

证明　由Taylor公式，

$$L_1^h y(x_i)=y''(x_i)+\frac{h^2}{12}y^{(4)}(x_i)+\frac{h^4}{360}y^{(6)}(x_i)+O(h^6)$$

$$\lambda_2^h f(x_i,y(x_i))=f(x_i,y(x_i))+\frac{h^2}{6}y^{(4)}(x_i)+\frac{h^4}{72}y^{(6)}(x_i)+O(h^6)$$

$$\lambda_1^h f(x_i,y(x_i))=f(x_i,y(x_i)).$$

应用推论1

$$\begin{cases} \tilde{y}_i=y(x_i)-\dfrac{h^2}{12}\displaystyle\int_a^b G(x_i,t)y^{(4)}(t)dt+O(h^4). \\ y_i=y(x_i)+\dfrac{h^2}{12}\displaystyle\int_a^b G(x_i,t)y^{(4)}(t)dt+O(h^4). \end{cases} \tag{3.6}$$

其中$G(x,t)$为边值问题

$$\begin{cases} u''(x)-f_y(x,y(x))u(x)=0 \\ u(a)=u(b)=0 \end{cases} \tag{3.7}$$

的Green函数。由(3.6)式立得(3.5)。

§4. 半线性椭圆型方程第一边值问题校正解

考虑半线性椭圆型方程第一边值问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=f(u,x,y), (x,y)\in G \\ u|_{\Gamma}=\varphi(x,y). \end{cases} \tag{4.1}$$

其中G是xy平面上的闭正方形域，Γ为G的边界。设(4.1)的解存在且唯一。将G作正方形分划，网距为h。相应的五点差分格式和三次样条配置格式分别为

$$\begin{cases} \Delta_1^h \tilde{u}_{i,j} = \lambda_1^h f(\tilde{u}_{i,j}, x_i, y_j), \\ \tilde{u}_{i,j} = \varphi(x_i, y_j), \quad i = 0, n+1, \text{或} j = 0, n+1. \end{cases} \tag{4.2}$$

和

$$\begin{cases} \Delta_2^h u_{i,j} = \lambda_2^h f(u_{ij}, x_i, y_j), \\ u_{i,j} = \varphi(x_i, y_j), \quad i = 0, n+1, \text{或} j = 0, n+1. \end{cases} \tag{4.3}$$

其中：

$$\Delta_1^h \tilde{u}_{i,j} = \frac{1}{h^2}(\tilde{u}_{i,j-1} + \tilde{u}_{i,j+1} + \tilde{u}_{i-1,j} + \tilde{u}_{i+1,j} - 4\tilde{u}_{i,j})$$

$$\lambda_1^h f(\tilde{u}_{ij}, x_i, y_j) = f(\tilde{u}_{ij}, x_i, y_j)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2^h u_{ij} = \frac{1}{3h^2}&(u_{i-1,j-1} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j} - 8u_{ij} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j+1} \\ &+ u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}) \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} \lambda_2^h f(u_{ij}, x_i, y_j) = \frac{1}{9}\Big(&\frac{1}{4}f_{i-1,j-1} + f_{i,j-1} + \frac{1}{4}f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j} + 4f_{ij} \\ &+ f_{i+1,j} + \frac{1}{4}f_{i-1,j+1} + f_{i,j+1} + \frac{1}{4}f_{i+1,j+1}\Big) \end{aligned}$$

定理 4 设$u(x,y)\in C^6(G)$，$\dfrac{\partial^2 f(u,x,y)}{\partial u^2}$连续，并记$\tilde{u}_{ij}$和$u_{ij}$分别是差分解和三次样条配置解，则

$$\frac{1}{2}(\tilde{u}_{ij} + u_{ij}) = u(x_i, y_j) + O(h^4). \tag{4.5}$$

证明 由Taylor公式

$$\Delta_1^h \tilde{u}_{i,j} = \Delta u(x_i, y_j) + \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{ij} + O(h^4)$$

$$\lambda_1^h f(\tilde{u}_{ij}, x_i, y_j) = f(\tilde{u}_{ij}, x_i, y_j)$$

$$\Delta_2^h f(u_{ij}, x_i = \Delta u(x_i, y_j) + h^2\left[\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{ij} + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_{ij}\right] + O(h^4)$$

$$\lambda_2^h f(u_{ij}, x_i, y_j) = f(u_{ij}, x_i, y_j) + h^2\left[\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^2}\right)_{ij} + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_{ij}\right] + O(h^4)$$

应用推论1

$$\begin{cases} \tilde{u}_{ij} = u(x_i, y_j) - \dfrac{h^2}{12}\displaystyle\iint_G G(x_i, y_j; t_1, t_2)\left[\frac{\partial^4 u(t_1, t_2)}{\partial t_1^4} + \frac{\partial^4 u(t_1, t_2)}{\partial t_2^4}\right]dt_1 dt_2 + O(h^4) \\ u_{ij} = u(x_i, y_j) + \dfrac{h^2}{12}\displaystyle\iint_G G(x_i, y_j; t_1, t_2)\left[\frac{\partial^4 u(t_1, t_2)}{\partial t_1^4} + \frac{\partial^4 u(t_1, t_2)}{\partial t_1^4}\right]dt_1 dt_2 + O(h^4) \end{cases}$$

其中，$G(x, y; t_1, t_2)$为边值问题

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) - f_u(u,x,y)u(x,y) = 0 \\ u(x,y)|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

的Green函数，再据定理2，即知(4.5)成立。

参考文献

〔1〕 黄友谦，一类非线性微分方程的差分、样条校正解，中山大学学报(自然科学版)，1983,1.

〔2〕 黄友谦，样条插值函数误差的渐近估计式及其在数值微分中的应用，中山大学学报（自然科学版），1979，3.

〔3〕 G. I. Marchuk, Methods of Numerical Mathematics, Translated by Arthur A. Brown, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1982.

The Asymptotic Expansion and Correction for Approximating Solution of Operator Equation

Huang Youqian　　*Xu Yuesheng*

Abstract

In this paper, we study the asymptotic expansion for approximating discrete solution of operator equation by Green's function, and solve the problem of estimating the error order in the correcting solution by several kinds of numerical method. As a result, we give the error order in the correcting solution by Finite-difference and Splines-collocation for a class of non-linear two points boundary-value problem and the first kind of boundary-valve problem of elliptic partial differential equation.