

# 高阶非线性波动方程组的差分方法

郭柏灵

常谦顺

(北京应用物理和计算数学研究所)

(中国科学院应用数学研究所)

## 摘要

本文首先用 Galerkin 方法证明一类非线性波动方程组初边值问题的适定性, 其次还讨论该问题的有限差分方法, 证明了一类差分格式的收敛性和稳定性.

## §1 引言

在文献[1]中讨论了一类非线性波动方程的周期解(对时间  $t$ ) 存在性问题. 本文主要是考虑该类非线性波动方程组的近似解. 定解问题是

$$\begin{cases} \ddot{u}_{tt} + \ddot{u}_{xxxx} + a \ddot{u}_t + \ddot{g}(\ddot{u}) = \ddot{f}(x, t), & 0 < x < 1, t > 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} \ddot{u}(0, t) = \ddot{u}(1, t) = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} \ddot{u}_{xx}(0, t) = \ddot{u}_{xx}(1, t) = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} \ddot{u}|_{t=0} = \ddot{u}_0(x), \quad \ddot{u}_t|_{t=0} = \ddot{u}_1(x), \end{cases} \quad (1.4)$$

其中  $\ddot{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m, \dots, u_M)$  是  $M$  维未知函数的向量,  $\ddot{f}(x, t)$ ,  $\ddot{u}_0(x)$ ,  $\ddot{u}_1(x)$  都是  $M$  维已知函数的向量,  $\ddot{g}(\ddot{u})$  是自变量为  $u_1, u_2, \dots, u_M$  的  $M$  维已知函数向量,  $a$  是常数.

本文采用通常的符号: 区域  $Q_T = [0, 1] \times [0, T]$ ,  $H^m$  为 Sobolev 空间,  $H_0^m$  为具有紧致支集的无穷可微函数依模  $H^m$  的闭包. 对连续函数向量  $\ddot{u}$  和  $\ddot{v}$  定义内积为

$$(\ddot{u}, \ddot{v}) = \sum_{m=1}^M \int_0^1 u_m \ddot{v}_m dx.$$

对离散向量  $\ddot{u}_j, \ddot{v}_j, 1 \leq j \leq J-1$ , 定义内积为

$$\ddot{u}_j, \ddot{v}_j = \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^{J-1} u_{mj} \cdot v_{mj} \cdot h.$$

与内积相应地我们定义 Sobolev 空间中向量的范数, 用  $\tau$  和  $h$  分别表示时间和空间步长.

本文1984年4月收到

## §2 微分方程广义解的存在唯一性

本节中用 Galerkin 方法证明初边值问题 (1.1) — (1.4) 解的存在唯一性。首先选取  $L$  维试验函数空间  $V_L \subset H^2 \cap H_0^1$ ,  $V_L$  是由满足边界条件 (1.2) 和 (1.3) 的基函数  $\{\varphi_l(x)\}$  所张的空间,  $1 \leq l \leq L$ , 并且当  $L \rightarrow \infty$  时  $V_L$  在  $H^2$  中稠密。例如这种基函数可以取为  $\varphi_l(x) = \sin l\pi x$ 。

构造问题 (1.1) — (1.4) 的近似解为

$$\bar{u}^L(x, t) = \sum_{l=1}^L \bar{a}_l(t) \cdot \varphi_l(x), \tag{2.1}$$

其中  $\bar{u}^L(x, t) = (u_1^L(x, t), u_2^L(x, t), \dots, u_M^L(x, t))$ ,  $\bar{a}_l(t) = (\alpha_{1,l}(t), \alpha_{2,l}(t), \dots, \alpha_{M,l}(t))$ 。

根据 Galerkin 方法, 这些系数向量  $\bar{a}_l(t)$  应满足以下常微分方程组的初值问题

$$\begin{cases} (u_{m,tt}^L + u_{m,xxxx}^L + a u_{m,t}^L + g_m(\bar{u}^L), \varphi_l) = (f_m(x, t), \varphi_l), \\ l = 1, 2, \dots, L, m = 1, 2, \dots, M, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$u_m^L \Big|_{t=0} = u_{0,m}^L(x), \quad u_{m,t}^L \Big|_{t=0} = u_{1,m}^L(x), \tag{2.3}$$

其中  $u_{0,m}^L(x)$  和  $u_{1,m}^L(x)$  分别是  $u_{0,m}(x)$  和  $u_{1,m}(x)$  在空间  $V_L$  上的投影。

下面我们对问题 (2.2) 和 (2.3) 的解作先验估计。在以下引理条件和所作先验估计下可以知道非线性常微分方程组的初值问题 (2.2) 和 (2.3) 在区间  $[0, T]$  上有解存在。

**引理 1** 设 (i)  $g_m(u_1, u_2, \dots, u_M) = \frac{\partial G(u_1, u_2, \dots, u_M)}{\partial u_m}$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $G(u_1, u_2, \dots, u_M) \geq 0$ ;

(ii)  $f(x, t) \in L_2(Q_T)$ ; (iii)  $u_0(x) \in H^2 \cap H_0^1$ ,  $u_1(x) \in L_2$ ,  $G(\bar{u}_0(x)) \in L_1$ , 则对

问题 (2.2) 和 (2.3) 的解有先验估计

$$\| \bar{u}_t^L \|_{L_2}^2 + \| \bar{u}_{xx}^L \|_{L_2}^2 + 2 \int_0^t G(\bar{u}^L) dx \leq c_1, \quad 0 \leq t \leq T, \text{ 其中常数 } c_1 \text{ 与 } L \text{ 无关.}$$

**证** 将 (2.2) 式乘以  $\alpha_{mlt}$ , 并对  $l$  求和得到

$$(u_{m,tt}^L + u_{m,xxxx}^L + a u_{m,t}^L + g_m(\bar{u}^L), u_{m,t}^L) = (f_m, u_{m,t}^L), \tag{2.4}$$

因

$$(u_{m,tt}^L, u_{m,t}^L) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| u_{m,t}^L \|_{L_2}^2,$$

从边界条件 (1.2), (1.3) 得到

$$(u_{m,xxxx}^L, u_{m,t}^L) = (u_{m,xxx}^L, u_{m,xxx}^L) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| u_{m,xx}^L \|_{L_2}^2,$$

$$\sum_{m=1}^M (g_m(\bar{u}^L), u_{mt}^L) = \frac{d}{dt} \int_0^1 G(\bar{u}^L) dx.$$

$$(f_m, u_{mt}^L) \leq \frac{1}{2} \|f_m\|_{L_2}^2 + \frac{1}{2} \|u_{mt}^L\|_{L_2}^2.$$

这样由(2.4)对  $m$  从 1 到  $M$  求和得出

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \bar{u}_t^L \|_{L_2}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \bar{u}_{xx}^L \|_{L_2}^2 + a \| \bar{u}_t^L \|_{L_2}^2 + \frac{d}{dt} \int_0^1 G(\bar{u}^L) dx \\ \leq \frac{1}{2} \| f(x,t) \|_{L_2}^2 + \frac{1}{2} \| \bar{u}_t^L \|_{L_2}^2. \end{aligned}$$

上式对  $t$  积分有

$$\| \bar{u}_t^L \|_{L_2}^2 + \| \bar{u}_{xx}^L \|_{L_2}^2 + 2 \int_0^1 G(\bar{u}^L) dx \leq k_1 + k_2 \int_0^t \| \bar{u}_t^L \|_{L_2}^2 dt$$

其中  $k_1$  和  $k_2$  是正常数. 再利用 Gronwall 不等式得到本引理的结论.

**引理 2** 在引理 1 的条件下有估计式

$$\| \bar{u}_t^L \|_{L_2} \leq c_2, \quad \| \bar{u}^L \|_{L_\infty} \leq c_2, \quad \| \bar{u}_{xx}^L \|_{L_2} \leq c_2, \quad \| \bar{u}_x^L \|_{L_\infty} \leq c_2, \quad 0 \leq t \leq T,$$

其中常数  $c_2$  与  $L$  无关.

**证** 因为

$$\frac{d}{dt} \| u_m^L \|_{L_2}^2 = 2(u_{mt}^L, u_m^L) \leq \| u_m^L \|_{L_2}^2 + \| u_{mt}^L \|_{L_2}^2 \leq \| u_m^L \|_{L_2}^2 + c_1,$$

由此得出  $\sum_{m=1}^M \| u_m^L \|_{L_2}^2 \leq c_2.$

再从 Sobolev 不等式和引理 1 得到本引理的结论.

**引理 3** 设引理 1 的条件满足, 并设

$$g_m \in C^1, \quad 1 \leq m \leq M, \quad \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} \in L_2(Q_T), \quad u_0(x) \in H^1 \cap H_0^1, \quad u_1(x) \in H^2, \quad \text{则有估计式}$$

$$\| \bar{u}_{tt}^L \|_{L_2} \leq c_3, \quad 0 \leq t \leq T,$$

其中常数  $c_3$  与  $L$  无关.

**证** 将(2.2)式对  $t$  微商一次, 乘以  $a_{m} \bar{u}_{tt}^L$  并对  $l$  求和得到

$$( \bar{u}_{m}^L \bar{u}_{tt}^L + \bar{u}_{mxx}^L \bar{u}_{tt}^L + a \bar{u}_{m}^L \bar{u}_{tt}^L - (g_m(\bar{u}^L))_t, \bar{u}_{m}^L \bar{u}_{tt}^L ) = (f_{mt}, \bar{u}_{m}^L \bar{u}_{tt}^L). \tag{2.5}$$

因为

$$\begin{aligned} \left| ((g_m(\bar{u}^L))_t, \bar{u}_{m}^L \bar{u}_{tt}^L) \right| &= \left| \int_0^1 (\text{grad } g_m \cdot \bar{u}_t^L) \bar{u}_{m}^L \bar{u}_{tt}^L dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 (\text{grad } g_m \cdot \bar{u}_t^L)^2 dx + \int_0^1 (\bar{u}_{m}^L \bar{u}_{tt}^L)^2 dx \right\} \end{aligned}$$

记

$$k_g = \max_{\substack{|\eta_m| \leq \sqrt{c_2} \\ 1 \leq m \leq M}} \|\text{grad } g_m(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_M)\|_{L_\infty}$$

则有

$$\left| \left( (g_m(\tilde{u}^L))_t, u_{mtt}^L \right) \right| \leq \frac{1}{2} M k_g^2 \|\tilde{u}_t^L\|_{L_2}^2 + \frac{1}{2} \|u_{mtt}^L\|_{L_2}^2 .$$

这样从(2.5)式对m求和得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{u}_{tt}^L\|_{L_2}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{u}_{xxt}^L\|_{L_2}^2 + a \|\tilde{u}_{tt}^L\|_{L_2}^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \|\tilde{f}_t(x, t)\|_{L_2}^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{u}_{tt}^L\|_{L_2}^2 + \frac{1}{2} M^2 k_g^2 \|\tilde{u}_t^L\|_{L_2}^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{u}_{tt}^L\|_{L_2}^2, \end{aligned}$$

即

$$\|\tilde{u}_{tt}^L\|_{L_2}^2 + \|\tilde{u}_{xxt}^L\|_{L_2}^2 \leq k_3 + k_4 \int_0^t \|\tilde{u}_{tt}^L\|_{L_2}^2 dt$$

其中 $k_3$ 和 $k_4$ 是正常数。由此得出本引理的结论。

**引理 4** 在引理3的条件下有估计式

$$\|\tilde{u}_{xxxx}^L\|_{L_2}^2 \leq c_4, \quad 0 \leq t \leq T,$$

其中 $c_4$ 是与L无关的正常数。

**证** 将(2.2)式乘以 $(lx)^4 \alpha_l$  并对l求和, 注意到我们选择的 $\phi_l(x) = \sin l\pi x$ 得到

$$\left( u_{mtt}^L + u_{mxxxx}^L + a u_{mt}^L + g_m(\tilde{u}^L), u_{mxxxx}^L \right) = (f_m(x, t), u_{mxxxx}^L), \quad (2.6)$$

由此得出

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_{mxxxx}^L\|_{L_2}^2 & \leq \left( \|u_{mtt}^L\|_{L_2} + |a| \|u_{mt}^L\|_{L_2} + \|g_m(\tilde{u}^L)\|_{L_2} + \|f_m\|_{L_2} \right) \|u_{mxxxx}^L\|_{L_2} \\ & \leq k_5 \|u_{mxxxx}^L\|_{L_2}, \end{aligned}$$

其中 $k_5$ 是正常数。上式直接给出

$$\|\tilde{u}_{xxxx}^L\|_{L_4}^2 \leq c_2$$

我们定义定解问题(1.1)–(1.4)的广义解为函数向量  $\tilde{u}(x, t) \in L_\infty(0, T; H^4 \cap H_0^4)$ ,  $\tilde{u}_{tt} \in L_\infty(0, T; L_2)$ , 并且它满足下列积分等式和条件

$$\begin{cases} (u_{mtt} + u_{mxxxx} + a u_{mt} + g_m(\tilde{u}), v) = (f_m, v), \quad 1 \leq m \leq M, \quad \forall v \in H_0^4, \\ \tilde{u}_{xx}|_{x=0} = \tilde{u}_{xx}|_{x=1} = 0, \\ \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{u}_0(x), \quad \tilde{u}_t|_{t=0} = \tilde{u}_1(x) \end{cases} \quad (2.7)$$

于是从上面证明的引理 1 至引理 4 中得出的一致有界性估计和致密性原理我们可得到下列定理。

**定理 1** 设(i)  $g_m = \frac{\partial G(u_1, u_2, \dots, u_M)}{\partial u_m}$ ,  $1 \leq m \leq M$ ,  $G(u_1, u_2, \dots, u_M) \geq 0$ ,

$g_m(u_1, u_2, \dots, u_M) \in C^1$ ; (ii)  $f(x, t) \in L_2(Q_T)$ ,  $\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \in L_2(Q_T)$ ; (iii)  $u_0(x) \in H^1 \cap H_0^1$ ,

$u_1(x) \in H^2$ ,  $G(u_0(x)) \in L_1$ , 则定解问题(1.1)–(1.4)的广义解存在.

根据一致有界性估计, 用通常证明唯一性的办法. 不难证明下面唯一性定理

**定理 2** 在定理 1 的条件下, 定解问题(1.1)–(1.4)的广义解是唯一的.

### §3 差分方法

将区间  $[0, 1]$  以步长  $h = \frac{1}{J}$  分为  $J$  份, 网格点为  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = h, \dots, x_J = 1$ .

对定解问题(1.1)–(1.4)我们考虑如下的隐式差分格式:

$$\left( u_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}\bar{t}} + \left( u_{m,j}^{n+1} \right)_{xx\bar{x}\bar{x}} + a \left( u_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}} + g_m \left( u_{1,j}^{n+1}, u_{2,j}^{n+1}, \dots, u_{M,j}^{n+1} \right) = f_{m,j}^{n+1},$$

$$m = 1, 2, \dots, M, \quad j = 1, 2, \dots, J-1, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.1)$$

$$u_{m,0}^n = 0, \quad u_{m,J}^n = 0, \quad (3.2)$$

$$\left( u_{m,0}^n \right)_{x\bar{x}} = 0, \quad \left( u_{m,J}^n \right)_{x\bar{x}} = 0, \quad (3.3)$$

$$u_{m,j}^0 = u_{m,0}(x_j), \quad \left( u_{m,j}^0 \right)_{\bar{t}} = u_{m,1}(x_j), \quad (3.4)$$

我们补充定义  $u_{m,-1}^n$  和  $u_{m,J+1}^n$  由(3.3)式求出,  $u_{m,j}^{-1}$  由(3.4)式求出. 为了研究差分问题(3.1)–(3.4)的收敛性和稳定性首先对差分解作先验估计.

**引理 5** 设引理 1 的条件满足, 并设  $g_m(u_1, u_2, \dots, u_M) \in C^1$ ,  $1 \leq m \leq M$ ,

$\sum_{m,k=1}^M \frac{\partial G}{\partial u_m \cdot \partial u_k} \eta_m \cdot \eta_k$  非负定,  $\forall \vec{\eta} \in R^M$ , 则对(3.1)–(3.4)的解有估计式

$$\begin{aligned} \left\| \bar{u}_j^{n+1} \right\|_{L_2}^2 &\leq c_5, & \left\| \left( \bar{u}_j^{n+1} \right)_x \right\|_{L_2}^2 &\leq c_5, & \left\| \left( \bar{u}_j^{n+1} \right)_{x\bar{x}} \right\|_{L_2}^2 &\leq c_5, \\ \left\| \left( \bar{u}_j^{n+1} \right)_{\bar{t}} \right\|_{L_2}^2 &\leq c_5, & \left\| \bar{u}_j^{n+1} \right\|_{L_\infty}^2 &\leq c_5, & \left\| \left( \bar{u}_j^{n+1} \right)_x \right\|_{L_\infty}^2 &\leq c_5, \end{aligned}$$

其中常数  $c_5$  与  $n, j$  无关,  $0 \leq n\tau \leq T$ .

**证** 将(3.1)式与  $\left( u_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}}$  作内积得到

$$\begin{aligned} \left( \left( u_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}\bar{t}}, \left( u_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}} \right) + \left( \left( u_{m,j}^{n+1} \right)_{xx\bar{x}\bar{x}}, \left( u_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}} \right) + a \left( \left( u_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}}, \left( u_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}} \right) \\ + \left( g_m \left( \bar{u}_j^{n+1} \right), \left( u_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}} \right) = \left( f_{m,j}^{n+1}, \left( u_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}} \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

上式中各项推导如下

$$\left( \left( u_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}\bar{t}}, \left( u_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}} \right) = \frac{1}{2} \left( \left\| \left( u_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}} \right\|_{L_2}^2 \right)_{\bar{t}} + \frac{1}{2} \tau \left\| \left( u_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}\bar{t}} \right\|_{L_2}^2,$$

作 Taylor 展开并利用本引理中非负定条件得到

$$\sum_{m=1}^M \left( g_m(\bar{u}_j^{n+1}), (\bar{u}_{m,j}^{n+1})_{\bar{t}} \right) \geq \left[ h \sum_{j=1}^{J-1} G(\bar{u}_j^{n+1}) \right]_{\bar{t}}$$

考虑到边界条件(2.2)和(2.3)有

$$\begin{aligned} \left( (u_{m,j}^{n+1})_{xx\bar{x}\bar{x}}, (\bar{u}_{m,j}^{n+1})_{\bar{t}} \right) &= -h \sum_{j=0}^{J-1} (u_{m,j}^{n+1})_{x\bar{x}x} (\bar{u}_{m,j}^{n+1})_{x\bar{t}} \\ &= h \sum_{j=1}^{J-1} (u_{m,j}^{n+1})_{x\bar{x}} (\bar{u}_{m,j}^{n+1})_{x\bar{x}\bar{t}} = \frac{1}{2} \left( \| (u_{m,j}^{n+1})_{x\bar{x}} \|_{L_2}^2 \right)_{\bar{t}} + \frac{1}{2} \tau \| (u_{m,j}^{n+1})_{x\bar{x}\bar{t}} \|_{L_2}^2, \end{aligned}$$

利用这些式子, 从(3.5)对m求和得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left( \| (\bar{u}_j^{n+1})_{\bar{t}} \|_{L_2}^2 \right)_{\bar{t}} + \frac{1}{2} \left( \| (\bar{u}_j^{n+1})_{x\bar{x}} \|_{L_2}^2 \right)_{\bar{t}} + a \| (\bar{u}_j^{n+1})_{\bar{t}} \|_{L_2}^2 + \left[ h \sum_{j=1}^{J-1} G(\bar{u}_j^{n+1}) \right]_{\bar{t}} \\ &\leq \frac{1}{2} \| \bar{f}_j^{n+1} \|_{L_2}^2 + \frac{1}{2} \| (\bar{u}_j^{n+1})_{\bar{t}} \|_{L_2}^2. \end{aligned}$$

利用离散算子的Gronwall不等式有

$$\| (\bar{u}_j^{n+1})_{\bar{t}} \|_{L_2}^2 \leq c_5, \quad \| (\bar{u}_j^{n+1})_{x\bar{x}} \|_{L_2}^2 \leq c_5.$$

因为

$$\left( \| \bar{u}_j^{n+1} \|_{L_2}^2 \right)_{\bar{t}} \leq \frac{1}{2} \| \bar{u}_j^{n+1} \|_{L_2}^2 + \frac{1}{2} \| \bar{u}_j^{n+1} \|_{L_2}^2 + \| (\bar{u}_j^{n+1})_{\bar{t}} \|_{L_2}^2,$$

由此得出

$$\| \bar{u}_j^{n+1} \|_{L_2}^2 \leq c_5,$$

再利用Sobolev嵌入定理得到本引理的结论。

**定理 3.** 设引理 5 的条件满足, 并设微分方程解  $u(x, t)$  对  $t$  有有界的三阶导数, 对  $x$  有有界的六阶偏导数,  $u(x, t)$  对  $t$  的三阶和对  $x$  的四阶混合偏导数有界, 则差分问题(3.1) — (3.4) 的解依  $L_\infty$  模收敛到微分方程(1.1) — (1.4) 的解, 收敛阶数为  $O(\tau + h^2)$ 。

**证** 令  $\varepsilon_{m,j}^n = u_m(x_j, t_n) - u_{m,j}^n$ , 则从(1.1) — (1.4) 和(3.1) — (3.4) 得到误差所满足的方程

$$\begin{aligned} &\left( \varepsilon_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}\bar{t}} + \left( \varepsilon_{m,j}^{n+1} \right)_{ixx\bar{x}\bar{x}} + a \left( \varepsilon_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}} + g_m(\bar{u}(x_j, t_{n+1})) - g_m(\bar{u}_j^{n+1}) \\ &= R_{m,j}^{n+1}, \quad 1 \leq m \leq M, \quad 1 \leq j \leq J-1, \quad n = 0, 1, \dots, \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\varepsilon_{m,0}^n = 0, \quad \varepsilon_{m,J}^n = 0, \quad 1 \leq m \leq M, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{3.7}$$

$$\left( \varepsilon_{m,0}^n \right)_{x\bar{x}} = R_{m,0}^n, \quad \left( \varepsilon_{m,J}^n \right)_{x\bar{x}} = R_{m,J}^n, \quad 1 \leq m \leq M, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{3.8}$$

$$\varepsilon_{m,j}^0 = 0, \quad \left( \varepsilon_{m,j}^0 \right)_{\bar{t}} = R_{m,j}^0, \quad 1 \leq m \leq M, \quad 0 \leq j \leq J, \tag{3.9}$$

作Taylor展开, 得到对截断误差的估计式

$$\begin{aligned} & \left| R_{m,j}^n \right| \leq k_6(\tau + h^2), & \left| R_{m,j}^0 \right| \leq k_6 \cdot \tau, \\ & \left| R_{m,o}^n \right| \leq k_6 \cdot h^2, & \left| R_{m,J}^n \right| \leq k_6 \cdot h^2, \\ & \left| \left( R_{m,o}^n \right)_{\bar{t}} \right| \leq k_6(\tau + h^2), & \left| \left( R_{m,J}^n \right)_{\bar{t}} \right| \leq k_6(\tau + h^2), \\ & \left| \left( R_{m,o}^n \right)_{\bar{t}\bar{t}} \right| \leq k_6(\tau + h^2), & \left| \left( R_{m,J}^n \right)_{\bar{t}\bar{t}} \right| \leq k_6(\tau + h^2), \quad k_6 \text{ 是正常数.} \end{aligned}$$

为了处理非齐次边界条件, 引入离散量  $z_{m,j}^n$ , 它满足下列方程式

$$\begin{cases} \left( z_{m,j}^n \right)_{x\bar{x}} = \frac{1}{J} \left( j R_{m,J}^n + (J-j) R_{m,o}^n \right), & 1 \leq m \leq M, \quad n = 1, 2, \dots, \\ z_{m,o}^n = 0, & z_{m,J}^n = 0, & z_{m,j}^0 = 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

从上式我们能得出

$$\begin{aligned} & \left( z_{m,j}^n \right)_{xx\bar{x}\bar{x}} = 0, \\ & z_{m,j}^n = \frac{h^2}{6} \cdot j(J-j) \left[ \frac{j}{J} \left( R_{m,J}^n - R_{m,o}^n \right) - \left( 2R_{m,o}^n + R_{m,J}^n \right) \right], \end{aligned}$$

由这个  $z_{m,j}^n$  的表达式算出

$$\begin{aligned} & \left\| z_{m,j}^n \right\|_{L_2} \leq k_7(J + h^2), & \left\| \left( z_{m,j}^n \right)_{x\bar{x}} \right\|_{L_2} \leq k_7(\tau + h^2), \\ & \left\| \left( z_{m,j}^n \right)_{\bar{t}} \right\|_{L_2} \leq k_7(\tau + h^2), & \left\| \left( z_{m,j}^n \right)_{\bar{t}\bar{t}} \right\|_{L_2} \leq k_7(\tau + h^2). \end{aligned}$$

其中  $k_7$  是正常数.

令  $y_{m,j}^n = \varepsilon_{m,j}^n - z_{m,j}^n$ , 则离散量  $y_{m,j}^n$  满足的定解问题是

$$\begin{aligned} & \left( \left( y_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}\bar{t}} + \left( y_{m,j}^{n+1} \right)_{xx\bar{x}\bar{x}} + a \left( y_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}} + g_m(\bar{u}(x_j, t_{n+1})) - g_m(\bar{u}_j^{n+1}) \right) \\ & = R_{m,j}^{n+1} - \left( z_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}\bar{t}} - a \left( z_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$y_{m,o}^n = 0, \quad y_{m,J}^n = 0, \quad (3.13)$$

$$\left( y_{m,o}^n \right)_{x\bar{x}} = 0, \quad \left( y_{m,J}^n \right)_{x\bar{x}} = 0, \quad (3.14)$$

$$y_{m,j}^0 = 0, \quad \left( y_{m,j}^0 \right)_{\bar{t}} = R_j^0. \quad (3.15)$$

将(3.12)与  $\left( y_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}}$  作内积, 类似于引理 5 的推导得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( \left\| \left( y_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}} \right\|_{L_2}^2 \right)_{\bar{t}} + \frac{1}{2} \left( \left\| \left( y_{m,j}^{n+1} \right)_{xx\bar{x}\bar{x}} \right\|_{L_2}^2 \right)_{\bar{t}} + a \cdot \left\| \left( y_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}} \right\|_{L_2} \\ & \leq \left| \left( g_m(\bar{u}(x_j, t_{n+1})) - g_m(\bar{u}_j^{n+1}), \left( y_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}} \right) \right| + \left| \left( R_{m,j}^{n+1}, \left( y_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}} \right) \right| \\ & + \left| \left( \left( z_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}\bar{t}}, \left( y_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}} \right) \right| + |a| \cdot \left| \left( \left( z_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}}, \left( y_{m,j}^{n+1} \right)_{\bar{t}} \right) \right|, \end{aligned} \quad (3.16)$$

记

$$k_g = \max_{\substack{|\eta_m| < \max(\sqrt{c_2}, \sqrt{c_6}) \\ 1 < m < M}} \|\text{grad } g_m(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_M)\|_{L_\infty}$$

则

$$\begin{aligned} \left\| g_m(\bar{u}(x_j, t_{n+1})) - g_m(\bar{u}_j^{n+1}) \right\|_{L_2}^2 &\leq M k_g^2 \left\| \bar{\varepsilon}_j^{n+1} \right\|_{L_2}^2 \\ &\leq M k_g^2 \left( \left\| \bar{y}_j^{n+1} \right\|_{L_2}^2 + \left\| \bar{z}_j^{n+1} \right\|_{L_2}^2 \right). \end{aligned}$$

这样(3.16)对m求和给出

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left( \left\| \left( \bar{y}_j^{n+1} \right)_{\bar{t}} \right\|_{L_2}^2 + \frac{1}{2} \left( \left\| \left( \bar{y}_j^{n+1} \right)_{x\bar{x}} \right\|_{L_2}^2 \right)_{\bar{t}} + a \left\| \left( \bar{y}_j^{n+1} \right)_{\bar{t}} \right\|_{L_2}^2 \right) \\ &\leq M^2 k_g^2 \left( \left\| \bar{y}_j^{n+1} \right\|_{L_2}^2 + \left\| \bar{z}_j^{n+1} \right\|_{L_2}^2 \right) + \frac{1}{2} \left( \left\| \bar{R}_j^{n+1} \right\|_{L_2}^2 + \left\| \left( \bar{y}_j^{n+1} \right)_{\bar{t}} \right\|_{L_2}^2 \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( \left\| \left( \bar{z}_j^{n+1} \right)_{\bar{t}} \right\|_{L_2}^2 + \left\| \left( \bar{y}_j^{n+1} \right)_{\bar{t}} \right\|_{L_2}^2 \right) + \frac{1}{2} |a| \cdot \left( \left\| \left( \bar{z}_j^{n+1} \right)_{\bar{t}} \right\|_{L_2}^2 + \left\| \left( \bar{y}_j^{n+1} \right)_{\bar{t}} \right\|_{L_2}^2 \right). \end{aligned}$$

从Gronwall不等式和Sobolev嵌入定理得到

$$\begin{aligned} \left\| \left( \bar{y}_j^{n+1} \right)_{\bar{t}} \right\|_{L_2}^2 &\leq k_8(\tau^2 + h^4), \quad \left\| \left( \bar{y}_j^{n+1} \right)_{x\bar{x}} \right\|_{L_2}^2 \leq k_8(\tau^2 + h^4), \\ \left\| \bar{y}_j^{n+1} \right\|_{L_2}^2 &\leq k_8(\tau^2 + h^4), \quad \left\| \bar{y}_j^{n+1} \right\|_{L_\infty}^2 \leq k_8(\tau^2 + h^4). \end{aligned}$$

这里k<sub>8</sub>是正常数。从定义直接得出

$$\left\| \bar{\varepsilon}_j^{n+1} \right\|_{L_\infty} \leq k_9 \cdot (\tau + h^2),$$

其中k<sub>9</sub>是正常数。这就给出定理的结论。

**定理 4** 设引理 5 的条件满足, 则差分问题(3.1)–(3.4)的解对初值稳定。

**证** 设初值有扰动量  $\varepsilon_j^0$ , 能建立起扰动量  $\varepsilon_j^n$  所满足的方程和边界条件、初始条件。利用引理 5 中已证明的差分解的一致有界性, 类似于定理 3 的证明不难证出差分格式对初值的稳定性。

### 参 考 文 献

- [1] Lcesari and R. Kannan, Nonlinear Analgsis Theory, *Math. Appl.*, 6 (1982), 751–805.
- [2] 郭柏灵, 中国科学(A辑), 1983, 2, 134–146.
- [3] 常谦顺, 中国科学(A辑), 1983, 3, 202–214.

## Finite Difference Method in the Initial-Boundary Value Problems for Nonlinear Wave Systems of Higher Order

Guo Bailin      Chang Qianshun

### Abstract

We first use the Galerkin method to prove the existence and uniqueness of weak solutions to the initial-boundary value problems for nonlinear wave systems of higher order. we also consider the finite difference method for this problem and prove the convergence and stability of some finite differencing schemes.